Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Unicité de la solution de certaines équations elliptiques non linéaires

Lucio BOCCARDO, Thierry GALLOUËT et François MURAT

Résumé – Quand $1<p\leqq 2$ on montre l'unicité de la solution d'équations elliptiques non linéaires du type

$$u\in W_0^{1,p}(\Omega); \qquad -\operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du+\varphi(u))=f.$$

Quand $p>2$, on donne un contre-exemple au résultat d'unicité.

Uniqueness of the solution of some nonlinear elliptic equations

Abstract – *We prove the uniqueness of the solution of nonlinear elliptic equations of the type* $(1<p\leqq 2)$

$$u\in W_0^{1,p}(\Omega); \qquad -\operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du+\varphi(u))=f.$$

When $p>2$, we give a counterexample to the uniqueness result.

Abridged English Version – In this Note we address the problem of the uniqueness of the solution of

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, u, Du))+\lambda|u|^{p-2}u=f, \\ u\in W_0^{1,p}(\Omega), \end{cases}$$

where $f\in W_0^{-1,p'}(\Omega)$, $\lambda\geqq 0$, and a is a Carathéodory function which defines a Leray-Lions operator on $W_0^{1,p}(\Omega)$; a is assumed to be "strongly monotone in Du" and locally lipschitz continuous in u. More precisely one has for a. e. $x\in\Omega$, and for all $(x, t, \xi, \eta)\in\mathbb{R}^{2+2N}$:

$$\exists\alpha>0 \quad \text{such that} \quad (a(x, s, \xi)-a(x, s, 0))\,\xi\geqq\alpha|\xi|^p, \tag{1}$$

$$\exists\beta>0, \quad \exists k\in L^{p'}(\Omega) \quad \text{such that} \quad |a(x, s, \xi)|\leqq\beta(k(x)+|s|^{p-1}+|\xi|^{p-1}), \tag{2}$$

$$\exists\gamma>0 \quad \text{such that} \quad (a(x, s, \xi)-a(x, s, \eta))(\xi-\eta)\geqq\gamma(|\xi|^{p-2}+|\eta|^{p-2})|\xi-\eta|^2, \tag{3}$$

$$\begin{cases} \exists\delta>0, \quad \exists h\in L^{p'}(\Omega) \quad \text{such that} \\ |a(x, s, \xi)-a(x, t, \xi)|\leqq\delta|s-t|(h(x)+|\xi|^{p-1}+|s|^{p-1}+|t|^{p-1}). \end{cases} \tag{4}$$

A model of such a function is given by $a(x, u, Du)=|Du|^{p-2}Du+\varphi(u)$, with φ lipschitz continuous.

We prove in the Theorem that the solution of the above problem is unique when $1<p\leqq 2$ and $\lambda\geqq 0$ (*see* the proof in Section 2). The uniqueness result still holds for $2<p<\infty$ and $\lambda>0$ (*see* the proof at the end of Section 2), but fails for $2<p<\infty$ and $\lambda=0$. Indeed, in this case we provide in Section 3 a one-dimensional example with an infinite number of solutions.

1. INTRODUCTION. – Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N\geqq 1$, et $1<p<+\infty$ $(p'=p/(p-1))$. On se donne une fonction de Carathéodory $a:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ vérifiant les hypothèses suivantes [p.p. en $x\in\Omega$ et $\forall(s, t, \xi, \eta)\in\mathbb{R}^{2+2N}$] :

$$\exists\alpha>0 \quad \text{tel que} \quad (a(x, s, \xi)-a(x, s, 0))\,\xi\geqq\alpha|\xi|^p, \tag{1}$$

$$\exists\beta>0, \quad \exists k\in L^{p'}(\Omega) \quad \text{tels que} \quad |a(x, s, \xi)|\leqq\beta(k(x)+|s|^{p-1}+|\xi|^{p-1}), \tag{2}$$

Note présentée par Jacques-Louis LIONS.

0764-4442/92/03151159 $ 2.00 © Académie des Sciences

(3) $\exists\gamma>0$ tel que $(a(x, s, \xi)-a(x, s, \eta))(\xi-\eta)\geqq\gamma(|\xi|^{p-2}+|\eta|^{p-2})|\xi-\eta|^2$,

(4) $$\begin{cases} \exists\delta>0, \quad \exists h\in L^{p'}(\Omega) \quad \text{tels que} \\ |a(x, s, \xi)-a(x, t, \xi)|\leqq\delta|s-t|(h(x)+|\xi|^{p-1}+|s|^{p-1}+|t|^{p-1}). \end{cases}$$

Les hypothèses (1) et (2) sont classiques. Elles permettent, avec l'hypothèse de stricte monotonie par rapport à ξ

(5) $$(a(x, s, \xi)-a(x, s, \eta))(\xi-\eta)>0, \qquad \forall\xi\neq\eta,$$

[qui est plus faible que (3)], de montrer (*voir* [4]) l'existence de u vérifiant

(6) $$u\in W_0^{1,p}(\Omega); \qquad \int_\Omega a(x, u, Du)D\varphi=\langle f, \varphi\rangle, \quad \forall\varphi\in W_0^{1,p}(\Omega),$$

où f est donnée dans $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Nous montrons ici l'unicité de cette solution lorsque $p\leqq 2$ quand a vérifie (3) et (4).

Théorème. — *Si* $1<p\leqq 2$ *et* a *vérifie* (1)-(4), *alors la solution* u *de* (6) *est unique.*

Ce théorème est déjà connu si $p=2$ quand la fonction a est linéaire par rapport à ξ (*voir* [1]). Nous le démontrons pour $p\leqq 2$ au paragraphe 2.

Le résultat d'unicité énoncé dans le théorème est faux pour $p>2$ et nous donnons un contre-exemple au paragraphe 3. Ce résultat d'unicité reste cependant vrai si on ajoute un terme strictement monotone (par exemple $\lambda|u|^{p-2}u$, $\lambda>0$) au premier membre de l'équation (*voir* [3]).

Un exemple modèle pour lequel le théorème énoncé ci-dessus s'applique consiste à prendre $a(x, s, \xi)=b(s)|\xi|^{p-2}\xi+\varphi(s)$, avec $b(s)\geqq\alpha>0$ et b et φ lipschitziennes.

Remarque 1. — L'hypothèse (3) est cruciale dans notre démonstration. Elle est bien vérifiée pour tout $p>1$ pour l'exemple $a(x, s, \xi)=b(s)|\xi|^{p-2}\xi+\varphi(s)$ si $b(s)\geqq\gamma/(p-1)$, $\forall s\in\mathbb{R}$.

Par contre, l'hypothèse

(7) $$\exists\gamma>0 \quad \text{tel que} \quad (a(x, s, \xi)-a(x, s, \eta))(\xi-\eta)\geqq\gamma|\xi-\eta|^p$$

n'est jamais satisfaite pour $1<p<2$. En effet, supposons que a vérifie (1) et (7) et que $1<p<2$. Soit $(x, s)\in\Omega\times\mathbb{R}$ tel que $\xi\to a(x, s, \xi)$ soit continue. Pour $t\in\mathbb{R}$ on pose $d(t)=a_1(x, s, \xi)$, où $\xi=(t, 0, \ldots, 0)$ et où a_1 désigne la première composante de a. La fonction d est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et vérifie $(d(t)-d(t'))(t-t')\geqq\gamma|t-t'|^p$ pour $(t, t')\in\mathbb{R}^2$. Pour t_n définie par $t_0=0$, $t_n=t_{n-1}+\alpha_n$, avec $\alpha_n=(1/n)^{1/(p-1)}$, on a donc

$$d(t_n)-d(t_{n-1})\geqq\gamma\alpha_n^{p-1}.$$

On en déduit, avec $t^*=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$, par continuité de d,

(8) $$d(t^*)-d(0)\geqq\gamma\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^{p-1}=+\infty,$$

ce qui est impossible.

Remarque 2. — On peut également montrer (*voir* [5]) des résultats d'unicité de la solution « renormalisée » de l'équation

$$u\in W_0^{1,p}(\Omega); \qquad -\operatorname{div}(a(x, u, Du))-\operatorname{div}\varphi(u)+\lambda u=f.$$

2. Démonstration du théorème. — On suppose que u_1 et u_2 sont deux solutions de (6). On en déduit

$$(9)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega (a(x, u_1, Du_1)-a(x, u_1, Du_2))\,D\varphi=\int_\Omega (a(x, u_2, Du_2)-a(x, u_1, Du_2))\,D\varphi, \\ \qquad\qquad \forall\, \varphi\in W_0^{1, p}(\Omega). \end{cases}$$

On pose $v=u_1-u_2$, et, pour $\varepsilon>0$, on prend dans (9) $\varphi=T_\varepsilon(v)$ avec $T_\varepsilon:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$T_\varepsilon(s)=s, \qquad \text{si } |s|\leqq\varepsilon$$
$$T_\varepsilon(s)=\varepsilon\frac{s}{|s|}, \qquad \text{si } |s|>\varepsilon.$$

En remarquant que $DT_\varepsilon(v)=Dv$ sur $A_\varepsilon=\{x\in\Omega: 0<|v(x)|\leqq\varepsilon\}$ et $DT_\varepsilon(v)=0$ ailleurs, on obtient, avec (3) et (4),

$$(10)\quad \gamma\int_{A_\varepsilon}(|Du_1|^{p-2}+|Du_2|^{p-2})|Dv|^2 \leqq\delta\int_{A_\varepsilon}|v|(h(x)+|Du_2|^{p-1}+|u_1|^{p-1}+|u_2|^{p-1})|Dv|.$$

L'inégalité (10) est encore vraie en changeant u_1 en u_2 et u_2 en u_1. On en déduit

$$(11)\quad \gamma\int_{A_\varepsilon}(|Du_1|^{p-2}+|Du_2|^{p-2})|Dv|^2 \leqq\delta\int_{A_\varepsilon}|v|\left(\frac{|Du_1|^{p-1}+|Du_2|^{p-1}}{2}+h(x)+|u_1|^{p-1}+|u_2|^{p-1}\right)|Dv|.$$

Pour $i=1,2$ on peut écrire, pour $c_1, c_2, \ldots$, ne dépendant que de δ et γ,

$$\delta|v|\frac{|Du_i|^{p-1}}{2}|Dv|\leqq\frac{\gamma}{6}|Du_i|^{p-2}|Dv|^2+c_1|v|^2|Du_i|^p$$

$$\delta|v||h||Dv|\leqq\frac{\gamma}{6}|Du_i|^{p-2}|Dv|^2+c_2|v|^2|h|^2|Du_i|^{2-p}$$

$$\delta|v||u_i|^{p-1}|Dv|\leqq\frac{\gamma}{6}|Du_i|^{p-2}|Dv|^2+c_3|v|^2|u_i|^{2(p-1)}|Du_i|^{2-p}.$$

En utilisant ces inégalités, on déduit de (11)

$$(12)\quad \frac{\gamma}{6}\int_{A_\varepsilon}(|Du_1|^{p-2}+|Du_2|^{p-2})|Dv|^2\leqq\int_{A_\varepsilon}|v|^2c_4\psi_1\leqq c_4\varepsilon^2\int_{A_\varepsilon}\psi_1$$

avec

$$\psi_1=|Du_1|^p+|Du_2|^p+|h|^2|Du_1|^{2-p}+|h|^2|Du_2|^{2-p} +|u_1|^{2(p-1)}|Du_1|^{2-p}+|u_2|^{2(p-1)}|Du_2|^{2-p}.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a, avec $\psi_2=(|Du_1|^{p-2}+|Du_2|^{p-2})^{-1}$,

$$(13)\quad \int_\Omega|DT_\varepsilon(v)|=\int_{A_\varepsilon}|Dv|\leqq\left(c_5\varepsilon^2\int_{A_\varepsilon}\psi_1\right)^{1/2}\left(\int_{A_\varepsilon}\psi_2\right)^{1/2}.$$

On remarque maintenant que ψ_1, $\psi_2\in L^1(\Omega)$. En effet, comme $u_i\in W_0^{1, p}(\Omega)$, on a $|Du_i|^p\in L^1(\Omega)$ et $|Du_i|^{2-p}\in L^1$, car $0\leqq 2-p<p$ (on utilise ici l'hypothèse $1<p\leqq 2$). Ceci montre que $\psi_2\in L^1(\Omega)$ puisque $\psi_2\leqq|Du_1|^{2-p}$. Pour montrer que $\psi_1\in L^1(\Omega)$, il reste à

vérifier que $|u_i|^{2(p-1)}|Du_i|^{2-p}\in L^1(\Omega)$, et $h^2|Du_i|^{2-p}\in L^1(\Omega)$, ce qui est immédiat car $h^2\in L^{p'/2}(\Omega)$ et $u_i^{2(p-1)}\in L^{p'/2}(\Omega)$ et $(2/p')+((2-p)/p)=1$.

Comme $\bigcap_{\varepsilon>0} A_\varepsilon=\{x\in\Omega : 0<|v(x)|\leqq 0\}=\varnothing$, la continuité décroissante de la mesure montre que mes $A_\varepsilon\to 0$, quand $\varepsilon\to 0$. On en déduit que

$$\int_{A_\varepsilon}\psi_i\to 0\quad\text{quand }\varepsilon\to 0.$$

D'où, avec (13), pour $\varepsilon<\delta$ (δ fixé) [en utilisant $c_0\|\varphi\|_1\leqq\|D\varphi\|_1$, $\forall\varphi\in W_0^{1,1}(\Omega)$]

$$c_0\,\text{mes}\{x\in\Omega : |v(x)|\geqq\delta\}\leqq\frac{c_0}{\varepsilon}\int_\Omega|T_\varepsilon(v)|\leqq\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega|DT_\varepsilon(v)|\to 0.$$

Ceci prouve que $v=0$ p. p., *i. e.* que $u_1=u_2$.

Remarque 3. — Si on considère l'équation

$$u\in W_0^{1,p}(\Omega);\qquad -\text{div}\,(a(x,u,Du))+\lambda|u|^{p-2}u=f,\tag{14}$$

avec $\lambda>0$ et $1<p\leqq 2$ la démonstration est la même car la contribution du terme $\lambda\int_\Omega(|u_1|^{p-2}u_1-|u_2|^{p-2}u_2)T_\varepsilon(v)$ est positive.

Si $p>2$ la présence du terme $\lambda|u|^{p-2}u$ permet de démontrer l'unicité de la solution de (14) (*voir* [3]), car, avec le même choix de la fonction test $T_\varepsilon(v)$, et les mêmes notations que précédemment, on déduit, au lieu de (10),

$$\gamma\int_{A_\varepsilon}(|Du_1|^{p-2}+|Du_2|^{p-2})|Dv|^2+\lambda\int_\Omega(|u_1|^{p-2}u_1-|u_2|^{p-2}u_2)T_\varepsilon(v)\leqq\delta\int_{A_\varepsilon}|v|(|Du_2|^{p-1}+|u_1|^{p-1}+|u_2|^{p-1}+h(x))|Dv|.\tag{15}$$

En remarquant que $|Dv|\in L^p(\Omega)$ et $(|Du_2|^{p-1}+|u_1|^{p-1}+|u_2|^{p-1}+h)\in L^{p'}(\Omega)$ on a donc

$$\lambda\varepsilon\int_{B_\varepsilon}||u_1|^{p-2}u_1-|u_2|^{p-2}u_2|\leqq\delta\varepsilon\int_{A_\varepsilon}\psi_3\tag{16}$$

où

$B_\varepsilon=\{x\in\Omega : |v(x)|\geqq\varepsilon\}$ et $\psi_3=(|Du_2|^{p-1}+|u_1|^{p-1}+|u_2|^{p-1}+h)|Dv|\in L^1(\Omega)$.

En faisant tendre ε vers zéro dans (16) on déduit que (comme $\lambda>0$ et mes $A_\varepsilon\to 0$)

$$\int_\Omega||u_1|^{p-2}u_1-|u_2|^{p-2}u_2|=0$$

et donc $u_1=u_2$ p. p. dans Ω.

3. Contre-exemple à l'unicité. — Sous les hypothèses du théorème avec $p>2$, au lieu de $1<p\leqq 2$, le résultat d'unicité est faux. On donne ici un exemple avec $N=1$. Cet exemple, inspiré d'un exemple de [2], est simplement construit à partir de la non unicité, pour $0<\alpha<1$, de la solution de l'équation différentielle

$$v'(x)=|v(x)|^\alpha,\qquad v(0)=0.\tag{17}$$

Pour tout $c \in \mathbb{R}^+$, la fonction $v(x) = ((1-\alpha)(x-c)^+)^{1/(1-\alpha)}$ est solution de (17). Soit $p > 2$, on pose $\alpha = 1/(p-1)$. On prend

$$\Omega =]-1, 2+2/(1-\alpha)[\qquad \text{et} \qquad a(x, s, \xi) = |\xi|^{p-2}\xi + \varphi(s)$$

avec

$$(18) \qquad \begin{cases} \varphi(s) = 0, & s \geqq 3 \ \text{ et } \ s \leqq 0, \\ \varphi(s) = 3 - s, & 2 \leqq s < 3, \\ \varphi(s) = 1, & 1 \leqq s < 2, \\ \varphi(s) = s, & 0 < s < 1. \end{cases}$$

La fonction a vérifie bien (1)-(4). On prend f définie par

$$f(x) = -(p-1)(9x^2)^{p-2}\, 18x - 9x^2, \qquad -1 < x < -\left(\frac{2}{3}\right)^{1/3}$$

$$f(x) = -(p-1)(9x^2)^{p-2}\, 18x, \qquad -\left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} < x < -\left(\frac{1}{3}\right)^{1/3}$$

$$f(x) = -(p-1)(9x^2)^{p-2}\, 18x + 9x^2, \qquad -\left(\frac{1}{3}\right)^{1/3} < x < 0$$

$$f(x) = 0, \qquad 0 < x < 2 + \frac{2}{1-\alpha}.$$

Noter que $f \in L^\infty(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega)$. Nous allons expliciter une infinité de solutions distinctes u_0 et u_c $(\in W_0^{1,p}(\Omega))$ de (6). Soit u_0 la fonction définie par :

$$u_0(x) = 3x^3 + 3, \qquad -1 \leqq x \leqq 0,$$

$$u_0(x) = 3 - ((1-\alpha)x)^{1/(1-\alpha)}, \qquad 0 < x \leqq \frac{1}{1-\alpha},$$

$$u_0(x) = -x + \frac{1}{1-\alpha} + 2, \qquad \frac{1}{1-\alpha} < x \leqq 1 + \frac{1}{1-\alpha},$$

$$u_0(x) = \left((1-\alpha)\left(\frac{2}{1-\alpha} + 1 - x\right)\right)^{1/(1-\alpha)}, \qquad 1 + \frac{1}{1-\alpha} < x \leqq 1 + \frac{2}{1-\alpha},$$

$$u_0(x) = 0, \qquad 1 + \frac{2}{1-\alpha} < x \leqq 2 + \frac{2}{1-\alpha}.$$

La fonction u_0 est solution de (6); noter que

$$|u_0'|^{p-1} u_0' + \varphi(u_0) = 0 \qquad \text{si} \quad 0 \leqq x \leqq 2 + 2/(1-\alpha).$$

Pour tout c tel que $0 < c < 1$, soit u_c la fonction définie par :

$$u_c(x) = u_0(x), \qquad -1 \leqq x \leqq 0,$$

$$u_c(x) = 3, \qquad 0 < x \leqq c,$$

$$u_c(x) = u_0(x-c), \qquad c < x \leqq 2 + \frac{2}{1-\alpha}.$$

La fonction u_c est également solution de (6) : nous avons donc construit une infinité de solutions distinctes de (6).

Note remise le 30 mars 1992, acceptée le 23 avril 1992.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] M. ARTOLA, Sur une classe de problèmes paraboliques quasilinéaires, *Boll. Un. Mat. Ital.*, (6), 5-B, 1986, p. 51-70.

[2] J. CARRILLO et M. CHIPOT, On nonlinear elliptic equations involving derivative of the nonlinearity, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 100 A, 1985, p. 281-294.

[3] M. CHIPOT et G. MICHAILLE, Uniqueness results and monotonicity properties for strongly nonlinear elliptic variational inequalities, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, 1989, p. 137-166.

[4] J. LERAY et J.-L. LIONS, Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder, *Bull. Soc. Math. France*, 93, 1965, p. 97-107.

[5] P.-L. LIONS et F. MURAT, Sur les solutions renormalisées d'équations elliptiques non linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris* (à paraître).

L. B. : *Università di Roma I, Dipartimento di Matematica, Piazzale A. Moro* 2, 00185 *Roma;*

T. G. : *Université de Savoie, Département de Mathématiques,* B.P. n° 1104, 73011 *Chambéry Cedex;*

F. M. : *Université Paris-VI, Laboratoire d'Analyse numérique,* Tour 55-65, 4, *place Jussieu,* 75252 *Paris Cedex* 05.