Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*

Quelques résultats sur le problème $-\Delta u=\lambda\, e^{u}$

Thierry GALLOUET, Fulbert MIGNOT et Jean-Pierre PUEL

Résumé — Nous définissons deux classes distinctes de solutions (régulières et singulières) pour le problème $-\Delta u=\lambda\, e^{u}$, $u\in H_0^1(\Omega)$. Nous montrons qu'il n'existe pas de solution singulière pour λ supérieur au paramètre critique λ^*, puis que l'ensemble des solutions régulières est relativement compact dans la classe des solutions singulières. Nous précisons la situation dans une boule en exhibant une solution singulière.

A few results on the equation $-\Delta u=\lambda\, e^{u}$

Abstract — *We define two different classes of solutions (regular and singular) for the problem* $-\Delta u=\lambda\, e^{u}, u\in H_0^1(\Omega)$. *We show there exists no singular solution for* λ *greater than the critical parameter* λ^*, *then that the set of regular solutions is relatively compact in the class of singular solutions. We make the situation precise in the case of a ball, by exhibiting a singular solution.*

I. ÉNONCÉ DU PROBLÈME. — Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbf{R}^N$, $N\geqq 3$, de frontière Γ. Pour $\lambda\in[0, \infty[$ on considère le problème

$$(1)\qquad \begin{cases} -\Delta u=\lambda\, e^{u} & \text{dans } \Omega,\\ u=0 & \text{sur } \Gamma,\end{cases}$$

et on notera $(1)_\lambda$ le problème à λ fixé.

Il est important de définir la classe fonctionnelle dans laquelle on cherche les solutions. Remarquons que si $u\in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ est solution de (1), par itération d'arguments de régularité, $u\in C^\infty(\Omega)$. Une première classe de solutions dites régulières est donc :

$$\mathbf{R}=\{u,\ u\in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega),\ u \text{ vérifie } (1)\}.$$

On peut envisager des solutions de (1) *a priori* non bornées. Pour donner un sens à (1) il semble minimum d'imposer $u\in H_0^1(\Omega)$ et $e^u\in L^1(\Omega)$, l'équation $-\Delta u=\lambda\, e^{u}$ ayant alors lieu dans $\mathscr{D}'(\Omega)$. Nous considérons une deuxième classe de solutions dites « singulières » (contenant bien sûr $\mathbf{R}$)

$$\mathbf{S}=\{u,\ u\in H_0^1(\Omega),\ e^u\in L^1(\Omega),\ u \text{ vérifiant } (1)\}.$$

Remarquons que puisque les solutions de (1) sont positives tout élément de $\mathbf{S}$ appartient à $L^p(\Omega)$ pour tout p fini. En dimension $N=2$, $\mathbf{R}=\mathbf{S}$.

II. RAPPELS. COMPLÉMENTS. — Le problème (1) a été largement étudié dans la classe des solutions régulières depuis l'article de Guelfand [3]. On sait (Crandall-Rabinowitz [1]) qu'il existe $\lambda^*>0$ tel que :

(i) $\forall\lambda$, $\lambda>\lambda^*$ il n'existe pas de solution de (1) dans $\mathbf{R}$.

(ii) $\forall\lambda$, $\lambda\in[0, \lambda^*[$ il existe une solution minimale $\underline{u}(\lambda)\in\mathbf{R}$ de (1), et l'application $[0, \lambda^*[\ni\lambda\to\underline{u}(\lambda)$ est régulière croissante.

(iii) Pour $N\leqq 9$, si λ tend vers λ^*, $\underline{u}(\lambda)$ tend vers u^*, où $u^*\in\mathbf{R}$ est solution de $(1)_{\lambda^*}$ et le point (λ^*, u^*) est un point de retournement. Pour $N\geqq 10$, Joseph-Lundgren [4] ont montré dans le cas où Ω est une boule que $\|\underline{u}(\lambda)\|_{L^\infty}$ tend vers $+\infty$ si λ tend vers λ^*. Pour toute dimension N et Ω régulier il est montré dans Mignot-Puel [5] que $\underline{u}(\lambda)\to u^*$ si $\lambda\to\lambda^*$ où $u^*\in\mathbf{S}$ et est solution de $(1)_{\lambda^*}$. En fait le résultat suivant précise le point (i).

Note présentée par Jacques-Louis LIONS.

0249-6291/88/03070289 $ 2.00

THÉORÈME 1. — *Pour* $\lambda > \lambda^*$ *il n'existe pas de solution de* $(1)_\lambda$ *dans* **S**.

Ce théorème est la conséquence immédiate du

LEMME 1. — *Si le problème* (1) *a une solution* $u_0 \in \mathbf{S}$ *pour* $\lambda = \lambda_0 > 0$, *alors pour tout* $\lambda < \lambda_0$, *il existe* $u \in \mathbf{R}$ *solution de* $(1)_\lambda$.

Schéma de la démonstration. — Soient $\lambda < \lambda_0$ et $u_0 \in \mathbf{S}$ solution de $(1)_{\lambda_0}$. Alors u_0 est une sur solution singulière pour $(1)_\lambda$. On considère la suite des itérés v_n telle que $v_0 = u_0$, $-\Delta v_n = \lambda\, e^{v_{n-1}}$, $v_n \in H_0^1(\Omega)$, dont on montre qu'elle est bien définie, décroissante et qu'elle converge vers une fonction v_∞ solution *a priori* singulière de $(1)_\lambda$. En fait on montre grâce par un argument technique que $e^{v_2} \in L^p(\Omega)$ pour tout p fini, ce qui implique que v_3 appartient à $L^\infty(\Omega)$.

III. PROPRIÉTÉS DE COMPACITÉ DES SOLUTIONS RÉGULIÈRES DE (1). — On supposera ici que Ω est étoilé par rapport à l'origine. Nous allons alors obtenir des estimations sur les solutions régulières de (1) puis la relative compacité de **R** dans **S**.

THÉORÈME 2. — *Il existe une constante* $M > 0$ *telle que* $\forall \lambda \in [0, \lambda^*[$ *et* $\forall u(\lambda) \in \mathbf{R}$ *on a*

$$\| u(\lambda) \|_{H^1} \leqq M \lambda^{1/2},$$
$$\| e^{u(\lambda)} \|_{L^1(\Omega)} \leqq M,$$
$$\| e^{u(\lambda)} u(\lambda) \|_{L^1(\Omega)} \leqq M.$$

Schéma de la démonstration. — Elle repose sur un argument utilisé par Pohozaev [7].

Si u est régulière, on a par intégration par parties :

$$\int_\Omega (-\Delta u)\left(\sum x_i\, \partial u/\partial x_i\right) dx = (2-N)/2 \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - 1/2 \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 (x, n)\, d\sigma,$$

d'autre part

$$\int_\Omega e^u \left(\sum x_i\, \partial u/\partial x_i\right) dx = -N \int_\Omega (e^u - 1)\, dx.$$

En multipliant l'équation $(1)_\lambda$ par $x_i\, \partial u/\partial x_i$ et après sommation en i, on obtient (en posant $u_\lambda = u$ pour simplifier les notations) :

$$\frac{(N-2)}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 (n, x)\, d\sigma = N\lambda \int_\Omega (e^u - 1)\, dx.$$

Comme Ω est un ouvert étoilé par rapport à l'origine, $(n, x) \geqq 0$ et $\displaystyle\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 (n, x)\, dx \geqq 0$,

et en utilisant $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx = \lambda \int_\Omega e^u u\, dx$, on obtient,

$$\frac{(N-2)}{2} \int_\Omega e^u u\, dx \leqq \int_\Omega (e^u - 1)\, dx,$$

ce qui entraîne qu'il existe M tel que, pour toute solution u,

$$\int_\Omega e^u u\, dx \leqq M,$$

d'où les estimations du théorème.

Remarque. — Si au lieu de (1) on considère le problème $(*) - \Delta u = \lambda f(u)$, $u \in H_0^1(\Omega)$ et si f vérifie la condition :

$(**)$ $\exists \delta > 0$, $\exists M > 0$ tel que

$$F(s) \leqq \left(\frac{N-2}{2N} - \delta\right) f(s)\, s + M,$$

$\left[\text{où } \mathbf{F}(s) = \int_0^s f(\tau)\, d\tau\right]$, alors par les mêmes arguments on obtient pour les solutions régulières u de $(*)$,

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqq M' \lambda^{1/2},$$

$$\int_\Omega f(u)\, u\, dx \leqq M',$$

$$\int_\Omega F(u)\, dx \leqq M'.$$

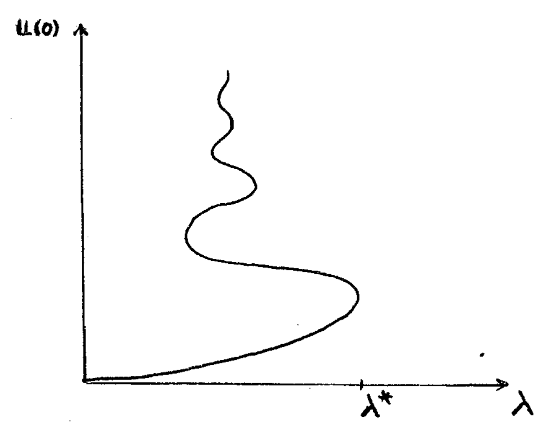
La condition $(**)$ est vérifiée dans les cas suivants :

$$f(s) = 1/(1-s)^k, \quad k \geqq 1, \qquad f(s) = s^p, \quad p > \frac{N+2}{N-2}.$$

THÉORÈME 3. — *De toute suite de solutions régulières* $(\lambda_n, u(\lambda_n))$ [*i. e.* $u(\lambda_n) \in \mathbf{R}$] *on peut extraire une suite* $(\lambda_{n'}, u(\lambda_{n'}))$ *telle que* $\lambda_{n'} \to \lambda_0$, $u(\lambda_{n'}) \to u(\lambda_0)$ *dans* $H_0^1(\Omega)$ *faible et dans* $W^{1,p}(\Omega)$ *fort*, $\forall p \in [1, 2[$, $e^{u(\lambda_{n'})} \to e^{u_0}$ *dans* $L^1(\Omega)$ *fort où* u_0 *est une solution* a priori *singulière de* $(1)_{\lambda_0}$.

La démonstration repose sur les estimations du théorème précédent qui impliquent en particulier l'équiintégrabilité de $e^{u(\lambda_n)}$.

COMMENTAIRE. — Les résultats précédents permettent de compléter la description de l'ensemble des solutions lorsque par exemple Ω est la boule unité de $\mathbf{R}^N$. Dans ce cas nous savons d'après Gidas-Ni-Nirenberg [2] que toutes les solutions régulières sont radiales. Pour $N=3$, Guelfand [3] a montré que l'ensemble des solutions radiales présente une infinité de points de retournement et forme un « tire-bouchon » qui peut être représenté par la figure suivante donnant $u(0)$ en fonction de λ.



Pour $N \geqq 10$, Joseph-Lundgren [4] ont montré que cette courbe n'avait pas de point de retournement et présentait une asymptote verticale pour $\lambda = \lambda^*$.

En fait comme l'impliquent les résultats précédents il existe au bout de la courbe des solutions régulières une solution (λ, u) avec $u \in \mathbf{S}$ mais $u \notin \mathbf{R}$. Il est aisé de voir que $\lambda = 2(\mathrm{N}-2)$ et $u = -2 \operatorname{Log} r$ et dans le cas $\mathrm{N} \geqq 10$, $\lambda = \lambda^*$. Il sera montré dans Mignot-Puel [6] que cette solution est le seule solution singulière radiale.

Les résultats précédents et la situation décrite dans le cas d'une boule montrent que les estimations du théorème 2 et les résultats de compacité du théorème 3 ont un caractère optimal et suggèrent la conjecture suivante :

CONJECTURE. — Pour un ouvert Ω régulier (et étoilé) en dimension $\mathrm{N} \geqq 3$, l'ensemble des solutions de (1) forme une courbe de solutions régulières (sans doute sans bifurcation) reliant la solution (0, 0) à une solution singulière (λ, u).

En fait une première question ouverte dans ce sens est de savoir si pour λ assez petit (et $\mathrm{N} \geqq 3$) le problème $(1)_\lambda$ admet une solution unique.

Une deuxième question est l'étude de toutes les solutions singulières de (1). Un pas dans cette direction sera effectué dans Mignot-Puel [6] où on étudie toutes les solutions singulières radiales dans le cas où Ω est une boule ou tout $\mathbf{R}^\mathrm{N}$.

Note reçue le 19 mai 1988, acceptée le 17 juin 1988.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] M. G. CRANDALL et P. H. RABINOWITZ, Some continuation and variational methods for positive solutions of non linear elliptic eigenvalues problems, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 58, 1975, p. 207-218.

[2] B. GIDAS, W. N. NI et L. NIRENBERG, Symmetry and related properties via the maximum principle, *Comm. Math. Phys.*, 68, 1979, p. 209-243.

[3] I. M. GUELFAND, Some problems in the theory of quasi-linear equations, *Uspekhi Mat. Nauk*, (N.S.), 14, (86), 1959, p. 87-158 (en russe), *Amer. Math. Soc. Transl.*, (Ser. 2), 29, 1963, p. 295-381.

[4] D. D. JOSEPH et T. S. LUNDGREN, Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 49, 1973, p. 241-269.

[5] F. MIGNOT et J.-P. PUEL, Sur une classe de problèmes non linéaires avec nonlinéarité positive, croissante, convexe, *Communications in P.D.E.*, 5, (8), 1980, p. 791-836.

[6] F. MIGNOT et J.-P. PUEL, Solution singulière radiale de $-\Delta u = \lambda e^u$, *C.R. Acad. Sci. Paris* (à paraître).

[7] S. I. POHOZAEV, Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, *Soviet Math.*, 5, 1965, p. 1408-1411.

T. G. : *Mathématiques, Université de Chambéry*, B.P. n° 1104, 73011 *Chambéry Cedex;*

F. M. : *Mathématiques, Université de Paris-Sud*, Bât. n° 425, 91405 *Orsay Cedex;*

J.-P. P. : *Département de Mathématiques et d'Informatique, Université d'Orléans*, 45000 *Orléans* et *Laboratoire d'Analyse numérique*, Tour n° 55-65, 5^e étage, *Université Pierre-et-Marie-Curie*, 4, *place Jussieu*, 75252 *Paris Cedex* 05.