PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Équations de champs scalaires euclidiens non linéaires dans le plan.* Note (*) de **Henri Berestycki, Thierry Gallouët** et **Otared Kavian,** présentée par Laurent Schwartz.

On étudie dans cette Note l'équation de champ scalaire euclidien $-\Delta u = g(u)$ dans $\mathbb{R}^2$, $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, $u \not\equiv 0$. Sous des hypothèses très générales sur $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, nous montrons l'existence d'un état fondamental (solution d'action minimale) et d'une infinité de solutions à symétrie sphérique pour ce problème. La démonstration repose essentiellement sur des arguments de type Ljusternik-Schnirelman.

MATHEMATICAL PHYSICS. — Nonlinear Euclidean Scalar Field Equations in the Plane.

In this Note we investigate the equation $-\Delta u = g(u)$ in $\mathbb{R}^2$, $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, $u \not\equiv 0$. Under very general assumptions on $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, we establish the existence of a ground state (a solution with minimal action) and of infinitely many solutions of this equation having spherical symmetry. The proof essentially relies on Ljusternik-Schnirelman type arguments.

1. Introduction et résultats principaux. — Nous étudions ici le problème :

$$-\Delta u = g(u) \quad \text{dans } \mathbb{R}^2, \qquad u \in H^1(\mathbb{R}^2), \quad u \not\equiv 0. \tag{1}$$

On note $G(z) = \int_0^z g(s)\, ds$ et on suppose que g vérifie les conditions suivantes :

$$g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad g(-s) = -g(s), \qquad \forall s \in \mathbb{R}, \tag{g.0}$$

$$\exists \zeta > 0, \quad G(\zeta) > 0, \tag{g.1}$$

$$\lim_{s \to 0} g(s)/s = -m < 0, \tag{g.2}$$

$$\forall \alpha > 0, \quad \exists C_\alpha > 0, \qquad g(s) \leqq C_\alpha \exp(\alpha s^2), \qquad \forall s \geqq 0. \tag{g.3}$$

Enfin, pour $w \in H^1(\mathbb{R}^2)$, on note :

$$S(w) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla w|^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^2} G(w)\, dx.$$

Les deux résultats principaux sont :

Théorème 1. — *Soit g vérifiant* (g.0)-(g.3). *Il existe une solution $u > 0$ de l'équation* (1) *vérifiant en outre : u est à symétrie sphérique, décroissante, $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ et u satisfait $0 < S(u) \leqq S(w)$, pour tout w solution de* (1).

Théorème 2. — *Soit g vérifiant* (g.0)-(g.3). *Il existe une infinité de solutions $u_k \in C^2(\mathbb{R}^2)$ de l'équation* (1), ($k \in \mathbb{N}^*$) *à symétrie sphérique et telles que $S(u_k) \to +\infty$ quand $k \to +\infty$.*

Des résultats analogues pour l'équation (1) dans $\mathbb{R}^N$ avec $N \neq 2$ ont été obtenus par S. Coleman, V. Glazer et A. Martin [1] (pour l'existence d'un état fondamental) et par H. Berestycki et P. L. Lions ([2], [3]). En particulier, pour $N \geqq 3$, l'hypothèse (g.3) est remplacée par $\overline{\lim}_{s \to \infty} g(s)/s^l \leqq 0$ où $l = (N+2)/(N-2)$. Comme cela est indiqué dans [1] et [3] les méthodes des ces travaux *ne s'appliquent pas* au cas $N = 2$. Cependant, les démonstrations que nous donnons ci-dessous sont à rapprocher — dans leur esprit — de celles de [2] et [3]. Signalons enfin que M. J. Esteban [4] a obtenu des résultats analogues au théorème 2 sous des hypothèses plus restrictives sur g.

Remarque 1. — Il est classique (Identité de Pohozaev; *cf.* [3] par exemple) que si $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifie (g.2)-(g.3) et si u est solution de (1), on a alors :

$$\int_{\mathbb{R}^2} G(u)\,dx = 0. \tag{2}$$

On voit donc que l'hypothèse (g.1) est *nécessaire*. ■

Remarque 2. — D'autre part, l'hypothèse (g.3) est presque nécessaire en ce sens que si g est continue, $g(0)=0$ et $g'(0)>0$, alors (1) n'admet aucune solution à symétrie sphérique (*voir* [5]). On peut encore améliorer dans le théorème 1 l'hypothèse (g.2) et la remplacer par :

$$\exists \zeta_0 > 0, \quad G(z) < 0, \qquad \forall z \in]0, \zeta_0[. \tag{g.2'}$$

La démonstration est analogue à celle que nous indiquons ci-dessous en ajoutant un argument de symétrie et compacité de [6] que nous a signalé P. L. Lions. D'autre part, une autre démonstration du théorème 1 sous des hypothèses générales a été également obtenue indépendamment par P. L. Lions comme application de sa méthode de « concentration-compacité ». ■

Remarque 3. — Quant à l'hypothèse (g.3), nous ignorons si elle est nécessaire. Cette hypothèse intervient pour des raisons de définition des fonctionnelles et des propriétés de compacité (inégalité de Moser-Trudinger). Elle ne se justifie cependant que par analogie avec le cas $N \geqq 3$. ■

Nous renvoyons le lecteur à l'introduction de [2] et de [5] pour les motivations physiques sous-jacentes à l'équation (1). Nous esquissons ci-dessous les démonstrations des théorèmes 1 et 2. On trouvera les démonstrations détaillées dans [5].

2. Existence d'un état fondamental. — La démonstration du théorème 1 repose sur la résolution du problème variationnel :

$$\text{Minimiser} \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2\,dx,\ v \in M \right\}, \tag{3}$$

où $M = \left\{ v \in H^1(\mathbb{R}^2);\ v \not\equiv 0,\ \int G(v) = 0 \right\}$. On notera en effet que toute solution de (1) appartient à M (remarque 1 ci-dessus). La démonstration se subdivise en quatre étapes.

Étape 1 : $M \neq \emptyset$. — Ceci découle de (g.1)-(g.2).

Étape 2 : *Sélection d'une suite minimisante*. — Soit $(u_n)_n \subset H^1(\mathbb{R}^2)$ une suite minimisante pour (3). Par un argument classique de symétrisation on peut supposer que $u_n \geqq 0$ et u_n est à symétrie sphérique, décroissante. En outre, par un changement d'échelles, on peut se ramener à $\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1$.

Étape 3 : *Passage à la limite*. — Après extractions de sous-suites, on peut supposer que $u_n \to u$ dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ faiblement et $u_n \to u$ p.p. Posons $G_1(s) = G(s) + (m/2)s^2$. A l'aide de l'inégalité de Trudinger-Moser et d'un lemme de compacité (*voir* W. A. Strauss [7]) on a alors :

$$\int_{\mathbb{R}^2} G_1(u_n)\,dx \to \int_{\mathbb{R}^2} G_1(u)\,dx.$$

Puisque $u_n \in M$, on en déduit :

$$\int G_1(u) = \frac{m}{2} > 0.$$

En particulier $u \not\equiv 0$. D'autre part, on a :

$$\int |\nabla u|^2 \leqq \inf_{v \in M} \int |\nabla v|^2$$

et, comme $\int u^2 \leqq 1$, on a $\int G(u) \geqq 0$.

En considérant les fonctions θu, $\theta \in]0, 1[$, on montre facilement que les inégalités précédentes sont des égalités et, par conséquent, que u est solution de (3).

Étape 4 : *Conclusion.* — Il existe donc un multiplicateur de Lagrange λ tel que $-\Delta u = \lambda g(u)$, $u \in M$. Par la remarque 2 ci-dessus, il est clair que $\lambda \geqq 0$ et — puisque $u \not\equiv 0$ — que $\lambda > 0$. On remarque enfin que la fonction $v(x) = u(x/\sqrt{\lambda})$ vérifie (1) et est également solution de (3). C'est donc un état fondamental de (1). ■

3. Existence d'une infinité de solutions. — La démonstration du théorème 2 est plus délicate que celle du théorème 1. Par conséquent nous n'indiquerons ici que les principales étapes de la démonstration. Dans la suite on note $H = H_r^1 = \{ u \in H^1(\mathbb{R}^2),\ u$ est à symétrie sphérique$\}$. Pour $u \in H$, on pose :

$$T(u) = \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2\, dx \qquad \text{et} \qquad V(u) = \int_{\mathbb{R}^2} G(u)\, dx.$$

Dans un premier temps, pour des raisons techniques on impose la condition supplémentaire :

(g.4) $\qquad g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\forall \alpha > 0, \ \exists C_\alpha > 0, \qquad |g'(s)| \leqq C_\alpha e^{\alpha s^2}, \qquad \forall s \in \mathbb{R}$

(*cf.* remarque 6 ci-dessous pour une indication sur le cas général).

La démonstration du théorème 2 consiste essentiellement à chercher des points critiques de T sur $N = \{ u \in H,\ V(u) \geqq 0,\ \|u\|_{L^2} = 1 \}$.

Expliquons heuristiquement l'idée : Si $u \in N$ est un point critique de T sur N, on a soit $V(u) = 0$, soit $V(u) > 0$. Le cas $V(u) > 0$ est exclu car dans ce cas il doit exister un multiplicateur de Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $-\Delta u = \lambda u$, ce qui est impossible car $u \not\equiv 0$. On a donc $V(u) = 0$, et il existe deux multiplicateurs de Lagrange $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $-\Delta u = \lambda g(u) + \mu u$, en utilisant l'identité de Pohožaev (*cf.* remarque 1) on en déduit (comme $V(u) = 0$ et $\|u\|_{L^2} = 1$) $\mu = 0$, puis en raisonnant comme dans l'étape 4 du paragraphe 2, qu'il existe v solution de (1) avec $T(v) = T(u)$ [on notera en effet que pour tout $\sigma > 0$ on a $T(u(\sigma .)) = T(u)$].

Pour démontrer le théorème 2, il suffit donc de prouver l'existence d'une suite $\{ c_k, k \in \mathbb{N}^* \}$ **de valeurs critiques de T sur N avec $c_k \to +\infty$ quand $k \to +\infty$. (On rappelle que c est valeur critique de T sur N s'il existe u point critique de T sur N tel que $T(u) = c$.)**

La démonstration de l'existence de la suite $\{ c_k, k \in \mathbb{N}^* \}$ requiert plusieurs étapes. On notera VC l'ensemble des valeurs critiques de T sur N.

***Étape* 1. — *Condition de « Palais-Smale » modifiée.* Dans cette étape l'hypothèse (g. 4) est inutile. On démontre les deux propriétés suivantes :**

Lemme 1. — *Si $c \in$ VC, il existe $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ et $a > 0$ tels que pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u \in N$ on a :*

$$|T(u) - c| \leqq \varepsilon, \qquad 0 \leqq V(u) \leqq a \quad \Rightarrow \quad \|T'(u) + \alpha g(u) + \beta u\|_{H'} \geqq \delta.$$

LEMME 2. — *Pour tout* $R>0$, *il existe* $\delta>0$ *tel que pour tout* $\alpha\in\mathbb{R}$, $u\in N$, *on a :*

$$T(u)\leq R \quad \Rightarrow \quad \|T'(u)+\alpha u\|_{H'}\geq\delta.$$

La démonstration de ces deux lemmes se fait en raisonnant par contradiction. On utilise en particulier le lemme de compacité déjà utilisé à l'étape 3 du paragraphe 2. Ce lemme permet d'affirmer que si la suite $\{u_n, n\in\mathbb{N}\}$ est bornée dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ et si $u_n\to u$ p.p. on a $G_1(u_n)\to G_1(u)$ et $g_1(u_n)u_n\to g_1(u)u$ dans $L^1(\mathbb{R}^2)$ avec $g_1(s)=g(s)+ms$.

Remarque 4. — C'est en vue de l'étape ci-dessus que l'on a introduit dans la définition de N la contrainte $\|u\|_{L^2}=1$. En effet, il est évident que la fonctionnelle T ne vérifie pas de conditions de type « Palais-Smale » sur $\{u\in H, V(u)\geq 0\}$ [ni même sur $\{u\in H, V(u)=0\}$].

Étape 2. — *Lemme de déformation.* — On utilise ici l'hypothèse (g.4) [qui donne $V\in C^1(H, \mathbb{R})$]. Il est alors essentiellement classique de démontrer — en utilisant l'étape 1 — que si $c>0$, $c\notin VC$, il existe $\varepsilon>0$ et $\eta : N\to N$ continue impaire tels que :

$$\eta(\{u\in N, T(u)\leq c+\varepsilon\})\subset\{u\in N, T(u)\leq c-\varepsilon\}.$$

Étape 3. — *Existence de* c_k, *avec* $c_k\to+\infty$ *quand* $k\to+\infty$.

Pour $k\in\mathbb{N}^*$ on pose $\Sigma_k=\{B\subset N, B \text{ compact}, B=-B, \gamma(B)\geq k\}$, où γ désigne le genre de B. Il est clair que $\Sigma_{k+1}\subset\Sigma_k$, pour tout $k\geq 1$. En adaptant une méthode de [3], § 9.2, th. 10, on montre que $\Sigma_k\neq\emptyset$ pour $k\geq 1$. D'autre part, il est classique que si H_k est un sous-espace de dimension $\leq k$, on a pour tout $B\in\Sigma_{k+1}$, $B\cap H_k^\perp\neq\emptyset$. Ces propriétés et l'étape 2 permettent de montrer que $0<c_k=\operatorname*{Inf}_{B\in\Sigma_k}\operatorname*{Max}_{u\in B}T(u)\to+\infty$ quand $k\to+\infty$ et $c_k\in VC$ pour tout $k\geq 1$. Ceci conclut la démonstration.

Remarque 5. — En vue de cette étape on a introduit dans la définition de N la contrainte $V(u)\geq 0$ [au lieu de $V(u)=0$]. En effet avec $V(u)=0$ dans la définition de N il semble délicat de montrer que $\Sigma_k\neq\emptyset$ pour tout $k\geq 1$.

Remarque 6. — Si g vérifie seulement (g.0)-(g.3), on procède par approximation. On construit une suite de fonctions g_n vérifiant (g.0)-(g.4) et une fonction $\bar{g}$ vérifiant (g.0)-(g.3) telles que $\bar{g}(s)\leq g_n(s)\leq g(s)$ pour tout $s\geq 0$, $\bar{g}'(0)\leq g_n'(0)\leq g'(0)$ et, quand $n\to+\infty$, $g_n'(0)\to g'(0)$; $g_n\to g$ uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}$. En utilisant les résultats précédents pour g_n, et en passant à la limite sur n on démontre alors le théorème 2.

***Remarque* 7. — Il est vraisemblable qu'en utilisant une technique analogue à celle de H. Berestycki-P. L. Lions [8], on puisse améliorer la condition (g. 2) dans le théorème 2.**

(*) Remise le 20 juin 1983, acceptée le 27 juin 1983.

[1] S. COLEMAN, V. GLAZER et A. MARTIN, *Comm. Math. phys.*, 58, (2), 1978, p. 211-221.

[2] H. BERESTYCKI et P. L. LIONS, *Comptes rendus*, 287, série A, 1978, p. 503 et 288, série A, 1979, p. 395.

[3] H. BERESTYCKI et P. L. LIONS, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 82, 1983, 313-345 et 347-375.

[4] M. ESTEBAN, *Ann. Fac. Sc. Toulouse*, II, 1980, p. 181-191.

[5] H. BERESTYCKI, T. GALLOUËT et O. KAVIAN, *Semilinear Elliptic Problems in* $\mathbb{R}^2$ (à paraître).

[6] P. L. LIONS, *J. Funct. Anal.*, 49, 1982, p. 315-334.

[7] W. A. STRAUSS, *Comm. Math. phys.*, 55, 1977, p. 149-162.

[8] H. BERESTYCKI et P. L. LIONS, *Comptes rendus*, 297, série I, 1983, p. 267.

Analyse Numérique, Université Pierre-et-Marie-Curie,
Tour 55-65, 4, *place Jussieu*, 75230 *Paris Cedex* 05.