Saint-Etienne, 1995

Schémas de volumes finis pour les problèmes d'écoulements en milieu poreux.

par
Robert Eymard, LCPC, 58 bd Lefèbvre 75732 Paris Cedex 15 et Université Paris-Nord, France,
Thierry Gallouët, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 46, allée d'Italie, 69007 Lyon, France,
Raphaèle Herbin, Université de Savoie, Campus Scientifique, 73376 Le Bourget du Lac Cedex, France.

Résumé
Les problèmes d'écoulements en milieu poreux possèdent de nombreux aspects physiques, induisant des comportements variés, de transports convectifs et diffusifs notamment. Pour résoudre numériquement ces problèmes, des schémas numériques de type "Volumes Finis" sont fréquemment employés. Nous présentons ici les principes généraux permettant de bâtir ces schémas, fondés, en particulier, sur un principe de conservativité. Nous donnons ensuite quelques résultats de convergence des solutions approchées données par ces schémas pour certains problèmes simples d'écoulements en milieu poreux.

I. Introduction

Les modèles d'écoulements en milieu poreux prennent en compte plusieurs types de phénomènes physiques :

- la conservation des grandeurs extensives, telles que l'énergie, la masse ou le nombre de moles de différents corps chimiques, la quantité de mouvement ;

- des lois de comportement, qui sont la conséquence de l'expression du second principe de la thermodynamique : loi de Fourier, pour l'expression des flux conductifs de chaleur, loi de Darcy, pour les écoulements monophasiques, loi de Fick, pour l'expression de la diffusion moléculaire ;

- des lois locales (qui ne font pas intervenir de dérivation ou d'intégration en espace), qui expriment la création d'espèces chimiques, ou le passage de molécules d'un corps chimique d'une phase à une autre [8], ou encore des réactions d'adsorption de certaines espèces par le squelette rocheux.

De nombreux problèmes physiques sont par ailleurs posés par l'interaction mécanique entre les fluides interstitiels, et le squelette rocheux. L'action du squelette sur le fluide est étudiée dans les problèmes de genèse de bassin [12]. Il est également intéressant d'étudier l'action du fluide sur le squelette (c'est par exemple le problème de la mise en eau des barrages). Cet article n'évoquera pas les questions mathématiques relatives à ces derniers problèmes, et sera centré sur différents aspects de la conservation des fluides.

La mise en oeuvre de schémas numériques pour la résolution approchés de ces problèmes conduit à l'étude de plusieurs problèmes à caractère mathématique, ayant fait l'objet de nombreux travaux. On peut voir, par exemple, [1], [3], [6]. Notre propos est ici d'évoquer quelques aspects des problèmes de la convergence des schémas de volumes finis. Nous appliquerons ensuite ces concepts au cas des écoulements en milieu poreux ; pour cela, nous étudierons un problème physique que nous simplifierons, pour aboutir au couplage des équations de conservation de deux constituants ; nous donnerons dans ce cadre quelques indications sur les démonstrations de convergence des schémas.

II. Principes des schémas de volumes finis

Nous considérons un problème physique qui fait intervenir la conservation d'une grandeur extensive $q(u)$, où q est une fonction donnée de l'inconnue u. L'inconnue u peut être aussi bien scalaire que vectorielle. Dans le cas des écoulements en milieu poreux, par exemple, plusieurs grandeurs sont conservées simultanément : l'énergie, la masse ou le nombre de moles de différentes espèces chimiques. Les inconnues sont alors la pression de l'une des phases, les saturations, les fractions massiques ou molaires des différentes espèces chimiques dans chacune des phases.

Nous écrivons la forme générale d'une loi de conservation [10], en égalant la variation dans le temps de la grandeur $q(u)$ dans tout domaine borné Ω inclus dans $\mathbb{R}^N$, au bilan des flux de matière (comptés positifs en sortie de Ω), notés $\phi_\Omega(u)$, au travers de la frontière $\partial\Omega$ du domaine considéré, et des termes $\sigma(u)$ source en grandeur extensive, liés soit à des échanges avec l'extérieur, soit à des mécanismes de réaction chimique entre les différentes grandeurs conservées :

$$\Big(\int_\Omega q(u)(x,t)dx\Big)_t = -\int_{\partial\Omega} \phi_\Omega(u)(s,t)ds(x) + \int_\Omega \sigma(u)(x,t)dx, \tag{1}$$

où l'adjonction de l'indice inférieur t exprime la dérivée partielle par rapport au temps. L'expression locale d'une loi de conservation, obtenue en considérant un domaine infinitésimal, est de la forme suivante :

$$\Big(q(u)\Big)_t(x,t) = -\text{div}(\mathbf{F}(u))(x,t) + \sigma(u)(x,t), \tag{2}$$

où $\mathbf{F}$ est une fonction vectorielle donnée de l'inconnue u, vérifiant $\mathbf{F}(u).\mathbf{n}(s,t) = \phi_\Omega(u)(s,t)$, $\mathbf{n}(s,t)$ est le vecteur normal extérieur à la frontière $\partial\Omega$, et div représente l'opérateur divergence, c'est à dire div $= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}$, où x_i est la i-ème coordonnée de l'espace.

Le membre de gauche de l'équation (2) pourrait être écrit comme un terme de divergence en "espace-temps". Ainsi, cette équation pourrait être discrétisée par une méthode de volumes finis "espace-temps". Nous ferons ici le choix de discrétiser le terme $(q(u))_t$ par le quotient différentiel $(q(u^{n+1}) - q(u^n))/k$, où k est le pas de temps (qui peut éventuellement varier en fonction de n), et u^n est une fonction de l'espace approchant la valeur de l'inconnue u au temps $t_n = nk$, lorsque le pas de temps est constant. L'indice n décrit alors l'ensemble $\{0, 1, ...N_T\}$, tel que $N_T k \geq T$, lorsque le problème d'évolution est posé dans un intervalle de temps $]0, T[$.

Que l'on recherche la solution d'un problème stationnaire dans Ω ou d'un problème d'évolution dans $\Omega\times]0, T[$, la méthode des volumes finis en espace est définie à l'aide d'un maillage de Ω. Au moyen de ce maillage sont définies des fonctions ω_i, $i \in I$, de Ω dans $\mathbb{R}$, qui peuvent être par exemple les fonctions caractéristiques de chaque maille du maillage, mais qui peuvent être plus généralement des fonctions positives, continues ou non, dont le support est réduit à quelques mailles voisines. Le maillage (spatial) peut donc être vu comme la donnée de la famille $(\omega_i)_{i\in I}$. Nous poserons $\mathcal{T} = (\omega_i)_{i\in I}$. Une propriété de conservation du volume en chaque point doit être vérifiée, exprimée de la manière suivante :

$$\sum_{i\in I} \omega_i(x) = 1, \tag{3}$$

pour presque tout $x \in \Omega$. Nous définirons la mesure du volume fini d'indice $i \in I$ par $\mathcal{V}_i = \int_\Omega \omega_i(x)dx$. Les méthodes de volumes finis consistent à rechercher la solution (u_i^n), $i \in I$, $n \in \{0, 1, ...N_T\}$ des équations suivantes :

$$\mathcal{V}_i \frac{q(u_i^{n+1}) - q(u_i^n)}{k} + \sum_{j\in I} E_{ij}(u_m^n, u_m^{n+1}, m \in I) = \mathcal{V}_i \; S(u_i^n, u_i^{n+1}), \tag{4}$$

où le terme $S(u_i^n, u_i^{n+1})$ est une expression discrète du terme source $\sigma(u)$ et la grandeur $E_{ij}(u_m^n, u_m^{n+1}, m \in I)$ est un terme d'échange entre les volumes finis i et j. On exprime alors le principe de conservativité, en écrivant :

$$E_{ij}(u_m^n, u_m^{n+1}, m \in I) = -E_{ji}(u_m^n, u_m^{n+1}, m \in I). \tag{5}$$

Le schéma est alors entièrement défini par l'équation (4) lorsqu'une expression est donnée pour le terme $E_{ij}(u_m^n, u_m^{n+1}, m \in I)$. Nous donnerons des exemples, illustrant comment ce choix permet de voir le schéma (4) comme une intégration approchée dans le domaine Ω, de l'équation (2) multipliée par chaque fonction de l'espace ω_i, $i \in I$: une relation de **consistance** sera établie entre les termes $E_{ij}(u_m^n, u_m^{n+1}, m \in I)$ et $\int_\Omega \mathbf{grad}\omega_i(x).\mathbf{F}(u)(x,t)dx$, en prenant l'expression $\mathbf{grad}\omega_i$ dans un sens généralisé (mesure de Dirac sur la frontière d'un domaine, lorsque ω_i en est la fonction caractéristique).

Les valeurs u_i^n, $i \in I$, $n \in \{0, 1, ...N_T\}$, sont alors vues comme des approximations des termes $\frac{1}{\mathcal{V}_i} \int_\Omega \omega_i(x)$ $u(x, t^n)\ dx$, moyennes locales de l'inconnue u au temps t^n.

Ces valeurs permettent alors de définir une fonction u_{app} (appelée "solution approchée") sur $\Omega \times]0, T[$, par :

$$uapp(x,t) = \sum_{i \in I} u_i^n . \omega_i(x), \tag{6}$$

pour $x \in \Omega$ et $t \in]t^n, t^{n+1}]$ $(n \in \{0, \ldots, N_T\})$.

Comparaison avec la méthode des différences finies.

Le principe des méthodes de différences finies est de donner des équations, en fonction de valeurs discrètes des inconnues en un certain nombre de points d'un maillage. Chaque inconnue est associée à une équation, dans laquelle les dérivées partielles sont remplacées par des quotients numériques (les différences finies), obtenus par des développements de Taylor (voir [15], [18], par exemple). Ce principe de discrétisation peut être la source de difficultés si les coefficients des équations sont discontinus (problème posés par les milieux non-homogènes) ; ce problème n'apparaît pas, en principe, dans la méthode des volumes finis, lorsque les discontinuités coïncident avec les frontières des volumes de contrôle.

Cependant, bien des schémas dénommés différences finies dans la littérature sont en fait des méthodes de volumes finis.

Comparaison avec les méthodes d'éléments finis.

Les méthodes d'éléments finis sont caractérisées par la résolution d'une équation exacte (forme "variationnelle" ou forme "faible" du problème initial) dans des espaces approchés. Cette forme variationnelle est obtenue par la multiplication de l'équation locale initiale par une fonction de base ; les inconnues sont alors recherchées comme des combinaisons linéaires de ces fonctions de base (développement de Galerkin). Les méthodes de volumes finis sont parfois baptisées méthodes "d'éléments finis", parce que leur forme provient d'une intégration dans Ω de l'équation de départ multipliée par une fonction ω_i.

Cependant, à la différence des méthodes de type Galerkin, les schémas numériques de volumes finis ne se réfèrent pas à un développement des termes des équations en exprimant l'inconnue comme une combinaison linéaire des fonctions ω_i. L'approximation est définie par le mode de calcul des termes d'échange, qui dépend de la nature des phénomènes considérés (cf. [16]). Par exemple, un schéma de différences finies peut être choisi pour exprimer des termes d'échange diffusifs, et les valeurs de certaines inconnues peuvent être prises à l'amont de l'écoulement pour des problèmes de convection.

III. Discrétisation par une méthode de volumes finis d'un problème d'écoulement en milieu poreux.

III.1 Présentation du problème physique

Nous présentons ici un modèle simplifié d'écoulement en milieu poreux lié à l'exploitation de gisements d'hydrocarbures. La présentation d'un contexte physique plus complet est faite dans [1], [6], [19].

Nous supposons que nous étudions un gisement d'hydrocarbures liquides exploité par injection d'eau. Nous supposerons que les hydrocarbures constituent une phase liquide unique dans le milieu poreux, dont la composition ne sera pas affectée par l'exploitation du gisement. Nous étudierons donc un problème d'écoulement diphasique en milieu poreux, à deux constituants, que nous supposerons de plus incompressibles.

Le système d'équations à résoudre est obtenu en exprimant la conservation de chacun des deux constituants et en utilisant la loi de Darcy généralisée aux écoulements polyphasiques ([1],[12],[19]).

$$u_t(x,t) - \mathrm{div}(a(u)\mathbf{grad}p)(x,t) = 0,\ x \in \Omega,\ t \in [0, T[, \tag{7}$$

$$(1-u)_t(x,t) - \mathrm{div}(b(u)\mathbf{grad}p)(x,t) = 0,\ x \in \Omega,\ t \in [0, T[. \tag{8}$$

La variable d'espace, x, est dans un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, à contours polyédriques, noté Ω, et la variable de temps, t, est dans $[0, T[$ $(0 < T \leq \infty)$.

Les inconnues des équations (7)-(8) sont la saturation u de l'une des deux phases, la pression p est supposée commune aux deux phases (nous ne considèrerons pas ici de phénomènes capillaires ou gravitaionnels). Ces deux inconnues sont a priori des fonctions rélles de l'espace et du temps. Nous supposons que les fonctions a et $(-b)$ sont des applications **croissantes** positives régulières de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant $\inf_{\mathbb{R}}(a+b) > 0$. Ce cas est idéalisé par rapport à la réalité à plusieurs titres, et pourtant, sauf si $a+b$ est constante (voir section IV), i n'y a pas actuellement de théorème général d'existence de la solution pour ce système. En particulier, les difficultés liées aux phénomènes d'instabilités visqueuses sont encore aujourd'hui non résolues.

Aux équations (7) et (8), il faut ajouter des conditions aux limites et une condition initiale :

$$(a+b)(u(x,t))\mathbf{grad}p \cdot \mathbf{n}(x,t) = g(x,t),\ x \in \Gamma,\ t \in [0,T[, \tag{9}$$

$$u(x,t) = \overline{u}(x,t),\ x \in \Gamma^+,\ t \in [0,T[, \tag{10}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega, \tag{11}$$

où Γ est la frontière de Ω, et $\mathbf{n}$ la normale à Γ, extérieure à Ω. Les fonctions $u_0 \in L^\infty$, $\overline{u} \in L^\infty(\Gamma \times \mathbb{R}_+)$ et $g \in L^2(\Gamma)$ sont données, et $\Gamma^+ = \{x \in \Gamma,\ g(x) \geq 0\}$. Enin, pour que le problème (7)-(11) ait une solution, on suppose que :

$$\int_\Gamma g(x,t)d\gamma(x) = 0, \forall t \in [0,T[. \tag{12}$$

Noter que $d\gamma$ représente la mesure de Lebesgue $N-1$-dimensionnelle sur Γ.

En additionnant les équations (7) et (8), la pression, p, apparaît donc comme solution d'une équation elliptique (pour u donnée).

III.2 Discrétisation des équations (7)-(11)

Nous construisons maintenant des solutions approchées de (7)-(11) pour l'ensemble des inconnues, pression et saturation, au moyen d'un maillage. Cette discrétisation, pour pouvoir être généralisée aux cas des systèmes physiques complexes évoqués dans [1], [6], [19], est appliquée de manière identique aux deux équations (7) et (8).

On considère un pas de temps, $k > 0$, et un maillage de Ω (inclus dans $\mathbb{R}^N$, $N = 2$ ou 3), noté $\mathcal{T} = (K_j)_{j \in J}$, constitué de polyèdres comportant $N+1$ sommets (il s'agit donc de triangles quand $N = 2$ et de tétraèdres qnaud $N = 3$). On note $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$, l'ensemble des sommets du maillage.

La discrétisation de (7)-(11) par volumes finis peut se faire avec, pour chaque instant $t_n = nk$, des inconnues discrètes localisées dans les mailles ou localisées aux sommets du maillage.
Nous choisirons ici de localiser les inconnues discrètes aux sommets du maillage (ceci va donner, pour ce système, sur l'équation elliptique sur p, une discrétisation par éléments finis)
Les inconnues discrètes sont donc données par (avec $kN_T \geq T$) :
$(p_j^n, u_j^n)_{j \in I; n \in \{0,\ldots,N_T\}}$.

Pour tout $i \in I$, on note ω_i la fonction de base des éléments finis $P1$, associée au sommet A_i. Cette fonction est définie comme étant linéaire dans chaque polyèdre, continue, valant 1 au sommet A_i, et 0 à tous les autres sommets. Notons que les fonctions $(\omega_i)_{i \in I}$ vérifient la relation (3). ω_i

Comme dans le paragraphe II, nous définissons, pour tout $i \in I$, la mesure $\mathcal{V}_i$ du volume fini $i \in I$ par $\mathcal{V}_i = \int_\Omega \omega_i(x)dx$; cette mesure vaut $1/(N+1)$ fois la mesure totale des polyèdres ayant A_i comme sommet ;

La **transmissivité** entre deux volumes finis $i \in I$ et $j \in I$ est définie par :

$$T_{ij} = -\int_\Omega \mathbf{grad}\omega_i(x) \cdot \mathbf{grad}\omega_j(x)dx. \tag{13}$$

Les maillages seront tels que cette grandeur soit toujours positive.

On propose le schéma numérique suivant :

$$\mathcal{V}_i \frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{k} - \sum_{j\in I} a(u_{i,j}^n)(p_j^{n+1}-p_i^{n+1})T_{i,j} - (\frac{a}{a+b})(\overline{u}_i^n)g_{i,n}^+ + (\frac{a}{a+b})(u_i^n)g_{i,n}^- = 0,\ i\in I,\ n\in\{0,\ldots,N_T\}, \tag{14}$$

$$-\mathcal{V}_i \frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{k} - \sum_{j\in I} b(u_{i,j}^n)(p_j^{n+1}-p_i^{n+1})T_{i,j} - (\frac{b}{a+b})(\overline{u}_i^n)g_{i,n}^+ + (\frac{b}{a+b})(u_i^n)g_{i,n}^- = 0,\ i\in I,\ n\in\{0,\ldots,N_T\}, \tag{15}$$

$$g_{i,n}^+ = \int_\Gamma \omega_i(x)g^+(x,t_n)d\gamma(x),\ g_{i,n}^- = \int_\Gamma \omega_i(x)g^-(x,t_n)d\gamma(x),\ i\in I, \tag{16}$$

avec $g^+ = \max(g,0)$, $g = g^+ - g^-$, $t_n = nk$.
Dans les équations (14) et (15), u_{ij}^n désigne la valeur prise à l'amont de l'écoulement entre les sommets i et j :

$$u_{i,j}^n = u_i^n,\ \text{si } p_i^{n+1} \geq p_j^{n+1},\ u_{i,j}^n = u_j^n,\ \text{si } p_i^{n+1} < p_j^{n+1}, \tag{17}$$

En reprenant les notations du paragraphe I, le terme d'échange, pour l'èquation (7) (à l'instant t_n) entre les volumes finis i est j est donc :

$$E_{ij}(u_m^n, u_m^{n+1}, m\in I) = a(u_{i,j}^n)(p_j^{n+1}-p_i^{n+1})T_{i,j}.$$

Les conditions aux limites et la condition initiale interviennent dans le calcul de $(u_i^0)_{i\in I}$ et $(\overline{u}_i^n)_{i\in I; n\in\{0,\ldots,N_T\}}$:

$$\overline{u}_i^n = \frac{1}{\int_\Gamma \omega_i(x)d\gamma(x)} \int_\Gamma \omega_i(x)\overline{u}(x,t_n)d\gamma(x),\ \text{si } \int_\Gamma \omega_i(x)d\gamma(x) \neq 0,\ i\in I, n\in\{0,\ldots,N_T\}, \tag{18}$$

$$\overline{u}_i^n = 0,\ \text{si } \int_\Gamma \omega_i(x)d\gamma(x) = 0,\ i\in I, n\in\{0,\ldots,N_T\}, \tag{19}$$

$$u_i^0 = \frac{1}{\mathcal{V}_i}\int_\Omega \omega_i(x)u_0(x)dx,\ i\in I. \tag{20}$$

On suppose connu $(p_i^n, u_i^n)_{i\in\{1,\ldots,M\}}$, pour un $n\in\{0,\ldots,N_T\}$.
On s'intéresse alors au calcul de $(p_i^{n+1}, u_i^{n+1})_{i\in\{1,\ldots,M\}}$. On suppose connu également (par miracle) le signe de $p_i^{n+1} - p_j^{n+1}$ pour tout $i,j\in\{1,\ldots,M\}$. On connait donc $u_{i,j}^n$, pour tout $i,j\in\{1,\ldots,M\}$ (en pratique, le choix de $u_{i,j}$ peut se faire avec le signe de $p_i^n - p_j^n$). La famille $(p_i^{n+1})_{i\in I}$ est alors solution d'un système linéaire indépendant de $(u_i^{n+1})_{i\in I}$). On suppose que la matrice $K = (k_{i,j})_{i,j\in\{1,\ldots,M\}}$ est irréductible (c.a.d. que si $\{1,\ldots,M\} = I\cup J$, avec $I\neq\emptyset$, $J\neq\emptyset$, $I\cap J=\emptyset$, alors il existe $i\in I$, $j\in J$, t.q. $k_{i,j}\neq 0$, ce qui est vérifié si Ω est simplement connexe et que le maillage est "assez" fin)). Le système linéaire admet alors une solution, unique à une constante additive près, grâce à la condition (12).
On suppose maintenant $(p_i^{n+1})_{i\in I}$ connu et on peut donc caculer $(u_i^{n+1})_{i\in I}$.
On peut démontrer un résultat de stabilité sur $(u_i^{n+1})_{i\in I}$. Plus précisément, pour $k\leq C$, où C dépend de $(\mathcal{V}_i)_{i\in I}$, $(T_{i,j})_{i,j\in\{1,\ldots,M\}}$, g, a, b, A, B, et $(p_i^{n+1})_{i\in I}$, avec $A = \min(\min_{i\in I}\overline{u}_i^n, \min_{i\in I} u_i^n)$, $B = \max(\max_{i\in I}\overline{u}_i^n\ , \max_{i\in I} u_i^n)$, on a :

$$A \leq \min_{i\in I} u_i^{n+1} \leq \max_{i\in I} u_i^{n+1} \leq B,$$

Avec les hypothèses présentées dans ce paragraphe, nous ne savons pas montrer de résultat de convergence. Dans les deux paragraphes suivants nous donnons des résultats de convergence pour deux cas "simples".

IV. Résultat de convergence pour le problème couplé

Nous reprenons les équations et la discrétisation du pragraphe précédent, et nous supposons que $a(s) = s$ et $b(s) = 1-s$, de sorte que P est solution d'une équation elliptique découplée de u, et que u est solution d'une équation hyperbolique linéaire (dépendant de p). (Nous prenons aussi, pour simplifier, $T = \infty$.) Nous voulons montrer ici des propriétés de convergence pour le champ des pressions approchées, vers la solution de l'équation elliptique, et du champ de saturations vers la solution de l'équation hyperbolique. Un résultat de convergence semblable semblable peut être montré en localisant les inconnues discrètes, à chaque pas de temps, aux sommets du maillage (cf. [21]).

Nous commencerons par donner un sens mathématique plus précis au problème couplé. On rappelle que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à contours polyédriques, g est une fonction de $L^2(\partial\Omega)$ vérifiant (12), et $\Gamma^+ = \{s \in \partial\Omega,\ g(s) \geq 0\}$. On note aussi $\Omega^+ = \Omega \cup \Gamma^+$ et $\Gamma^- = \{s \in \partial\Omega,\ g(s) \leq 0\}$.

Nous introduisons l'espace des fonctions test, dont la particularité est d'être nulles sur le bord sortant :

$$\mathcal{D}(\Omega^+ \times [0,T[) = \{\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma^- \times \mathbb{R}_+\}.$$

La solution (u, P) du système (7)-(11) doit être solution de (7)-(11) au sens faible suivant (voir [7]) :
$(u, P) \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^+) \times H^1(\Omega)$,

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_\Omega u(x,t)\varphi_t(x,t) - \mathbf{grad}P(x).\mathbf{grad}\varphi(x,t)dxdt + \int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0)dx$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\partial\Omega^+} \overline{u}(s,t)\varphi(s,t)g(s)dsdt = 0, \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega^+ \times \mathbb{R}^+), \tag{21}$$

et,

$$\int_\Omega \mathbf{grad}P(x).\mathbf{grad}X(x)dx - \int_{\partial\Omega} X(s)g(s)ds = 0, \forall X \in H^1(\Omega). \tag{22}$$

L'existence et l'unicité (à une constante près) de $P \in H^1(\Omega)$ solution de (22) est un résultat classique des problèmes elliptiques. La fonction $\mathbf{grad}P$ est alors déterminée de manière unique, et des hypothèses supplémentaires sur la fonction g permettent de montrer l'unicité de $u \in L^\infty$ solution de (21). L'existence de u sera une conséquence de la démonstration de la convergence du schéma numérique.

Nous considérons la discrétisation présentée au paragraphe III. Nous recherchons donc les grandeurs P_i et u_i^{n+1}, définies pour tout $i \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, à partir des u_j^n, $j \in I$ par les relations suivantes :

$$\mathcal{V}_i(u_i^{n+1} - u_i^n) - k \ \left[\sum_{j\in I} T_{ij}u_{ij}^n(P_j - P_i) + \overline{u}_i^n g_i^+ - u_i^n g_i^-\right] = 0, \tag{23}$$

et,

$$\mathcal{V}_i\Big((1-u_i^{n+1}) - (1-u_i^n)\Big) - k \ \left[\sum_{j\in I} T_{ij}(1-u_{ij}^n)(P_j - P_i) + (1-\bar{u}_i^n)g_i^+ - (1-u_i^n)g_i^-\right] = 0. \tag{24}$$

On rappelle que u_{ij}^n désigne la valeur prise à l'amont de l'écoulement entre les sommets i et j : si $P_j > P_i$ alors $u_{ij}^n = u_j^n$, sinon $u_{ij}^n = u_i^n$.

Nous remarquons alors que la somme des équations (23) et (24), qui est l'expression du bilan volumique total des écoulements des deux phases, peut être écrite sous la forme suivante :

$$\sum_{j\in I} T_{ij}(P_j - P_i) + g_i = 0, \quad \forall i \in I. \tag{25}$$

Notons $V_\mathcal{T}$ l'espave vectoriel engendré par $(\omega_i)_{i\in I}$, et $P_\mathcal{T} = \sum_{i\in I} P_i\ \omega_i$ la fonction approchée, élément de V, définie par les valeurs discrètes de la pression en chaque sommet du maillage. La relation (25) définit un système linéaire d'inconnues P_i, $i \in I$, qui est en fait l'expression de la formulation variationnelle de l'équation elliptique en pression dans l'espace $V_\mathcal{T}$:

$$\int_\Omega \mathbf{grad}P(x).\mathbf{grad}X(x)dx = \int_{\partial\Omega} X(s)g(s)ds, \forall X \in V_h, \tag{26}$$

lorsque la fonction X est l'une des fonctions ω_i. Le schéma de volumes finis (23) et (24) se traduit donc en fait par un schéma d'éléments finis pour l'équation elliptique. Le schéma d'éléments finis peut lui-même être vu comme un schéma de volumes finis, pour une équation stationnaire, dans lequel les termes d'échanges entre deux volumes finis i et j sont donnés par des expressions de la forme : $T_{ij}(P_j - P_i)$.

Il y a donc convergence dans $H^1(\Omega)$, sous des conditions sur les maillages, des pressions discrètes vers la solution du problème elliptique (22), ce qui se traduit par une convergence dans $L^2(\Omega)$ du gradient des pressions approchées vers le gradient de la pression exacte.

Nous devons maintenant étudier de quelle manière le champ de saturations discret converge vers la solution du problème de transport. Le schéma (23)-(24) conduit à un champ de pressions discret, qui permet de considérer alors séparément l'équation d'évolution des saturations (23) comme un schéma décentré amont explicite pour l'équation de transport.

Nous appliquons alors des méthodes développées pour l'équation de convection seule (cf. [7]) : nous imposons donc sur le pas de temps k la condition suivante :

$$k \leq \inf_{i \in I} \frac{\mathcal{V}_i(1-\beta)}{\displaystyle\sum_{j \in I, P_j < P_i} T_{ij}(P_i - P_j) + g_i^-}, \tag{27}$$

où β est un réel donné strictement compris entre 0 et 1, indépendant des triangulations et du pas de temps. Une telle condition est toujours possible, une fois connues les valeurs discrètes de la pression. Sous la condition (27), nous obtenons les propriétés suivantes :

1. la famille (u_i^n) vérifie un principe du maximum discret (donnant aussi une "stabilité L^∞"), car les u_i^n sont bornés par toute constante majorant à la fois la norme dans L^∞ de la donnée initiale u_0 et de la condition au bord $\overline{u}$.

2. la famille (u_i^n) vérifie une estimation faible de la variation totale de u :

$$k \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{(i,j), P_j > P_i} T_{ij}(P_j - P_i) \mid u_j^n - u_i^n \mid + k \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{i \in I} g_i^+ \mid u_i^n - \overline{u}_i^n \mid \leq C/\sqrt{h}, \tag{28}$$

où C désigne encore une constante indépendante des maillages et du choix des pas de temps.

Ces deux propriétés sont dues, en particulier, au choix décentré de $u_{i,j}^n$ (cf. (17)) et la condition de stabilité (27).
On définit la solution approchée $u_{\mathcal{T},k}$ par $u_{\mathcal{T},k}(.,t) = \sum_{i \in I} u_i^n \omega_i$, pour $t \in [t_n, t_{n+1}[$. La propriété 1. ci dessus permet d'utiliser le théorème de compacité pour la topologie faible-$\star$ de L^∞. La propriété 2. et la convergence forte du gradient de la pression approchée vers le gradient de la pression exacte permettent de montrer que la limite (d'une sous suite d'une suite de solutions approchées) est solution de (21).

Lorsque les hypothèses sont suffisantes pour que le gradient de pression soit de classe C^1, il y a alors unicité de la solution du problème (21), et une propriété de convergence de $u_{\mathcal{T},k}$ vers u est satisfaite.

Notons que l'ensemble de cette démarche peut aussi être faite avec un schéma **implicite** en u, essentiellement en remplaçant u_{ij}^n par u_{ij}^{n+1} dans le schéma (23) et (24). Dans ce cas, la convergence est obtenue en faisant tendre indépendamment h et k vers 0 (voir [14]. Ce schéma implicite est très utilisé dans les applications pétrolières industrielles, pour lesquelles la stabilité du calcul est primordiale, car l'accent y est souvent mis sur les aspects compositionnels des hydrocarbures, devant la précision des résultats ([6], [19]).

IV. Résultat de convergence pour le problème de convection

Dans ce paragraphe, nous supposerons que le champ de pressions résultant du système (7)-(11) est connu. La connaissance de $P(x,t)$, pour tout $x \in \Omega$ et $t \in [0,T[$, permet de définir le champ de vitesses $\mathbf{v}(x,t) = -\mathbf{grad}P(x)$, pour tout $x \in \Omega$ et tout $t \in [0,T[$. La saturation u est donc exactement la solution faible entropique du problème (7) (on ne suppose plus que a est linéaire. Pour simplifier encore cette exposé, nous n'introduirons pas de termes de bord, en supposant que $\Omega = \mathbb{R}^N$. Nous prendrons aussi pour simplifier $N = 2$.

On se propose donc ici de démontrer la convergence d'un schéma de type "Volumes Finis" pour une équation hyperbolique en deux dimensions d'espace avec une discrétisation spaciale utilisant des triangles.
On considère le problème suivant :

$$u_t(x,t) + \operatorname{div}(\mathbf{v} f(u(x,t))) = 0, x \in \mathbb{R}^2,\ t \in [0,T] \tag{29}$$

$$u(x,0) = u_0(x), x \in \mathbb{R}^2, \tag{30}$$

avec $T > 0$ et les hypothèses suivantes sur les données T, $\mathbf{v}$, f, u_0 :

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in C^1(\mathbb{R}^2 \times [0,T], \mathbb{R}^2), \tag{31}$$

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^2\times[0,T]} |\mathbf{v}(x,t)| = V < +\infty, \tag{32}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v}(x,t) = \sum_{i=1}^{2} \partial_{x_i} v_i(x,t) = 0, \text{ for all } (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times [0,T], \tag{33}$$

$$u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^2), \tag{34}$$

$$f = f_1 + f_2,\ f_1, f_2 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f_1'(s) \geq 0,\ f_2'(s) \leq 0,\ \forall s \in \mathbb{R}. \tag{35}$$

Soient $\mathcal{T}$ un maillage formé de triangles et k un pas de temps (supposé constant). Soit $N \in \mathbb{N}$ t.q. $(N-1)k < T \leq Nk$. On discrétise (29)-(30) avec le schéma d'Euler explicite en temps et un schéma de Volumes Finis en espace. Les inconnues discrètes sont u_K^n, $n \in \{0, \ldots, N\}$, $K \in \mathcal{T}$, données par le schéma numérique (36)-(37) (décrit ci-dessous).Ici aussi on pourrait mettre lesinconnues discrètes, à chaque instant, aux sommets du maillage plutôt que dans les mailles. Soit $K \in \mathcal{T}$, on note $S(K)$ la surface du triangle K, $\mathcal{T}_K$ les trois triangles de $\mathcal{T}$ ayant un côté commun avec K, a_{K,K_v} le côté commun à K et K_v (quand $K_v \in \mathcal{T}_K$), et $\mathbf{n}_K$ la normale à la frontière de K, extérieure à K. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des côtés du maillage ; pour $a \in \mathcal{A}$, $l(a)$ est la longueur de a, $\mathbf{n}_a$ un vecteur normal à a, K_a^+ et K_a^- les deux triangles de $\mathcal{T}$ ayant a pour côté. On peut maintenant définir le schéma numérique :

$$\frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k} S(K) + \sum_{i=1}^{n_K} \Big(\int_{a_{K,K_v}} (\mathbf{v}.\mathbf{n}_K)^+ d\sigma)(f_1(u_K^n) + f_2(u_{K_v}^n)) -$$

$$(\int_{a_{K,K_v}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_K)^- d\sigma)(f_2(u_K^n) + f_1(u_{K_v}^n)) = 0, \forall K \in \mathcal{T}, \forall n \in \{0, \ldots, N-1\}, \tag{36}$$

$$u_K^0 = \frac{1}{S(K)} \int_K u_0(x)dx, \forall K \in \mathcal{T}. \tag{37}$$

Dans (36), $d\sigma$ désigne la mesure de Lebesgue 1-dimensionnelle sur la frontière de K.
La solution approchée au temps t_n est définie par : $u^n(x) = u_K^n$ si $x \in K$. La solution approchée est définie sur $\mathbb{R}^2 \times [0,T]$ par :

$$u_{\mathcal{T},k}(x,t) = u^n(x), \quad \text{for} \quad t \in [nk, (n+1)k[, \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{38}$$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ fixés. On suppose qu'il existe $h \in \mathbb{R}_+^*$, (le "pas d'espace) satisfaisant :

$$\alpha h^2 \leq S(K) \leq \beta h^2, \forall K \in \mathcal{T}, \tag{39}$$

$$\alpha h \leq l(a) \leq \beta h, \forall a \in \mathcal{A}. \tag{40}$$

On suppose que le pas de temps vérifie alors la condition (de stabilité) :

$$k \leq \frac{\alpha h}{2\beta \quad V \quad 2M}(1 - \zeta), \tag{41}$$

où $\zeta > 0$ est donné, $M = \sup(M_1, M_2)$, $M_1 = \sup(f_1'(s), s \in [A,B])$, $M_2 = \sup(-f_2'(s), s \in [A,B])$, avec A, B t.q. $A \leq u_0 \leq B$ p.p. dans $\mathbb{R}^2$.

Soient $\mathbf{v}$, f et u_0 satisfaisant (31)-(35), et $\mathcal{T}$, k satisfaisant (39)-(41). Soient u_K^n et $u_{\mathcal{T},k}$ définis par (36)-(37) et (38).

Afin d'obtenir un résultat de convergence, la première étape consiste à montrer des estimations sur la solution approchée.
On peut montrer que :

$$\min_{K\in\mathcal{T}} u_K^n \leq \min_{K\in\mathcal{T}} u_K^{n+1} \leq \max_{K\in\mathcal{T}} u_K^{n+1} \leq \max_{K\in\mathcal{T}} u_K^n, \quad \forall \ n \in \{0,\ldots,N-1\}, \tag{42}$$

et donc que :

$$\|u_{\mathcal{T},k}\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty. \tag{43}$$

($\|.\|_p$ est la norme usuelle dans $L^p(\mathbb{R}^2)$ ou $L^p(\mathbb{R}^2\times[0,T])$, pour $1\leq p\leq\infty$.)
Ce résultat est encore vrai avec $\zeta = 0$ dans la condition (41).
l'estimation (43) est la seule estimation *a priori* que nous utiliserons ici. Elle ne permet pas d'utiliser de théorèmes de compacité "forte" (dans un espace L^p) pour la famille des solutions approch/'ees. Noter qu'en supposant que u_0 est une fonction à variation bornée et que le maillage est formé de rectangles, on pourrait obtenir une estimation *a priori* sur $u_{\mathcal{T},k}$ dans l'espace des fonctions à variations bornées et utiliser ainsi les théorèmes de compacité forte dans $L^p(\mathbb{R}^2\times]0,T[$, pour $p<\infty$. Ceci simplifierait beaucoup la suite de la démonstration de convergence.

La deuxième estimation que nous utiliserons n'est pas une estimation *a priori*, elle n'est pas satisfaite pas la solution entropique de (29)-(30). Elle fortement liée à la diffusion numérique du schéma et c'est pour cette estimation que nous avons besoin de $\zeta>0$. (Elle est semblable à l'estimation (28) du paragraphe précédent.)
Soit $r\geq 0$. On peut montrer qu'il existe $C_r>0$, dépendant seulement de f, u_0, ζ et r t.q. :

$$\sum_{n=0}^{N} k \sum_{a\in\mathcal{A}_r} (\int_a |\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_a| d\sigma)((f_1(u^n_{K_a^+}) - f_1(u^n_{K_a^-}))^2 + (f_2(u^n_{K_a^+}) - f_2(u^n_{K_a^-}))^2) \leq C_r, \tag{44}$$

où $\mathcal{A}_r = \{a\in\mathcal{A}, \text{ t.q. } a\subset B(0,r)\}$, $B(0,r) = \{x\in\mathbb{R}^2, \|x\|\leq r\}$.
Pour montrer ce résultat, on peut procéder ainsi :
Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, à support compact, t.q. $0\leq\varphi\leq 1$, et $\varphi = 1$ dans K si $K\cap B(0,r)\neq\emptyset$. On note φ_K la valeur moyenne de φ dans K. On définit F_1 et F_2 par : $F_1(\xi) = \int_0^\xi sf_1(s)ds$, $\forall\xi\in\mathbb{R}$, $F_2(\xi) = \int_0^\xi sf_2(s)ds$, $\forall\xi\in\mathbb{R}$.
En multipliant (36) par $u_K^n\varphi_K$ et en utilisant div$\mathbf{v}=0$ on montrer que :

$$\begin{aligned}
&(\frac{(u_K^{n+1}-u_K^n)^2}{2k} + \frac{(u_K^{n+1})^2}{2k} - \frac{(u_K^n)^2}{2k})S(K)\varphi_K \\
&+\sum_{i=1}^{n_K}(\int_{a_{K,K_v}} (\mathbf{v}.\mathbf{n}_K)^+)\varphi_K(F_2(u^n_{K_v}) - F_2(u_K^n) + \int_{u_K^n}^{u^n_{K_v}} (u_K^n - s)f_2'(s)ds) \\
&-\sum_{i=1}^{n_K}(\int_{a_{K,K_v}} (\mathbf{v}.\mathbf{n}_K)^-)\varphi_K(F_1(u^n_{K_v}) - F_1(u_K^n) - \int_{u_K^n}^{u^n_{K_v}} (u_K^n - s)f_1'(s)ds) = 0.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\int_a^b f_1'(s)(b-s)ds \geq \frac{1}{2M_1}(f_1(b)-f_1(a))^2$, si $a,b\in[A,B]$ (et la propriété analogue pour f_2), on montre (44).

Il s'agit maintenant de passer à la limite quand $h\to 0$. Nous exploitons ici l'estimation L^∞ dur *uapp* (estimation (43)) et la proposition suivante :

proposition Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}^2\times]0,T[)$. Il existe alors une sous suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, encore notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et il existe $\mu\in L^\infty(\mathbb{R}^2\times]0,T[\times]0,1[)$ t.q. pour toute fonction $g\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ on ait :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2\times]0,T[} g(u_n(x,t))\varphi(x,t)dxdt = \int_{\mathbb{R}^2\times]0,T[\times]0,1[} g(\mu(x,t,\alpha))\varphi(x,t)dxdtd\alpha, \tag{45}$$

pour toute fonction $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^2\times]0,T[)$.

On suppose que les hypothèses (31)-(35) sont vérifiées. Soit $(\mathcal{T}_i,k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de maillages et de pas de temps satisfaisant (39)-(41). La proposition précédente et les estimations (43)-(44) permettent de montrer qu' il existe une sous suite, encore notée $(\mathcal{T}_i,k_i)_{i\in\mathbb{N}}$, et $\mu \in L^\infty(\mathbb{R}^2\times]0,T[\times]0,1[)$ t.q. :

1.La solution approchée définie par (36)-(38), c.a.d. $u_{\mathcal{T}_i,k_i}$, converge vers μ au sens suivant :

$$\lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2\times]0,T[} g(u_{\mathcal{T}_i,k_i}(x,t))\varphi(x,t)dxdt = \int_{\mathbb{R}^2\times]0,T[\times]0,1[} g(\mu(x,t,\alpha))\varphi(x,t)dxdtd\alpha, \tag{46}$$

pour tout $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^2\times]0,T[)$.

2.μ est une "solution processus entropique" de (29)-(30), c.a.d. que μ vérifie :

$$\int_{\mathbb{R}^2}\int_0^T\int_0^1 (\eta(\mu(x,t,\alpha))\varphi_t(x,t) + \Phi(\mu(x,t,\alpha))\mathbf{v}(x,t).\mathbf{grad}\varphi(x,t))d\alpha dtdx +$$
$$\int_{\mathbb{R}^2}\eta(u_0(x))\varphi(x,0)dx \geq 0, \forall\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^2\times[0,T[,\mathbb{R}_+), \tag{47}$$

pour toute fonction, η, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, convexe et de classe C^1, et $\Phi \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction t.q. $\Phi' = f'\eta'$.

La première partie du résultat précédent (c.a.d. la convergence vers μ) est une conséquence de (43) et de la proposition ci dessus. Pour démontrer la deuxième partie, on peut procéder ainsi :

Equation. On Montre (47) avec $\eta(s) = s$ (pour tout $s \in \mathbb{R}$), $=$ au lieu de $\geq$ et $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^2\times[0,T[,\mathbb{R})$. Pour ceci on multiplie (36) (avec $k = k_i$, et $\mathcal{T} = \mathcal{T}_i$) par $u_K^n\varphi(x,t_n)$, avec $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2\times[0,T[,\mathbb{R}_+)$ donné et on passe à la limite quand $i \to \infty$ en utilisant, en particulier, (44).

Entropies On Montre (47) dans le cas général. Pour ceci, soient $\eta \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction convexe et $\Phi_1,\Phi_2 \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, t.q. $\Phi_1' = \eta' f_1'$ et $\Phi_2' = \eta' f_2'$. On pose $k = k_i$ et $\mathcal{T} = \mathcal{T}_i$. On montre d'abord que :

$$\frac{\eta(u_K^{n+1}) - \eta(u_K^n)}{k}S(K) + \sum_{i=1}^{n_K}(\int_{a_{K,K_v}}(\mathbf{v}.\mathbf{n}_K)^+d\sigma)(\Phi_1(u_K^n) + \Phi_2(u_{K_v}^n))$$
$$-(\int_{a_{K,K_v}}(\mathbf{v}.\mathbf{n}_K)^-d\sigma)(\Phi_2(u_K^n) + \Phi_1(u_{K_v}^n)) \leq 0, \forall K \in \mathcal{T}, \forall n \in \{0,\ldots,N-1\}. \tag{48}$$

On multiplie alors (36) (avec $k = k_i$ et $\mathcal{T} = \mathcal{T}_i$) par $\varphi(x,t_n)$, avec une fonction donnée $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2\times[0,T[,\mathbb{R}_+)$ et on passe à la limite quand $i \to \infty$ en utilisant, en particulier, (44).

Pour conclure à la convergence da *uapp* vers la solution entropique de (29)-(30), nous avons besoin du théorème d'unicité suivant (voir [9], des théorèmes similaires sont dans [5],[20]) :

Sous les hypothèses (31)-(35), il existe une unique solution processus entropique μ de (29)-(30) (c.a.d. satisfaisant (47)). De plus, il existe une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R}^2\times]0,T[)$ t.q. $u(x,t) = \mu(x,t,\alpha)$, p.p. en $(x,t,\alpha) \in \mathbb{R}^2\times]0,T[\times]0,1[$. La fonction u est donc l'unique solution faible entropique de (29)-(30).

Nous pouvons maintenant conclure. On suppose que les hypothèses (31)-(35) sont satisfaites. Soit u l'unique solution faible entropique de (29)-(30). Soit $(k,\mathcal{T})$ satisfaisant (39)-(41) (α, β, et ζ sont fixés). On définit $u_{\mathcal{T},k}$ par (36)-(38). Le théorème d'unicité précédent permet alors de montrer que $u_{\mathcal{T},k} \to u$, dans $L^p_{loc}(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}_+)$ pour tout $p \in [1,\infty[$, quand $h \to 0$.

Noter que la méthode étudiée ici permet aussi de démontrer l'existence et l'unicité de la solution faible entropique de (29)-(30) (cf. [9]).
des résultats similaires de convergence ont été obtenus par d'autres auteurs ([4], [20]).
Lorsque u_O est à variation bornée, on peut également (avec des idées semblables à celles exposées ci desssus) obtenir des estimations sur la vitesse de convergence (voir, par exemple, [22]).

Références

[1] Aziz, K., Settari, A. : Petroleum Reservoir Simulation, Applied Science Publishers (1980).

[2] Champier S., Gallouët T. , Herbin R. : Convergence of an Upstream finite volume Scheme on a Triangular Mesh for a Nonlinear Hyperbolic Equation, Numer. Math. 66, 139-157 (1993).
[3] Chavent G., Jaffré J.: Mathematical Models and Finite Element for Reservoir Simulation, Studies in Mathematics and its Applications, North Holland (1990).
[4] Coquel F., Le Floch P. : The finite volume method converges for general conservation laws on general triangulations, Preprint, Courant Institute, New York University (1991).
[5] DiPerna R. : Measure-Valued Solutions to Conservation Laws, Arch. Rat. Mech. Anal., 88, 223-270 (1985).
[6] Eymard R. : Application à la simulation de réservoir des méthodes volumes-éléments finis ; problèmes de mise en oeuvre, Cours CEA-EDF-INRIA (1992).
[7] Eymard R., Gallouët T. : Convergence d'un schéma de type éléments finis - volumes finis pour un système formé d'une équation elliptique et d'une équation hyperbolique, M2AN, 27, 7, 843-861 (1993).
[8] Eymard R., Gallouët T. : Traitement des changements de phase dans la modélisation de gisements pétroliers, Journées numériques de Besançon (1991).
[9] Eymard, R., Gallouët, T., Herbin, R. : Existence de la solution entropique d'une équation hyperbolique obtenue par un schéma numérique - unicité de la solution. soumis pour publication (1994).
[10] Eymard, R., Gallouët, T., Herbin, R. : Méthodes de volumes finis pour les équations hyperboliques non-linéaires, Cours de l'Institut Galilée - Université Paris-Nord (1994).
[11] Kruzkov S.N. : First Order quasilinear equations with several space variables, Math. USSR. Sb. 10, 217-243 (1970).
[12] Faille I. : Modélisation Bidimensionnelle de la Genèse et la Migration des Hydrocarbures dans un Bassin Sédimentaire, thèse de l'université de Grenoble, France (1992) ; voir également : A control volume method to solve an elliptic equation on a 2D irregular meshing, accepté pour publication dans Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.
[13] Gallouët T. Herbin R. : A Uniqueness Result for Measure Valued Solutions of a Nonlinear Hyperbolic Equations, accepté pour publication dans Journal of Diff. Int. Equations.
[14] Ghilani, M., Eymard, R. : Convergence d'un schéma implicite de type éléments finis - volumes finis pour un système formé d'une équation elliptique et d'une équation hyperbolique, soumis pour publication (1994).
[15] Harten A. : On a Class of High Resolution Total-Variation-Stable Finite-Difference Schemes, J. Comput. Phys. 49, 357 (1983).
[16] Herbin R. : Implementation of the finite volume method for the numerical simulation of a planar SOFC, comparison with a finite element method, Cours CEA-EDF-INRIA (1992).
[17] Herbin R. : An error estimate for a finite volume scheme for a diffusion convection problem on a triangular mesh, en préparation (1994).
[18] Sanders R. : On the Convergence of Monotone Finite Difference Schemes with Variable Spatial Differencing, Math. Comp., 40, 161, 91-106 (1983).
[19] Sonier, F., Eymard, R. : Mathematical and numerical properties of control-volume finite-element scheme for reservoir simulation, SPE 25267, 12ème SPE symposium on reservoir simulation, La Nouvelle Orléans (1993).
[20] Szepessy A. : An Existence Result for Scalar Conservation Laws Using Measure Valued Solutions, Comm. P.D.E., 14(10), 1329-1350 (1989).
[21] Vignal, M.H. : En préparation.
[22] Vila, J.P. : Convergence and error estimate in finite volume schemes for general multidimensional conservation laws, I. explicit monotone schemes, M2AN, 28, 3, 267-285 (1994).