

# BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN LERAY

JACQUES-LOUIS LIONS

**Quelques résultats de Višik sur les problèmes  
elliptiques non linéaires par les méthodes  
de Minty-Browder**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 93 (1965), p. 97-107.

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1965\\_\\_93\\_\\_97\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1965__93__97_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES RÉSULTATS DE VIŠIK  
SUR LES PROBLÈMES ELLIPTIQUES NON LINÉAIRES  
PAR LES MÉTHODES DE MINTY-BROWDER ;

PAR

JEAN LERAY et JACQUES-LOUIS LIONS.

Dans des Notes aux *Doklady* de 1961, puis dans un travail récent détaillé, VIŠIK ([5], [6]) a donné une méthode générale de résolution pour *certaines* problèmes elliptiques non linéaires [*cf.* hypothèses du paragraphe 2]. I. M. VIŠIK montre l'existence d'une solution de certains problèmes aux limites :

- 1° en construisant une solution approchée en dimension finie;
- 2° en passant à la limite par utilisation d'inégalités *a priori* et de résultats de compacité.

D'un autre côté, MINTY ([2], [3], [4]) a observé — et appliqué à des équations intégrales — que des *hypothèses de monotonie* convenables permettent d'éviter les résultats de compacité; BROWDER [1] a ensuite observé que les idées de MINTY pouvaient s'appliquer aux équations elliptiques considérées par VIŠIK et a développé cette idée dans une série de travaux, sans arriver, semble-t-il, à un énoncé contenant tous ceux de VIŠIK.

L'obtention d'un tel énoncé est l'objet de cet exposé; le paragraphe 1 donne un résultat « abstrait » général, le paragraphe 2 des exemples.

Notons que, *de toutes façons*, les résultats donnés ici ne dispensent *nullement* de la lecture du travail de VIŠIK, notamment en ce que, avec des hypothèses supplémentaires sur les coefficients, I. M. VIŠIK obtient des informations supplémentaires sur la régularité de la solution.

L. SCHWARTZ [qui nous a suggéré de remplacer dans (1.1)  $\operatorname{Re}(A(v), v)$  par  $|(A(v), v)|$ ] nous a communiqué une démonstration d'un résultat

moins général que le théorème 1, mais sans hypothèse de séparabilité sur  $V$ . Des résultats de ce type, avec des démonstrations différentes, se trouvent également dans MINTY.

### 1. Résultats généraux.

1. — Soit  $V$  un espace de Banach *séparable* et *réflexif*, sur  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ ; soit  $(^{\circ}) V'$  son dual (ou anti-dual). Soit  $\| \cdot \|$  (resp.  $\| \cdot \|_*$ ) la norme dans  $V$  (resp.  $V'$ ); si  $v \in V$ ,  $v' \in V'$ ,  $(v', v)$  désigne la valeur de  $v'$  en  $v$ .

Une application, en général non linéaire, d'un Banach  $X$  dans un Banach  $Y$  est dite *bornée* si elle transforme les ensembles bornés de  $X$  en ensembles bornés de  $Y$ .

Le but du paragraphe est de montrer le théorème suivant :

**THÉORÈME 1.** — *Soit  $v \rightarrow A(v)$  un opérateur borné de  $V \rightarrow V'$ , continu de tout sous-espace de  $V$  de dimension finie dans  $V'$  faible. On suppose que  $A$  est coercitif au sens suivant :*

$$(1.1) \quad \lim_{\|v\| \rightarrow \infty} \frac{(A(v), v)}{\|v\|} = \infty.$$

Alors, si l'une des hypothèses I, II ci-après a lieu,  $A$  est surjectif.

**HYPOTHÈSE I.** —  $A(v)$  est monotone, i. e.  $\operatorname{Re}(A(u) - A(v), u - v) \geq 0$ ,  $\forall u, v \in V$ .

**HYPOTHÈSE II.** — Il existe une application bornée :  $(u, v) \rightarrow A(u, v)$  de  $V \times V \rightarrow V'$  telle que  $A(u, u) = A(u)$ ,  $\forall u \in V$ , vérifiant les conditions :

(i) [Continuité et monotonie en  $v$ ] :  $\forall u \in V$ ,  $v \rightarrow A(u, v)$  est continue de toute droite de  $V$  dans  $V'$  faible, et

$$\operatorname{Re}(A(u, u) - A(u, v), u - v) \geq 0, \quad \forall u, v \in V;$$

(ii) [Continuité de  $A(u, v)$  en  $u$ ] : Soit  $u_\mu$  une suite telle que  $u_\mu \rightarrow u$  dans  $V$  faible et  $(A(u_\mu, u_\mu) - A(u_\mu, u), u_\mu - u) \rightarrow 0$ ; alors  $\forall v \in V$ ,  $A(u_\mu, v) \rightarrow A(u, v)$  dans  $V'$  faible;

(iii) [Continuité de  $(A(u, v), u)$  en  $u$ ] : Soit  $u_\mu$  une suite telle que  $u_\mu \rightarrow u$  dans  $V$  faible et  $A(u_\mu, v) \rightarrow v'$  dans  $V'$  faible; alors

$$(A(u_\mu, v), u_\mu) \rightarrow (v', u).$$

### 2. Le cas où $V$ est de dimension finie.

Lorsque  $V$  est de dimension finie, on montre le résultat en utilisant seulement (1.1). Par changement de norme (ne modifiant pas l'hypo-

---

(<sup>1</sup>) Le dual d'un Banach séparable est séparable :  $V'$  sera donc séparable.

thèse) on se ramène au cas où  $V = V' = \mathbf{R}^N$  (cas réel pour simplifier); soit  $B_K$  la boule  $\|v\| \leq K$  de bord  $S_K = \{v \mid \|v\| = K\}$ . Grâce à (1.1), pour  $K$  quelconque, on peut choisir  $R$  assez grand pour que

$$(2.1) \quad (A(v), v) \geq KR, \quad \forall v \in S_R \quad (\text{changer } A \text{ en } -A \text{ si nécessaire}).$$

Alors pour  $\theta \in ]0, 1[$ , et  $v \in S_R$ , on a

$$\left| \left( \theta A(v) + (1-\theta) \frac{K}{R} v, v \right) \right| \geq KR,$$

donc

$$\left\| \theta A(v) + (1-\theta) \frac{K}{R} v \right\| \geq K, \quad \forall v \in S_R,$$

et donc le degré topologique sur  $B_K$  de la restriction de  $\theta A + (1-\theta) \frac{K}{R} I$  à  $B_R$  ( $I =$  identité sur  $V$ ) est égal à 1, d'où le résultat.

*Note.* — Si  $V = \mathbf{C}^N$ , on commence par déformer  $A$ , pour obtenir (2.1): cf. BROWDER.

### 3. Solutions approchées $u_m$ .

Soit  $w_1, \dots, w_m, \dots$  une suite de  $V$  telle que, pour tout  $m$ ,  $w_1, \dots, w_m$  soient linéairement indépendants, et que,  $V_m$  désignant l'espace engendré par  $w_1, \dots, w_m$ ,  $\bigcup_m V_m$  soit dense dans  $V$ .

On va vérifier :

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} f \text{ étant donné dans } V', \text{ il existe } u_m \in V_m \text{ tel que} \\ (A(u_m), w) = (f, w), \quad \forall w \in V_m. \end{array} \right.$$

En effet, si  $\theta_1, \dots, \theta_m \in V'$  avec  $(\theta_i, w_j) = \delta_{ij}^i$ , définissons  $P_m \in \mathcal{L}(V'; V')$  par

$$P_m v' = \sum_{j=1}^m (v', w_j) \theta_j.$$

Alors (3.1) équivaut à

$$B_m(u_m) = P_m f,$$

où

$$B_m(v) = P_m(A(v)).$$

Si  $V'_m$  est l'espace engendré par  $\theta_1, \dots, \theta_m$ ,  $B_m$  applique  $V_m$  dans  $V'_m$ ; comme  $(B_m(v), v) = (A(v), v)$ , la condition analogue à (1.1) est satisfaite; d'où (3.1) en appliquant le n° 2.

#### 4. Passage à la limite.

De (3.1) résulte que

$$|(A(u_m), u_m)| = |(f, u_m)| \leq \|f\|_* \|u_m\|,$$

d'où, en utilisant (1.1) (les  $c$  désignent des constantes diverses),

$$\|u_m\| \leq c.$$

Alors  $\|A(u_m)\|_* \leq c$ , et,  $V$  étant réflexif, on peut extraire  $u_\mu$  telle que

$$(4.1) \quad \begin{cases} u_\mu \rightarrow u & \text{dans } V \text{ faible;} \\ A(u_\mu) \rightarrow \chi & \text{dans } V' \text{ faible.} \end{cases}$$

Appliquant (3.1) pour  $m = \mu$ , on en déduit que  $\chi = f$ . Donc

$$(4.2) \quad A(u_\mu) \rightarrow f \text{ dans } V' \text{ faible.}$$

Comme  $\|A(u_\mu, u)\|_* \leq c$ , on peut supposer (par nouvelle extraction, mais on ne change pas les indices) que

$$(4.3) \quad A(u_\mu, u) \rightarrow u' \text{ dans } V' \text{ faible.}$$

Vérifions que

$$(4.4) \quad (A(u_\mu, u_\mu) - A(u_\mu, u), u_\mu - u) \rightarrow 0.$$

En effet,

$$(A(u_\mu, u_\mu), u_\mu) = (f, u_\mu) \rightarrow (f, u)$$

et, d'après (4.2),

$$(A(u_\mu, u_\mu), u) \rightarrow (f, u);$$

d'après (iii),

$$(A(u_\mu, u), u_\mu) \rightarrow (u', u)$$

et enfin, d'après (4.3),

$$(A(u_\mu, u), u) \rightarrow (u', u).$$

Tout ceci entraîne (4.4).

D'après (4.1), (4.4) et (ii),

$$(4.5) \quad A(u_\mu, v) \rightarrow A(u, v) \text{ dans } V' \text{ faible}$$

et

$$(4.6) \quad (A(u_\mu, v), u_\mu) \rightarrow (A(u, v), u).$$

Mais alors on a :

$$(4.7) \quad X_\mu^v = (A(u_\mu, u_\mu) - A(u_\mu, v), u_\mu - v) \rightarrow (f - A(u, v), u - v).$$

Mais, d'après (i),  $\operatorname{Re} X_\mu^v \geq 0$ . Donc (4.7) donne

$$(4.8) \quad \operatorname{Re}(f - A(u, v), u - v) \geq 0, \quad \forall v \in V.$$

Posant  $v = u - \lambda w$ ,  $\lambda > 0$ ,  $w \in V$ , il en résulte

$$\operatorname{Re}(f - A(u, u - \lambda w), w) \geq 0, \quad \forall w \in V \text{ et } \lambda > 0;$$

faisant tendre  $\lambda$  vers zéro, en utilisant (i), il vient

$$\operatorname{Re}(f - A(u), w) \geq 0, \quad \forall w \in V,$$

donc

$$f = A(u),$$

ce qui démontre le théorème.

## 2. Applications à un type d'équation aux dérivées partielles contenant l'équation d'Euler du calcul des variations.

### 1. Notations.

$\Omega$  = ouvert de  $\mathbf{R}^n$ , borné; les fonctions considérées sont à valeurs réelles

$$W_p^m(\Omega) = \{ u \mid D^\alpha u \in L_p(\Omega), |\alpha| \leq m \}, \quad 1 < p < \infty;$$

$$\|u\| = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}};$$

$\hat{W}_p^m(\Omega)$  = adhérence dans  $W_p^m(\Omega)$  du sous-espace des fonctions à support compact dans  $\Omega$ ;

$$\hat{W}_p^m(\Omega) \subset V \subset W_p^m(\Omega),$$

$V$  fermé dans  $W_p^m(\Omega)$ , inclusions strictes ou non;

$V'$ , dual de  $V$ , n'est un espace de distributions sur  $\Omega$  que si  $V = \hat{W}_p^m(\Omega)$ .

Notons que  $V$  est séparable et réflexif.

On suppose que

(1.1) l'application identique est compacte de  $V \rightarrow W_p^{m-1}(\Omega)$ .

Cette hypothèse a, par exemple, toujours lieu si  $V = \hat{W}_p^m(\Omega)$ , et elle a lieu si  $V = W_p^m(\Omega)$ ,  $\Omega$  ayant la propriété du cône.

Les fonctions  $A_x$ . — Soit  $N_1$  (resp.  $N_2$ ) le nombre de dérivations  $D^\beta$  dans  $\mathbf{R}^n$  d'ordre  $\leq m-1$  (resp. d'ordre =  $m$ ); soit  $A_x(x, \eta, \xi)$  une famille de fonctions ( $|\alpha| \leq m$ ) définies sur  $\Omega \times \mathbf{R}^{N_1} \times \mathbf{R}^{N_2}$ , à valeurs dans  $\mathbf{R}$ ; ces fonctions sont de CARATHÉODORY, i. e. :

- pour presque tout  $x \in \Omega$ ,  $(\eta, \xi) \rightarrow A_x(x, \eta, \xi)$  est continue sur  $\mathbf{R}^{N_1} \times \mathbf{R}^{N_2}$ ;
- pour tout  $(\eta, \xi) \in \mathbf{R}^{N_1} \times \mathbf{R}^{N_2}$ ,  $x \rightarrow A_x(x, \eta, \xi)$  est mesurable.

On pose

$$\begin{aligned} D^k u &= \{ D^\beta u, |\beta| = k \}; \\ \delta u &= \{ u, Du, \dots, D^{m-1} u \}; \\ A_\alpha(x, \delta u, D^m v) &: x \rightarrow A_\alpha(x, \delta u(x), D^m v(x)). \end{aligned}$$

On suppose que

$$(1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall u \in W_p^m(\Omega), \quad v \in W_p^m(\Omega), \\ \text{on a} \\ A_\alpha(x, \delta u, D^m v) \in L_{p'}(\Omega), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \end{array} \right.$$

D'après M. A. KRASNOSEL'SKIJ <sup>(2)</sup>, on peut donner la condition nécessaire et suffisante pour que (1.2) ait lieu. Notons seulement ceci, de vérification facile : (1.2) a lieu si

$$(1.3) \quad |A_\alpha(x, \eta, \xi)| \leq c [ |\eta|^{\rho-1} + |\xi|^{\rho-1} + k(x) ], \quad k \in L_{p'}(\Omega).$$

On peut améliorer (i. e. augmenter) l'exposant de  $|\eta|$  dans (1.3) en utilisant les inégalités de Sobolev.

L'opérateur  $A$ . — Pour  $u, w \in V$ , on définit

$$(1.4) \quad a(u, w) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} A_\alpha(x, \delta u, D^m u) D^\alpha w \, dx,$$

ce qui a un sens, puisque  $A_\alpha(x, \delta u, D^m u) \in L_{p'}(\Omega)$  et  $D^\alpha w \in L_p(\Omega)$ . La forme  $w \rightarrow a(u, w)$  est linéaire continue sur  $V$ , donc de la forme

$$(1.5) \quad a(u, w) = (A(u), w), \quad A(u) \in V'.$$

Le problème aux limites. — Pour  $f$  donné dans  $V'$ , on cherche  $u$  dans  $V$ , satisfaisant à

$$(1.6) \quad A(u) = f$$

ou, ce qui revient au même,

$$(1.6') \quad a(u, w) = (f, w), \quad \forall w \in V.$$

C'est un problème avec conditions aux limites de Dirichlet (resp. Neumann, resp. « mêlées ») si  $V = \dot{W}_p^m(\Omega)$  [resp.  $W_p^m(\Omega)$ , resp.  $\dot{W}_p^m(\Omega) \subset V \subset W_p^m(\Omega)$  avec inclusions strictes].

<sup>(2)</sup> KRASNOSEL'SKIJ (M. A.). — *Topological methods in the theory of non linear integral equations* [traduction de l'édition russe de 1956]. — Oxford, London, New York, 1964 (International Series of Monographs on pure and applied Mathematics, 45).

2. THÉORÈME 2. — On suppose que (1.1) et (1.3) ont lieu, ainsi que

$$(2.1) \quad \frac{|a(v, v)|}{\|v\|} \rightarrow \infty \quad \text{si} \quad \|v\| \rightarrow \infty;$$

$$(2.2)_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, \eta, \xi) \xi_\alpha / [|\xi| + |\xi|^{p-1}] \rightarrow \infty \quad \text{si} \quad \xi \rightarrow \infty, \\ x \text{ fixé, p. p. dans } \Omega, \text{ et pour } |\eta| \text{ borné,} \end{array} \right.$$

$$(2.2)_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{|\alpha|=m} [A_\alpha(x, \eta, \xi^*) - A_\alpha(x, \eta, \xi)] [\xi_\alpha^* - \xi_\alpha] > 0 \quad \text{si} \quad \xi^* \neq \xi, \\ \text{p. p. dans } \Omega. \end{array} \right.$$

Conclusion. — Il existe  $u \in V$ , solution du problème aux limites (1.6).

Remarques.

1° Il est facile de donner des conditions *suffisantes* pour que (2.1) ait lieu. Par exemple, l'hypothèse

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, \eta, \xi) \xi_\alpha \geq |\xi|^p \quad \text{pour} \quad |\xi| > \text{Cte},$$

et les inégalités de Sobolev impliquent que (2.1) a lieu quand  $\Omega$  est *suffisamment petit et régulier* et que  $V = \dot{W}_p^m(\Omega)$ , car alors

$$\|u\| \sim \left( \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

2° On peut remplacer (sans changer la conclusion)  $(\eta, \xi)$  par  $\zeta$  et (2.2) par

$$(2.3) \quad \sum_{|\alpha| \leq m} [A_\alpha(x, \zeta) - A_\alpha(x, \zeta^*)] [\zeta_\alpha - \zeta_\alpha^*] \geq 0;$$

on prendra alors  $A(u, v) = A(v)$ ; ce cas est plus simple à établir que celui de l'énoncé du théorème 2.

### 3. Lemmes.

LEMME 3.1. — Si  $u_\nu \rightarrow u$  dans  $W_p^{m-1}(\Omega)$  fort et  $v \in W_p^m(\Omega)$ , on a

$$A_x(x, \delta u_\nu, D^m v) \rightarrow A_x(x, \delta u, D^m v)$$

dans  $L_{p'}$  fort (cf. KRASNOSEL'SKIJ, *loc. cit.* en 1).

LEMME 3.2. — Soit  $g \in L_q(\Omega)$ ,  $g_\nu \in L_q(\Omega)$ ,  $\|g_\nu\|_{L_q(\Omega)} \leq c$ ;  $1 < q < \infty$ ; si  $g_\nu \rightarrow g$  p. p., alors  $g_\nu \rightarrow g$  dans  $L_q(\Omega)$  faible.

*Démonstration.* — Soit

$$E(N) = \{x \mid x \in \Omega, |g_\nu(x) - g(x)| \leq 1, \forall \nu \geq N\}.$$

$E(N)$  croît avec  $N$  et  $\text{mes}(E(N)) \rightarrow \text{mes}\Omega$ ; alors l'ensemble des fonctions  $\varphi_N \in L_{q'}(\Omega)$ , nulles (p. p.) hors de  $E(N)$ , est, lorsque  $N \rightarrow \infty$ , dense dans  $L_{q'}(\Omega)$ . Or

$$\int_{\Omega} \varphi_N(x) [g_\nu(x) - g(x)] dx \rightarrow 0$$

lorsque  $\nu \rightarrow \infty$  ( $\varphi_N$  fixée); d'où le résultat.

LEMME 3.3. — Soit  $u_\nu, u \in W_p^m(\Omega)$ ,  $\|u_\nu\| \leq c$ ,  $u_\nu \rightarrow u$  dans  $V$  faible. On pose

$$\begin{aligned} F_\mu &= F(x, \delta u_\mu, D^m u_\mu, D^m u) \\ &= \sum_{|\alpha|=m} [A_\alpha(x, \delta u_\mu, D^m u_\mu) - A_\alpha(x, \delta u, D^m u)] [D^\alpha u_\mu - D^\alpha u], \end{aligned}$$

et l'on suppose que

$$\int_{\Omega} F(x, \delta u_\mu, D^m u_\mu, D^m u) dx \rightarrow 0.$$

Alors

$$(3.1) \quad A_\alpha(x, \delta u_\mu, D^m u_\mu) \rightarrow A_\alpha(x, \delta u, D^m u) \quad \text{dans } L_{p'}(\Omega) \text{ faible.}$$

*Démonstration.* — Grâce à (2.2)<sub>2</sub>,  $F_\mu \geq 0$ ; donc de toute sous-suite de  $\{\mu\}$  on peut extraire une sous-suite  $\{\nu\}$  telle que

$$(3.2) \quad \delta u_\nu(x) \rightarrow \delta u(x), F_\nu(x) \rightarrow 0 \quad \text{p. p. dans } \Omega.$$

Fixons  $x$  non exceptionnel dans (3.2) et tel que  $k(x) < \infty$  [ $k$  donné dans (1.3)]; notons  $\eta = \delta u(x)$ ,  $\eta_\nu = \delta u_\nu(x)$ ,  $\xi = D^m u(x)$  et  $\xi^*$  l'une quelconque des limites de  $D^m u_\nu(x) = \xi_\nu$ . Alors

$$F_\nu(x) \geq \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, \eta_\nu, \xi_\nu) \xi_{\nu\alpha} - c(|\xi_\nu|^{p-1} + |\xi_\nu| + 1)$$

et si l'on avait  $|\xi^*| = \infty$ , alors, vu (2.2)<sub>1</sub>, on aurait  $F_\nu(x) \rightarrow \infty$  contrairement à (3.2). Donc  $|\xi^*| < \infty$ .

Alors (3.2) et la continuité en  $\eta, \xi$  des  $A_\alpha$  impliquent

$$\sum_{|\alpha|=m} [A_\alpha(x, \eta, \xi^*) - A_\alpha(x, \eta, \xi)] [\xi_\alpha^* - \xi_\alpha] = 0,$$

donc, vu (2.2)<sub>2</sub>,

$$\xi^* = \xi.$$

Donc

$$A_x(x, \delta u_\nu(x), D^m u_\nu(x)) \rightarrow A_x(x, \delta u(x), D^m u(x)) \quad \text{p. p. dans } \Omega,$$

et, vu le lemme 3.2,

$$(3.3) \quad A_x(x, \delta u_\nu, D^m u_\nu) \rightarrow A_x(x, \delta u, D^m u) \quad \text{dans } L_{p'}(\Omega) \text{ faible.}$$

Pour que de toute suite extraite de  $\{\mu\}$  on puisse extraire une suite donnant lieu à (3.3) (donc avec une limite *indépendante* de la suite extraite), il faut que (3.1) ait lieu.

#### 4. Démonstration du théorème 2.

Il est commode de poser

$$a_1(u, v, w) = \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} A_x(x, \delta u, D^m v) D^\alpha w \, dx,$$

$$a_2(u, w) = \sum_{|\alpha| \leq m-1} \int_{\Omega} A_x(x, \delta u, D^m u) D^\alpha w \, dx.$$

Alors

$$a(u, v, w) = a_1(u, v, w) + a_2(u, w)$$

définit  $A(u, v) \in V'$  par

$$a(u, v, w) = (A(u, v), w).$$

Il est facile de voir que tous ces opérateurs sont bornés. L'hypothèse (2.1) est évidemment équivalente à (1.1) de sorte que pour montrer le théorème, il suffit, en vertu du théorème 1, de vérifier que les hypothèses II, (i), (ii), (iii) ont lieu.

*Vérification de (i).* — On a

$$(A(u, u) - A(u, v), u - v) = [a_1(u, u, u - v) - a_1(u, v, u - v)]$$

et ceci est  $\geq 0$  d'après (2.2); il reste à montrer que

$$a(u, v_1 + \lambda v_2, w) \rightarrow a(u, v_1, w) \quad \text{si } \lambda \rightarrow 0, \quad u, v_i, w \in V.$$

Cela résulte de ce que

$$A_x(x, \delta^{m-1} u, D^m(v_1 + \lambda v_2)) \rightarrow A_x(x, \delta^{m-1} u, D^m v_1)$$

dans  $L_{p'}(\Omega)$  faible (il y a même convergence dans  $L_{p'}$  fort!), ce qui suit par exemple du lemme 3.2.

*Vérification de (ii).* — Soit  $u_\mu$  une suite telle que  $u_\mu \rightarrow u$  dans  $V$  faible et

$$(A(u_\mu, u_\mu) - A(u_\mu, u), u_\mu - u) \rightarrow 0.$$

Avec les notations du lemme 3.3,

$$(A(u_\mu, u_\mu) - A(u_\mu, u), u_\mu - u) = \int_{\Omega} F_\mu dx$$

et donc, d'après le lemme 3.3,

$$A_\alpha(x, \delta u_\mu, D^m u_\mu) \rightarrow A_\alpha(x, \delta u, D^m u) \quad \text{dans } L_{p'}(\Omega) \text{ faible,}$$

et, pour  $|\alpha| = m$ ,  $A_\alpha(x, \delta u_\mu, D^m v) \rightarrow A_\alpha(x, \delta u, D^m v)$  dans  $L_{p'}(\Omega)$  faible (et même fort). Donc

$$a(u_\mu, v, w) \rightarrow a(u, v, w), \quad \forall w \in V,$$

donc  $A(u_\mu, v) \rightarrow A(u, v)$  dans  $V'$  faible.

C. Q. F. D.

*Vérification de (iii).* — Soit  $u_\mu \rightarrow u$  dans  $V$  faible,  $A(u_\mu, v) \rightarrow v'$  dans  $V'$  faible. Alors (lemme 3.1)  $A_\alpha(x, \delta u_\mu, D^m v) \rightarrow A_\alpha(x, \delta u, D^m v)$  dans  $L_{p'}(\Omega)$  fort, donc

$$(4.1) \quad a_1(u_\mu, v, u_\mu) \rightarrow a_1(u, v, u).$$

Par ailleurs,

$$|a_2(u_\mu, u_\mu - u)| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m-1} \|D^\alpha(u_\mu - u)\|_{L_v(\Omega)}$$

et donc, d'après (1.1),  $a_2(u_\mu, u_\mu - u) \rightarrow 0$ .

Grâce à (4.1),

$$a_2(u_\mu, u) = (A(u_\mu, v), u) - a_1(u_\mu, v, u) \rightarrow (v', u) - a_1(u, v, u),$$

donc

$$a_2(u_\mu, u_\mu) = a_2(u_\mu, u_\mu - u) + a_2(u_\mu, u) \rightarrow (v', u) - a_1(u, v, u).$$

Alors

$$(A(u_\mu, v), u_\mu) = a_1(u_\mu, v, u_\mu) + a_2(u_\mu, u_\mu) \rightarrow (v', u),$$

et (iii) suit.

## 5. Remarques.

1° Dans le cas où les coefficients  $A_\alpha(x, \eta, \xi)$  ont une croissance *plus rapide que polynomiale*, il faut remplacer les espaces de Sobolev  $W_p^m(\Omega)$ , construits à partir de  $L_p(\Omega)$ , par des espaces analogues construits à partir d'espaces d'Orlicz sur  $\Omega$ .

Noter aussi que les  $A_\alpha$  n'ont pas tous forcément « même croissance »; on peut donc être conduit à introduire au lieu de  $W_p^m(\Omega)$  des espaces

$$W_{p_\alpha}^m(\Omega) = \{ u \mid D^\alpha u \in L_{p_\alpha}(\Omega), |\alpha| \leq m, p_\alpha \text{ dépendant de } \alpha \};$$

remarque analogue encore en remplaçant  $L_{p_\alpha}(\Omega)$  par un *espace d'Orlicz dépendant de  $\alpha$* . Pour tout cela, cf. VIŠIK [7].

2° Si la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$  est assez régulière, on peut également introduire dans (1.4) des *intégrales de surface*.

## BIBLIOGRAPHIE.

- [1] BROWDER (F. E.). — Variational boundary value problems for quasi-linear elliptic equations of arbitrary order, *Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 50, 1963, p. 31-37, 592-598 et 794-798 ; *Non linear elliptic boundary value problems* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 69, 1963, p. 862-874).
- [2] MINTY (G. J.). — Monotone (non linear) operators in Hilbert space, *Duke math. J.*, t. 29, 1962, p. 341-346.
- [3] MINTY (G. J.). — On the maximal domain of a monotone function, *Michigan math. J.*, t. 8, 1961, p. 135-137.
- [4] MINTY (G. J.). — On a « monotonicity » method for the solution of non linear equations in Banach spaces, *Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 50, 1963, p. 1038-1041.
- [5] VIŠIK (M. I.). — *Doklady Akad. Nauk S. S. S. R.*, t. 138, 1961, p. 518-521.
- [6] VIŠIK (M. I.). — *Trudy Moskovskogo Matematičeskogo Obščestva*, t. 12, 1963, p. 125-184.
- [7] VIŠIK (M. I.). — *Doklady Akad. Nauk S. S. S. R.*, t. 151, 1963, p. 758-761.

(Manuscrit reçu le 30 juin 1964.)

Jean LERAY,  
Professeur au Collège de France,  
12, rue Pierre-Curie, Sceaux (Seine).

Jacques-Louis LIONS,  
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris,  
42, rue du Hameau, Paris, 15<sup>e</sup>.