A ne pas perdre.
C.

E.D.P

Cours 1ère année

E.N.S. Lyon

1995-96.

Cours de Thierry Gallouët
Notes prises par Jérôme Droniou.

A ne pas perdre.
€.

E.D.P

Cours 1ère année

E.N.S. Lyon

1995–96.

Cours de Thierry Gallouët
Notes prises par Jérôme Droniou.

(1)

E.D.P.

* <u>Intro</u>

1) <u>Généralités</u> C.L.

1.1) C.L pour Eq diff.
$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = F(t, u(t)), & t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

où $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}$, loc. lip.

(ou) E banach, $F : \mathbb{R} \times E \to E$

1.2) Eq d'évolution dans les espaces fonctionnels.
$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + A(u(t)) = f(t) & (t \geq 0) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

où $A : D(A) \subset E \to E$

ex : $u_t - u_{xx} = 0$, cond initiales + limites
$(u(0,t) = u(1,t) = 0)$

avec $E = L^2(]0,1[)$

$Au = -u_{xx}$, $D(A) = H^1_0$

[A linéaire non borné]

$\Rightarrow$ Théorie des semi-groupes (§III cours, th Hille-Yosida)

• A non linéaire (+ difficile, pas de th générale)

1.3) C.L pour EDP générales

• $E(u) = 0$ avec $x \in \mathbb{R}^n$, $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

Eq. ordre 1 (uniq^t dérivées ordre 1)

Donnée initiale : Σ variété de dim $n-1$, $u = u_0$ sur Σ

ex : $n = 2$:

$\Rightarrow$ u voisinage de Σ ?

• <u>Ex 1</u> : $(n=2)$
$$\begin{cases} u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} = f \\ u \text{ et } \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} \text{ connues sur } \Sigma \text{ (variété dim. } n-1) \end{cases}$$
($\vec{n}$ normale à Σ)

(3) ... non linéaires.

→ Inéquations variationnelles

→ $\underbrace{\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)}_{\text{PB Quasi-linéaires}} = f(x) \qquad (x \in \Omega)$

$\Downarrow$

$\underbrace{f(x, u(x), \nabla u(x))}_{\text{PB Semi-linéaires}}$

Th. Schauder (cf degré topologique)

2-3) Eq. d'évolution ds espaces fonctionnels

$u_t + A(u) = 0$

→ A linéaire : $D(A) \subset E \to E$

→ A non linéaire

Objet

$\Longrightarrow$ $\begin{cases} \text{EDP linéaire ellipt.} \\ \text{avec C. init.} \end{cases}$

(E) $\begin{cases} + \text{ [illegible]} \\ + \text{ [illegible] dy. [illegible] faibles} \end{cases}$

I – Dérivées faibles ; Espaces de Sobolev.

I-1) (Dérivées par rapport ~~...~~ / Dérivées faibles et dérivées au sens des distributions)

1) Lemme fondamental

* Ω ouvert $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega) = \{ \varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, $\exists K \subset \Omega$ compact, $\varphi = 0$ sur

Lemme : Si Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, $(f,g) \in L^1_{loc}(\Omega)$

[i.e $\forall K \subset \Omega$ compact, $f_{|K} \in L^1(K)$]

$\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$, $\int_\Omega \varphi f \, dx = \int_\Omega \varphi g \, dx \iff f = g$

→ Démo : Il suffit de mq $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\int_\Omega \varphi f = 0 \quad \forall \varphi \in$

$\Rightarrow f = 0$ pp.

(5) 2) <u>Dérivée faible</u>

* <u>Déf</u>: Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $i \in \{1,\dots,n\}$

Soit g_i une fonction $\in L^1_{loc}(\Omega)$: g_i est la dérivée faible de u dans la direction i si

$$\int_\Omega u(x)\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\,dx = -\int_\Omega g_i(x)\,\varphi(x)\,dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$$

S'il en existe un, il est unique (lemme fondamental)

. On pose alors <u>$g_i = D_i u$</u>

. <u>Rmq</u>: 1) Si $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ pp [IPP]

2) Si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $i \in [1,n]$, on n'a pas $\exists D_i u$.

Ex: $\Omega = \mathbb{R}$, $u = 1$ si $x>0$, $= 0$ $x \leq 0$

$$\int_{\mathbb{R}} u\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \int_0^\infty \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\varphi(0) \quad (\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty)$$

* Peut-on définir une dérivée $D_i f$, $\forall f \in L^1_{loc}$??

3) <u>Distributions</u> (réelles)

* <u>Déf</u>: . $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$

. $\mathcal{D}_K(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \mid \operatorname{supp}\varphi \subset K\}$ pour $K \subset \Omega$ compact.

$\left(\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{\substack{K\subset\Omega \\ \text{comp.}}} \mathcal{D}_K(\Omega)\right)$

. <u>Rq</u>: 1) topologie sur $\mathcal{D}_K(\Omega)$: K fixé, $K \subset \Omega$,

si $\partial^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\left(\cdots\left(\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}(\varphi)\right)\right)$ où $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $P_\alpha(\varphi) = \sup_{x\in\Omega} |\partial^\alpha \varphi(x)| = \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty$

La topo sur $\mathcal{D}_K$ est définie par la famille de semi-normes $(P_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$: espace de Fréchet

[boule = $\cap$ finie de boules pour semi normes]

(1) (i.e. topo. faible *)

Rq : $\left.\begin{array}{l} T_n \to T \\ T_n \to S \end{array}\right\}$, $\mathcal{D}'(\Omega)$ $\Rightarrow$ $T = S$ ds $\mathcal{D}'(\Omega)$.

• Notation : $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c = \mathcal{D}(\Omega)$, $T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'\mathcal{D}}$

* **Déf** Ω ouvert $\mathbb{R}^n$, $i \in \{1,..,n\}$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$

on pose $D_i T(\varphi) = \langle D_i T, \varphi \rangle = - \langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle$
$= -T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)$

($D_i T \in \mathcal{D}'(\Omega)$)

Rq : T ordre $\leq m$, $D_i T$ ordre $\leq m+1$.

Prop : $T_n \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $T \in \mathcal{D}'$

$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T \Rightarrow D_i T_n \longrightarrow D_i T$.

4) Dérivées au sens des distributions

* Remarque : Ω ouvert $\mathbb{R}^n$, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$

On définit $T_f(\varphi) = \int_\Omega f \varphi \, d\mu$ $(\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega))$

: $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ d'ordre 0.

$\rightarrow |T_f(\varphi)| \leq \underbrace{\|f\|_{L^1(K)}}_{C_K} \|\varphi\|_\infty$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}_K$.

$f \in L^1_{loc} \longrightarrow T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ordre 0.

• Si $T_f = T_g$, $f = g$ (cf Lemme)

$f \to T_f$ injection $L^1_{loc} \to \mathcal{D}'(\Omega)$.

• **Déf** : $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $i \in [1,..,n]$.

La dérivée de f au sens des distrib. est la dérivée $D_i T_f$.

(9) → Demo : ① $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire.

[n=1] $(H^m, \langle,\rangle)$ est complet : u_n de Cauchy ds H^m.

On a donc (u_n) de cauchy ds L^2 ($\|u\|_{L^2} \leq \|u$

$(D_i u_n)$ " " L^2 $\|D_i u\|_{L^2} \leq \|$

$$u_n \xrightarrow{L^2} u \in L^2 \qquad (L^2 \text{ cplet})$$

$$D_i u_n \xrightarrow{L^2} v_i \in L^2$$

Il reste à mq $u \in H^1$, $u_n \xrightarrow{H^1} u$.

• $u_n \xrightarrow{L^2} u \Rightarrow u_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} u$

$\left(\int (u_n - u)\,\varphi \longrightarrow 0,\ \forall \varphi \in L^2 \text{ et } \mathcal{D} \subset L^2\right)$

Or D_i c ds $\mathcal{D}'$: $D_i u_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} D_i u$

$\Big\downarrow L^2$

g_i

$\Rightarrow D_i u_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} g_i \Rightarrow g_i = D_i u \in L^2$

Donc $u \in H^1$, $u_n \xrightarrow{H^1} u$

② idem

* Ex. $(n=1)$:

$$W^{1,p}(]a,b[) = \{ u \in L^p(]a,b[) \mid Du \in L^p(]a,b[) \}$$

$$W^{1,p}(a,b) = \{ u \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}) \mid \exists\, v \in L^p(]a,b[),\ u(x) = u(a) + \int_a^x v(t)\,dt \}$$

• Mq 1) $u \in W^{1,p}(]a,b[) \Rightarrow u$ admet un représentant continu, notée u : $u \in W^{1,p}(a,b)$

et $u(x) = u(a) + \int_a^x Du(t)\,dt$

2) Si $u \in W^{1,p}(a,b)$, $u \in W^{1,p}(]a,b[)$

* Ex : $(n=2)$ 1) $H^1(\Omega) \not\subset \mathscr{C}(\overline{\Omega})$

(11) E est un banach réflexif si $J(E) = E''$ (i.e. J surjective)

$\Rightarrow$ En composant $(L^p)' \simeq L^q$ et $(L^q)' \simeq L^p$, on trouve J.

- Preuve prop. : $(m=1)$

1) E banach, F s.e.v. fermé de E, F banach
   - E séparable $\Rightarrow$ F séparable (exo)
   - E réflexif $\Rightarrow$ F réflexif.

   ↳ Soit $u \in F''$: mq $\exists x \in F \mid u = J_x$,

   $u(t) = t(x), \quad \forall t \in F'$

$\Rightarrow T \in E'$, $T_{|F} \in F'$: $u(T_{|F}) \in \mathbb{R}$

Soit $\bar{u}(T) = u(T_{|F})$: $\bar{u}$ $E' \to \mathbb{R}$ linéaire

$\bar{u}$ continue car $|\bar{u}(T)| \leq \|u\|_{F''} \underbrace{\|T_{|F}\|_{F'}}_{\leq \|T\|_{E'}}$

$(\|\bar{u}\|_{E''} \leq \|u\|_{F''})$

donc E réflexif : $\exists x \in E \mid \bar{u}(T) = T(x)$

lemme : (conséquence Hahn-Banach) :

E banach, F s.e.v. fermé de E, $x \in E$ tq

$\forall T \in E', \quad T_{|F} = 0 \Rightarrow T(x) = 0$

alors $x \in F$.

Donc par le lemme, $x \in F$

$\forall T \in E', \quad u(T_{|F}) = T(x)$

- $\forall S \in F'$, Hahn-Banach $\Rightarrow \exists T \in E' \mid S = T_{|F}$ ok.

$(u(S) = S(x))$: $u = J_x$, $F \xrightarrow{J} F''$ surj.

2) $p \in [1, \infty[$, $m = 1$:

$u \in W^{m,p} \xrightarrow{\theta} (u, D_1 u, \dots, D_n u) \in (L^p(\Omega))^{n+1}$

(13) → Démo : $\mathcal{C}_c^\infty$ dense $W_0^{m,p}(\Omega)$

$$P_0 : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \xrightarrow{\ u \ \longmapsto\ \tilde{u}\ } \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \\ \| P_0 u \|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} = \| u \|_{W_0^{m,p}(\Omega)} \end{array} \right.$$

P_0 linéaire & isométrie $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \subset W_0^{m,p}(\Omega) \to W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$

Donc P_0 se prolonge par densité à $W_0^{m,p}(\Omega)$

$$P : W_0^{m,p}(\Omega) \longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$$
$$u \longmapsto Pu \qquad \| Pu \|_{W^{m,p}} = \| u \|$$

et $\left\{ \begin{array}{l} Pu = 0 \text{ sur } \Omega^c \\ Pu = u \text{ sur } \Omega \end{array} \right.$ (pp) car $Pu = \lim_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} P_0(u_n)$

où $u_n \xrightarrow{W_0^{m,p}} u$

(dc CS pp suite extraite)

I - 3) Théorèmes de densité

* **Thm :** $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty[$: $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$

→ Démo : $m = 0$: connu ($\mathcal{D}$ dense L^p)

$m = 1$ (troncature & régularisation) ($p = 2$)

① Troncature : $\{ u \in H^1(\mathbb{R}^n) \mid u = 0 \text{ sur } K^c, K \text{ compact}\}$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^n)$

. Soit $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\left\{ \begin{array}{l} \Psi = 1 \text{ sur } B_1 \\ \Psi = 0 \text{ sur } B_2^c \\ 0 \leq \Psi \leq 1 \end{array} \right.$

$u_m(x) = u(x)\, \Psi\left(\frac{x}{m}\right)$, $m \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}^n$

- $u_m = 0$ sur B_{2m}^c
- $u_m \in H^1$, $u_m \xrightarrow{H^1} u$

en effet : 1) $u_m \xrightarrow{L^2} u$ (CV dominée)

2) $D_i u_m = D_i u . \Psi + u\, D_i \Psi$:

(15)

$$= -\int_{\mathbb{R}^n} u(y)\, \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{(\varphi * \bar{\rho}_n)}_{\mathcal{C}^\infty_c}(y)\, dy$$

$$\underset{\text{déf } D_i u}{=} \int_{\mathbb{R}^n} D_i u \cdot \varphi * \bar{\rho}_n \, dy \underset{\text{même manip que tt à l'heure}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{(D_i u * \bar{\bar{\rho}}_n)}_{D_i u * \rho_n} \varphi$$

$$= \langle D_i u * \rho_n , \varphi \rangle$$

$$\Rightarrow \quad D_i u_n = D_i u * \rho_n .$$

* **Déf**: Ω ouvert $\mathbb{R}^n$,

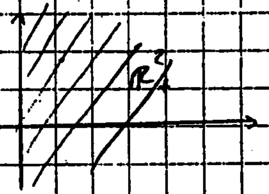
$$\mathcal{C}^\infty_c(\bar{\Omega}) = \{ u_{|\Omega} \ \text{tq} \ u \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n) \}$$

Objectif: Ω régulier $\Rightarrow$ $\mathcal{C}^\infty_c(\bar{\Omega})$ dense ds $H^1(\Omega)$

* **Th**: $\Omega = \mathbb{R}^n_+ = \{ x \in \mathbb{R}^n, \ x = (x_1, y), \ x_1 > 0, \ y \in \mathbb{R}^{n-1} \}$

$\mathcal{C}^\infty_c(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ $\quad (p \in [1, \infty[)$

→ Démo:



① Troncature: $\{ u \in H^1(\mathbb{R}^n_+) \mid u = 0 \text{ sur } K^c, \ K \text{ compact de } \mathbb{R}^n \}$ dense ds $H^1(\mathbb{R}^n_+)$

Soit $\psi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi = 1$ sur $B(1)$, $\psi = 0$ sur $B(2)^c$

$$u_n = u(x)\,\psi\!\left(\frac{x}{n}\right) : \quad u_n \in H^1(\mathbb{R}^n_+), \quad u_n \xrightarrow{H^1(\mathbb{R}^n_+)} u$$

② $u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$, $u = 0$ sur K^c, K compact $\mathbb{R}^n$.

On cherche $u_n \in \mathcal{C}^\infty_c(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ tq $u_n \xrightarrow{H^1} u$

Soit $\tilde{u} = u$ sur $\mathbb{R}^n_+$

$\quad = 0$ sur ${\mathbb{R}^n_+}^c = \mathbb{R}^n_-$.

(17) $\langle D_i u_n, \varphi\rangle = -\int_{\mathbb{R}^m_+} u(y)\, \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{(\varphi * \bar\rho_n)}_{\in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n_+)}(y)\, dy$

$(\bar\rho_n = \check\rho_n)$

$$= \int_{\mathbb{R}^n_+} D_i u(y)\,.\, \varphi * \bar\rho_n(y)\, dy$$

<u>car</u> $\varphi * \bar\rho_n \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n_+)$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{D_i u}(y)\,.\,\varphi * \bar\rho_n(y)\, dy$$

$$= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n}}_{\int_{\mathbb{R}^n_+}} (\widetilde{D_i u} * \rho_n)(x)\, \varphi(x)\, dx \quad \underline{\text{Fubini}}$$

car $\varphi = 0$ sur $\mathbb{R}^n_-$

$\Rightarrow \quad D_i u_n = \widetilde{D_i u} * \rho_n |_{\mathbb{R}^n_+}$ ok.

- <u>Prop</u>: 1) $\{ u_{|\mathbb{R}^n_+},\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \} = W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ (p

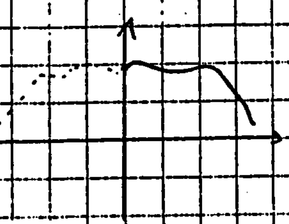
  2) $\exists\ P : W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ linéaire continue tq $Pv = v$ pp sur $\mathbb{R}^n_+$

  $Pu \geq 0$ si $u \geq 0$

- <u>Démo</u> . $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $v = u_{|\mathbb{R}^n_+}$, $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+$

  et $D_i v = D_i u_{|\mathbb{R}^n_+}$ $(\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+) \Rightarrow \varphi \in \mathcal{D}($

  . $\exists$ de P : $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$



Soit $v(x_1, y) = v(x_1, y)$ si $x_1 \geq 0$

$v(x_1, y) = v(-x_1, y)$ si $x_1 \leq 0$

$\Rightarrow v \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, v lipschitzienne, $\mathcal{C}^1$ par morceaux $(\varphi \in \mathcal{D}$

$$-\langle D_i v, \varphi\rangle = \int v(x)\, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n_+} v(x) \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\, dx + \int_{\mathbb{R}^n_-} v(x)\, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\, dx$$

$$\underset{(IPP)}{=} -\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\, \varphi(x)\, dx - \int_{\mathbb{R}^n_-} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, \varphi$$

(15)

O est à frontière $\mathcal{C}^\infty$.

faible

Th: Ω ouvert borné à ~~frontière~~ lipschitzienne

Ω borné

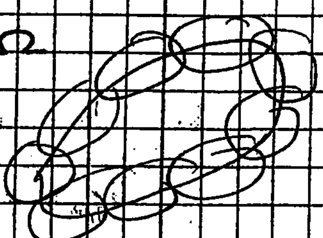
On a alors $(1 \leq p < \infty)$

i) $\mathcal{C}^\infty_c(\bar\Omega) = \{u_{|\Omega},\ u \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)\}$ $\quad (= \mathcal{C}^\infty(\bar\Omega))$

est dense dans $W^{1,p}(\Omega)$

ii) $\exists\ P : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ linéaire continue tq $Pu = u$ pp sur Ω, $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$

→ **Démo**: On se ramène à $\mathbb{R}^n_+ = \Omega$



Etape 1: Partition de l'unité

$\bar\Omega \subset \bigcup_{i=0}^{n} O_i$, $O_0 \subset \Omega$

$\exists\ \alpha_i \in \mathcal{C}^\infty_c(O_i)$ | $\alpha_i \in [0,1]$, $\sum \alpha_i = 1$ sur $\bar\Omega$.

[$d > 0$, $O_{i,d} = \{x \in O_i \mid d(x, \partial O_i) > d\}$

$\bigcup_{d>0} \bigcup_{i=0}^{n} O_{i,d} \supset \bar\Omega$ par compacité Ω, $\exists\ d > 0$ tq $\bar\Omega \subset \bigcup_{i=0}^{n} O_{i,d}$

On a aussi $\bigcup_i O_{i,d/2} \supset \bar\Omega$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, si $x \in \bigcup$

$i(x) = \min\{j \mid x \in O_{j,d/2}\}$. On pose $\bar\alpha_{i(x)}(x) = 1$, $\bar\alpha_j(x) = 0$

si $x \notin \bigcup_j O_{j,d/2}$ $\bar\alpha_i(x) = 0$.

$0 \leq \bar\alpha_j \leq 1$, $\sum_{j=1}^{n} \bar\alpha_j = 1$ si $x \in \bigcup O_{j,d/2} \supset \bar\Omega$.

$\alpha_i = \bar\alpha_i * \rho_n$ où $\frac{1}{n} < \frac{d}{2}$: α_i ok]

$\operatorname{supp} \rho_n \subset B(0, \frac{1}{n})$

• $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $u = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j u$

$D_i(\alpha_j u) = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} \times u + \alpha_j \times D_i u$

* $\alpha_j u \in W^{1,p}(\Omega)$

$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C \sum_{j=0}^{m} \|\alpha_j u\|_{W^{1,p}}$

Etape 2: $j = 0, \dots, m$. $\alpha_j u_{|O_i} : \Omega \cap O_i \longrightarrow \mathbb{R}$

$\alpha_j u \circ \varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^n_+ \cap B_1 \longrightarrow \mathbb{R}$

(21)

$\Pi_q\, D_i u \in L^\infty$ $\iff$ $\Pi_q\, D_i u \in (L^1)'$. $D_i u \leq$ $(|D_i u(\varphi)| \leq \Pi \|\varphi\|_1)$

$$= -\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int \frac{1}{\frac{1}{n}}\left(u\left(x_1 - \frac{1}{n}, x_i\right) - u(x_i)\right)\varphi(x)\, dx}\ (\text{chg}^t \text{ var})$$

$$|\quad| \leq \int \Pi \cdot |\varphi(x)|\, dx \qquad (\Pi \text{ cste lip.})$$

Donc $\quad |D_i u(\varphi)| \leq \Pi \cdot \|\varphi\|_1 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$ dense d

on prolonge $D_i u \in (L^1)'$: $D_i u \in L^\infty$. OK.

I-4) Théorème de trace

* Objectif : $u \in H^1(\Omega)$, Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

Peut-on donner un sens à $u_{|\partial\Omega}$?

- Ω ouvert borné à ~~frontière~~ seulement lip., on montre que $W^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}(\bar\Omega)$ si $p > n$.

- Si $p > N$ et $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $u_{|\partial\Omega}$ a le sens classique.

ex : $p = 2$, $n \geq 2$ sait pas faire.

* $W^{1,\infty} \subset \mathcal{C}(\bar\Omega)$ toujours.

Th : $\Omega = \mathbb{R}^n_+$, $1 \leq p < \infty$. $(\partial\Omega = \{(0,y)\})$

$\gamma_0 : u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow u_{|\partial\Omega} \in \mathcal{C}_c^\infty \subset L^p(\mathbb{R}^{n-1})$

$(y \to u(0,y) = u_{|\partial\Omega})$

γ_0 est linéaire continue $(\|\cdot\|_{W^{1,p}} \to \|\cdot\|_{L^p})$ et γ_0 se prolonge par densité en

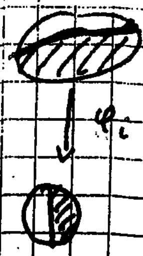
$$\gamma : W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^{n-1})$$

(opérateur trace)

→ Demo :

(23) • $g(x) = \alpha_i(x) f(x)$:

$\int_{O_i \cap \partial\Omega} g(x)\, d\sigma(x)$ et $O_i \cap \partial\Omega$.



$\varphi_i(O_i \cap \partial\Omega) = B_1 \cap \{(0,y),\ y \in \mathbb{R}^{N-1}\}$

• Si $y \in \underbrace{\{y \in \mathbb{R}^{N-1} / \|y\| < 1\}}_{(B_{1,N-1})}$; $\gamma(y) = \varphi_i^{-1}(0,y) \in O_i \cap \partial\Omega$.

(on paramétrise $O_i \cap \partial\Omega$)

On définit $\boxed{\int_{O_i \cap \partial\Omega} g(x)\, d\sigma(x) = \int_{B_{1,N-1}} g(\gamma(t)) \left\| \frac{\partial\gamma}{\partial y_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial\gamma}{\partial y_{N-1}} \right\|}$ (euclidien)

(cf $N=2$: $\int_{O_i \cap \partial\Omega} g = \int_{-1}^{1} g \circ \gamma(t)\, \underbrace{\|\gamma'(t)\|}_{\sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2}}\, dt$)

$[\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2]$

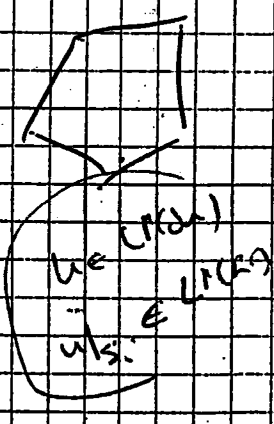
– Autre "déf" :

$\boxed{\int_{O_i \cap \partial\Omega} g(x)\, d\sigma(x) = \int_{B_{1,N-1}} g(\gamma(t))\, J(t)\, dt}$

$\gamma : B_{1,N-1} \subset \mathbb{R}^{N-1} \longrightarrow \mathbb{R}^N$

$D\gamma(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{N-1}, \mathbb{R}^N)$

$\mathrm{Dim}\,(\underbrace{\mathrm{Im}\, D\gamma(t)}_{H_t \text{ s.e.v } \mathbb{R}^N,\ \dim N-1}) = N-1$ (pp t)



donc $D\gamma(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{N-1}, H_t)$

base canonique classique — on choisit une base o.n

et $J(t) = |\det D\gamma(t)|$

• En effet, $N=2$ $\gamma : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$\mathrm{Im}\,(D\gamma(t)) = \mathbb{R}\gamma'(t) = H_t$

b.o.n de H_t : $\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = u$

$J(t) = \|\gamma'(t)\|$ ($D\gamma(t) = \|\gamma'(t)\| \cdot u$ $\in \mathbb{R}^{2}$)

$\mathrm{Mat}(D\gamma) = (\|\gamma'(t)\|)$

(25)

- Soit ρ_k approx. unité, $\operatorname{supp} \rho_k \subset \{x \in \mathbb{R}^N \mid -\frac{2}{k} \leq x_N \leq -\frac{1}{k}\}$

et $w_k = \rho_k * w$: comme w est unif. c et $w \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $w_k \xrightarrow[\mathbb{R}^N]{CU} w$.

- De plus $w_k \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ $(\operatorname{supp} w \subset B_N)$

$(\text{i.e. } w_k \in \mathscr{C}_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^N_+}))$

et $w_k \xrightarrow{L^p(\mathbb{R}^N)} w$ $(w \in L^p(\mathbb{R}^N)$ car $\operatorname{supp} w \subset B_N$

donc $w_k \xrightarrow{L^p(\mathbb{R}^N_+)} w$.

- Montrons que, dans $\mathbb{R}^N_+$, $D_i w_k = \rho_k * \underbrace{\widetilde{D_i w}}_{\in L^p(\mathbb{R}^N),\ 0 \text{ hors de } \mathbb{R}^N_+}$ sur $\mathbb{R}^N_+$

soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N_+)$ et calculons

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} w_k(x)\, D_i\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N_+} \rho_k(t)\, w(x-t)\, D_i\varphi(x)\, dx\, dt$$

$$= \int_{A_k} \rho_k(t) \Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^N_+} w(x-t)\, D_i\varphi(x)\, dx}_{\int_{\mathbb{R}^N_+ - t} w(v)\, D_i\varphi(v+t)\, dv} \Big)\, dt$$

$\to$ Or $\forall t \in A_k$, $\mathbb{R}^N_+ - t \subset \mathbb{R}^N_+$ $(t_N < 0)$

et $$\int_{\mathbb{R}^N_+} w(u)\, D_i\varphi(u+t) = \int_{\mathbb{R}^N_+ - t} w(v)\, D_i\varphi(v+t) + \int_{\mathbb{R}^N_+ \setminus (\mathbb{R}^N_+ - t)} w(v)\, D_i\varphi(v+t)$$

mais $\operatorname{supp} D_i\varphi \subset \mathbb{R}^N_+$ donc

$$D_i\varphi(v+t) \neq 0 \implies v+t \in \mathbb{R}^N_+$$
$$\implies v \in \mathbb{R}^N_+ - t$$

donc, sur $\mathbb{R}^N_+ \setminus (\mathbb{R}^N_+ - t)$, $D_i\varphi(v+t) = 0$

et $$\int_{\mathbb{R}^N_+} w(v)\, D_i\varphi(v+t) = \int_{\mathbb{R}^N_+ - t} w(v)\, D_i\varphi(v+t)$$

De plus, $\operatorname{supp}(D_i\varphi)$ est compact dans $\mathbb{R}^N_+$: $\exists \delta > 0$ tq

$\operatorname{supp} D_i\varphi \subset \{x \mid x_N > \delta\}$

$(\mathbb{R}^N_+ - t) \ldots \subset \{\ldots\} \ldots \delta - t \ldots \subset \mathbb{R}^N$ car $t_N < \ldots$

* Justification de :

$$\int_{O\cap\partial\Omega} f(x)\,d\sigma(x) = \int_{B_{N-1}} f\circ\gamma(y) \left\| \frac{\partial\gamma}{\partial y_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial\gamma}{\partial y_{N-1}} \right\| dy$$

. En effet, γ est une immersion qui représente $O\cap\partial\Omega$: $\gamma : B_{N-1} \longrightarrow O\cap\partial\Omega$ bijective bilip.

Ainsi $T_{\gamma(y)}(O\cap\partial\Omega)$ est $\mathrm{Vect}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y_1}(y),\ldots,\frac{\partial\gamma}{\partial y_{N-1}}(y)\right)$
$= \mathrm{Im}\,(d\gamma_{|y})$

Donc $\frac{\partial\gamma}{\partial y_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial\gamma}{\partial y_{N-1}}(y)$ est un vecteur orthogonal à $T_{\gamma(y)}(O\cap\partial\Omega)$ et, $n(\gamma(y))$ étant la normale extérieure à Ω, on a donc $n(\gamma(y)) = \pm \left\| \frac{\partial\gamma}{\partial y_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial\gamma}{\partial y_{N-1}} \right\|^{-1} \frac{\partial\gamma}{\partial y_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial\gamma}{\partial y_{N-1}}$. Quitte à prendre $\tilde\gamma(y) = \gamma(y_1,\ldots,-y_{N-1})$ on peut donc supposer

$$n(\gamma(y)) = \frac{\partial\gamma/\partial y_1\wedge\cdots\wedge\partial\gamma/\partial y_{N-1}}{\|\partial\gamma/\partial y_1\wedge\cdots\wedge\partial\gamma/\partial y_{N-1}\|}$$

. Ainsi, par définition,

$$\int_{O\cap\partial\Omega} f(x)\,d\sigma(x) = \varepsilon\int_{B_{N-1}} \gamma^*(f\,d\sigma)$$ ($\varepsilon = \pm 1$ selon l'orientation choisie sur $O\cap$

$$= \varepsilon\int_{B_{N-1}} f\circ\gamma(y)\ \gamma^*(\underbrace{i(n)\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_N}_{=d\sigma})(y)$$

et $\gamma^* d\sigma_{|y} = \underbrace{dx_1\wedge\cdots\wedge dx_N}_{\det}\left(n(\gamma(y)), d\gamma_{|y}(\cdot),\ldots,d\gamma_{|y}(\cdot)\right)$

donc, comme $\int_{B_{N-1}} \omega \underset{(\mathrm{def})}{=} \int_{B_{N-1}} \omega(e_1,\ldots,e_{N-1})\,dy_1\ldots dy_{N-1}$

on a $\int_{B_{N-1}} f\circ\gamma(y)\ \gamma^* d\sigma_{|y} = \int_{B_{N-1}} f\circ\gamma(y) \det\left(n(\gamma(y)), d\gamma_{|y}(e_1),\ldots, d\gamma_{|y}(e_{N-1})\right) dy$

$$= \int_{B_{N-1}} f\circ\gamma(y) \det\left(n(\gamma(y)), \frac{\partial\gamma}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial\gamma}{\partial y_{N-1}}\right) dy$$

16 ter

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \sum_e \int_{\partial\Omega\cap O_e} (\psi_e \omega) \qquad (\text{cf. + haut}, \ \varepsilon = (-1)^n)$$

$$= \sum_e \int_{B_{N-1}} \gamma_e^* (\psi_e \omega) = \sum_e \int_{B_{N-1}} \varepsilon\, \psi_e \circ \gamma_e \ \gamma_e^* \omega$$

et $\gamma_e^* \omega_{|y} = (-1)^i f_i \circ \gamma_e \ \underbrace{dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_N \,(d\gamma_{|y}(\cdot), \dots, d\gamma_{|y}(\cdot))}_{= \det_{(N,N)} \text{ en supprimant la } i^e \text{ ligne}}$

donc $\int_{B_{N-1}} \psi_e \circ \gamma_e \cdot f_i \circ \gamma_e \ \gamma_e^* \omega$

$$= \int_{B_{N-1}} (\psi_e f_i) \circ \gamma_e \ \det_{(-i^e \text{ ligne})} \left(\frac{\partial \gamma_e}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \gamma_e}{\partial y_{N-1}} \right) dy$$

$$\left(\text{car } \int_{B_{N-1}} \alpha = \int_{B_{N-1}} \alpha_y(e_1, \dots, e_{N-1})\, dy \quad \text{et } d\gamma_e(e_k) = \frac{\partial \gamma_e}{\partial y_k} \right)$$

$$\int_{O_e\cap\partial\Omega} \psi_e \omega = \int_{B_{N-1}} (\psi_e f_i) \circ \gamma_e \ \underbrace{\begin{array}{c} \\ i^e \text{ place} \rightarrow \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \\ 1 & \frac{\partial \gamma_e}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \gamma_e}{\partial y_{N-1}} \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{vmatrix}}_{= (-1)^i \det_{(-i^e \text{ ligne})} \left(\frac{\partial \gamma_e}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \gamma_e}{\partial y_{N-1}} \right)} dy$$

$$= \int_{B_{N-1}} (\psi_e f_i) \circ \gamma_e \ (-1)^n \ \underbrace{\det \left(\frac{\partial \gamma_e}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \gamma_e}{\partial y_{N-1}}, e_i \right)}_{\left\langle \underbrace{\frac{\partial \gamma_e}{\partial y_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \gamma_e}{\partial y_{N-1}}}_{\left\| \frac{\partial \gamma_e}{\partial y_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \gamma_e}{\partial y_{N-1}} \right\| n(\gamma(y))}, e_i \right\rangle} \quad e_i \ i^e \text{ vecteur de base}$$

donc $\left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial y_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \gamma}{\partial y_{N-1}}, e_i \right\rangle = \left\| \frac{\partial \gamma_e}{\partial y_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \gamma_e}{\partial y_{N-1}} \right\| \underset{\langle n, e_i \rangle}{\underset{\|}{n_i}} (\gamma(\cdot$

finalement $\int_{O_e\cap\partial\Omega} \psi_e \omega = \overbrace{\varepsilon (-1)^n}^{(=1)} \int_{B_{N-1}} \psi_e \circ \gamma_e \ f_i \circ \gamma_e \left\| \frac{\partial \gamma_e}{\partial y_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \gamma_e}{\partial y_{N-1}} \right\| n_i$

$$\left(\text{cf. + haut } \int_{O_e\cap\partial\Omega} g\, d\sigma = \int_{B_{N-1}} g \circ \gamma_e \left\| \frac{\partial \gamma_e}{\partial y_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \gamma_e}{\partial y_{N-1}} \right\| \right) = \int_{O_e\cap\partial\Omega} \psi_e \, f_i \ n_i(x)\, d\sigma(x)$$

et $\sum_e \int_{O_e\cap\partial\Omega} \psi_e \omega = \sum_e \int_{O_e\cap\partial\Omega} \psi_e (f_i n_i)\, d\sigma$

i.e. $\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\partial\Omega} f_i n_i \, d\sigma.$

(17) $\to$ ~~[illegible]~~

$\Rightarrow$ Kolmogorov : $1 \leq p < \infty$, Ω ouvert borné $\mathbb{R}^N$, $B \subset L^p$

B compacte $\Leftrightarrow$ $\exists$ $P : B \to L^p(\mathbb{R}^N)$

tq i) $Pu = u$ pp sur Ω.
ii) $\{Pu,\ u \in B\}$ bornée $L^p(\mathbb{R}^N)$
iii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tq $|h| < \delta$, $h \in \mathbb{R}^N$
$\forall u \in B \Rightarrow \| Pu(\cdot + h) - Pu \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon$

(cf Ascoli)

- ici, $Pu = u$ sur Ω
$= 0$ sur Ω^c

B bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. On veut mq B rel c $L^p(\Omega)$

(i) ok
(ii) B bornée $W^{1,p}$ $\Rightarrow$ B bornée L^p et $\|Pu\|_p = \|u\|_p$

(iii) ?

- Etape 1 : $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$:

$$u(x+h) - u(x) = \int_0^1 Du(x+th)(h)\, dt \quad \text{[Taylor ordre}$$

$$|u(x+h) - u(x)|^p \underset{\text{Holder}}{\leq} \int_0^1 \|Du(x+th)\|^p dt \left(\int_0^1 \|h\|^q dt\right)^{p/q}$$

$$(\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q,\ g = \|h\|)$$

$$\leq \left(\int_0^1 \|Du(x+th)\|^p dt\right) \cdot \left(\|h\|^p\right)$$

$\int_x$: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\underset{Pu}{u}(x+h) - u(x)|^p dx$

$$\leq \|h\|^p \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} \|Du\|^p dx\right) dt$$

$$\|\tau_h Pu - Pu\|_p \leq C_{p,N} \underbrace{\|Du\|_p}_{\text{bornée sur } B.\ (\leq \|u\|_{W^{1,p}})} \|h\| \quad \text{ok}$$

(norme eucl)

- Etape 2 : $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ dense $W_0^{1,p}$: on a la même chose $\forall u \in B$ (et même $\forall u \in W^{1,p}$)

$$\| u(\cdot + h) - u \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C_{p,N} \|h\| \, \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

(29) [$\exists P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ $\boxed{\text{lin} \; c}$ tq $Pu = u$ p.p., $\forall u \in W^{1,p}$

et Kolmogorov et $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ dense $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$]

* **Th**: Ω ouv. borné front. lip, $\underline{1 \leq p < \infty}$.
$\gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ trace
Alors γ compact (B borné $W^{1,p} \Rightarrow \gamma(B)$ rel. comp L^p)

. Demo : (Kolmogorov)

→ Rq : $p = 1$, $\gamma(W^{1,1}(\Omega)) = L^1(\partial\Omega)$ (γ surjectif)

$\Rightarrow \gamma$ non compacte

[Banach, γ surj, banach $\Rightarrow \gamma$ ouverte

$B = B(0,1)$ borné $W^{1}(\Omega)$

$\gamma(B)$ ouvert vois 0 rel compact.

compact $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset \Rightarrow \dim L^1(\partial\Omega) < \infty$]
[sauf $N = 1$]

I-6) Injections de Sobolev

* **Th** 1) $\Omega = \mathbb{R}^N$

(1) $W^{1,1}(\mathbb{R}^N) \underset{\substack{\text{inject} \\ \text{continue}}}{\hookrightarrow} L^{N/N-1}(\mathbb{R}^N)$ (demo par réc. sur N)

(2) $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ ($p < N$) [ramené à (1) sur u^k]

$p^* = \dfrac{pN}{N-p}$

($\hookrightarrow$ signifie $E \subset F$ et $u \to u$, $E \to F$ continue)

(3) $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset C^{0, 1-N/p}(\mathbb{R}^N)$ si $p > N$
($u \in C^{0,\alpha} \Leftrightarrow |u(x) - u(y)| \leq k |x-y|^\alpha$)

(4) $W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall N \leq q < \infty$

2) Ω ouvert borné $\mathbb{R}^N$

(1) $W_0^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{N/N-1}(\Omega)$

(2) $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ $p < N$

Démo de $W_0^{1,p}(\Omega) = \ker \gamma$

* ($\subset$) évident : $\forall u \in W_0^{1,p}$, $\exists u_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, $u_n \xrightarrow{W^{1,p}} u$

donc $\gamma(u) = \lim \gamma(u_n) = 0$.

* ($\supset$) Soit (O_i, φ_i) cartes de $\partial\Omega$. θ_i partition de l'unité de $\partial\Omega$ subordonnée aux O_i et $\theta_0 \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tq $\theta_0 + \theta_1 + \dots + \theta_n = 1$ sur $\bar{\Omega}$

. $u_i = \theta_i u \in W^{1,p}(\Omega)$: $\operatorname{supp}(u_0)$ compact dans Ω et, si $\gamma(u) = 0$

$\gamma(\theta_i u) = 0$ (soit $u_n \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$, $u_n \xrightarrow{W^{1,p}} u$ alors $\gamma(u_n) = u_{n|\partial\Omega} \xrightarrow{L^p} 0$

donc $\gamma(\theta_i u) = \lim_{L^p} \gamma(\theta_i u_n) = \lim_{L^p} \theta_{i|\partial\Omega} u_{n|\partial\Omega} = 0 \Rightarrow \gamma(\theta_i u) = 0$).

$(i \geq 1)$. $v_i = u_i \circ \varphi_i^{-1} \in W^{1,p}(B_+^N)$ et, si $u \in \ker \gamma$

en notant $\tilde{\gamma} : W^{1,p}(B_+^N) \longrightarrow L^p(B^{N-1})$

la trace sur $x_N = 0$, on a $\tilde{\gamma} v_i = 0$

{ car φ_i et φ_i^{-1} transportent les traces : γ_1 trace sur $W^{1,p}(\Omega_1)$,

γ_2 trace $W^{1,p}(\Omega_2)$ et $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ homéo Bilip,

alors $\forall u \in W^{1,p}(\Omega_2)$, avec $u_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\bar{\Omega}_2)$, $u_n \xrightarrow{W^{1,p}} u$

on a $u_n \circ \varphi \longrightarrow u \circ \varphi$ ds $W^{1,p}(\Omega_1)$ donc

$$\gamma_2(u \circ \varphi) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ L^p}} \gamma_2(u_n \circ \varphi) \underset{1)}{=} \lim_{L^p} u_n \circ \varphi_{|\partial\Omega_2}$$
$$\underset{2)}{=} \lim_{L^p} u_{n|\partial\Omega_1} \circ \varphi$$
$$= \lim_{L^p} \gamma_1(u_n) \circ \varphi \underset{3)}{=} \gamma_1(u)$$

car : 1) $u_n \circ \varphi \in W^{1,p}(\Omega_2) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$

2) $\varphi : \partial\Omega_1 \longrightarrow \partial\Omega_2$

3) $\begin{cases} L^p(\partial\Omega_2) \to L^p(\partial\Omega_1) \\ f \to f \circ \varphi \end{cases}$ est linéaire continue (Th chgt variable : φ homéo bilip. de

donc $\gamma_2(u \circ \varphi) = \gamma_1(u) \circ \varphi$ }

. De plus, $\operatorname{supp} v_i = \varphi_i(\operatorname{supp} u_i)$ est compact dans B

(θ_i à support compact dans O_i)

on a v_r à support compact dans Ω (pour r grd,

et $v_r \xrightarrow[r\to\infty]{} v_0 + \dots + v_n = v$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

- On voit alors que (pour r grand),

$$\tilde{v}_r = \begin{cases} v_r & \text{sur } \Omega \\ 0 & \text{hors de } \Omega \end{cases}$$

est dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ avec $D\tilde{v} = \widetilde{Dv}$

$\{ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, avec $\gamma \in \mathcal{E}_c^\infty(\Omega)$, $\gamma \equiv 1$ au vois. de supp v_r

$$\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{v}_r \cdot D_i\varphi = \int_\Omega v_r \, D_i(\gamma\varphi)$$

car $D_i(\gamma\varphi) = \underbrace{D_i\gamma}_{\substack{0 \text{ sur} \\ \text{supp } v_r}} \cdot \varphi + \underbrace{\gamma}_{1 \text{ sur supp } v_r} D_i\varphi$

$= D_i\varphi$ sur supp v_r

mais $\gamma\varphi \in \mathcal{E}_c^\infty(\Omega)$ donc

$$\int_\Omega v_r \, D_i(\gamma\varphi) = -\int_\Omega \underbrace{D_i v \cdot \gamma\varphi}_{D_i v \cdot \varphi} \quad (\gamma \equiv 1 \text{ sur supp}$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{D_i v} \cdot \varphi \quad \}$$

- Soit ρ_m approximation $\mathcal{E}_c^\infty(B(0,\frac{1}{m}))$ de l'unité.

$\tilde{v}_r * \rho_m \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et $\tilde{v}_r * \rho_m \xrightarrow{W^{1,p}} \tilde{v}_r$

(car $\nabla(\tilde{v}_r * \rho_m) = (\nabla\tilde{v}_r) * \rho_m$)

donc $\tilde{v}_r * \rho_{m|\Omega} \longrightarrow \tilde{v}_{r|\Omega} = v_r$ dans $W^{1,p}(\Omega)$

avec, de plus, $\tilde{v}_r * \rho_m \in \mathcal{E}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ à support

dans supp $\tilde{v}_r + \bar{B}(0,\frac{1}{m})$ compact de Ω dès

que $m \geq m_r$ $\quad (m_r > 1/d(\text{supp}(v_r); \Omega^c))$

- Ainsi, $\forall r$, $\exists M_r \geq 1$ tel que $\tilde{v}_r * \rho_{M_r} \in \mathcal{E}_c^\infty(\Omega)$

et $\| \tilde{v}_r * \rho_{M_r|\Omega} - v_r \|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \frac{1}{r}$

II Problèmes Elliptiques linéaires

II - 1) Formulation faible :

Ω ouvert borné $\mathbb{R}^N$, $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$

$$(1) \begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right) = f(x) & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{(Dirichlet)}$$

Hypothèse (E) $\exists \alpha > 0 \mid \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha \|\xi\|^2$ pp $x \in \Omega$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$

(ellipticité uniforme) [$\|\cdot\|$ eucl]

• **Ex:** $a_{ij} = \delta_{ij}$

$$(1) \begin{cases} -\Delta u = f \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

* **Déf:** $a_{ij} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$, $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, Ω régulier

(SFC) On dit que u est solution forte classique de (1) si u vérifie (1) au sens classique, $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$

* **Rmq:** Ω ouvert borné régulier (frontière $\mathcal{C}^\infty$)

u (SFC) de (1):

$$\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = f$$

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$

$\times$ par φ : $I'PP$

$$\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int f\varphi \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}'$$

$J(u+tv) = J(u) + t\,(2\,a(u,v) - T(v)) + t^2\,a(v,v)$

- u sol $(1)_V \Rightarrow J(u+tv) \geq J(u)$

$\Rightarrow \times\frac{1}{t},\ t>0,\ \times\frac{1}{t},\ t<0 \ :\ 2\,a(u,v) = T(v)$

- u sol $(1)_f \Rightarrow J(u+tv) = J(u) + t^2 \underbrace{a(v,v)}_{\geq 0 \text{ par } (E)}$ ok

* **Th** : Ω ouv. borné $\mathbb{R}^N$, $f \in L^2$, $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ vérifiant (E), alors $\exists!\ u$ sol de $(1)_f$.

▷ Démo : (Lax-Milgram) H Hilbert réel

$a : H \times H \to \mathbb{R}$ bil, $\mathcal{C}$, coercitive

$T(v) = \int f v \in (H_0^1)'$

$\Rightarrow \exists!\ u \in H \mid a(u,v) = T(v),\ \forall v \in H_0^1$

- (Démo : Lax Milgram) : due à Stampacchia

$\exists\, C>0,\ \alpha>0 \mid\ |a(u,v)| \leq C\|u\|\,\|v\|$

$a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2$

(1) $\exists\ A : H \to H$ linéaire continue tq

$a(u,v) = (Au, v),\ \forall (u,v) \in H$

▷ Soit $u \in H$, $v \mapsto a(u,v)$ linéaire $H \to \mathbb{R}$

Riesz : $a(u,v) = (x, v)$ $(\exists!\, x)$

on pose $Au = x$ ($x(u)$ linéaire ok)

$\begin{cases} u \to Au \\ H \to H \end{cases}$ linéaire ($a(\cdot,\cdot)$ bilin), A $\mathcal{C}$ car a $\mathcal{C}$

$(\ |(Au,v)| = |a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|$

$v = Au$, $\|Au\|^2 \leq C\|u\|\|Au\|\ )$

(2) $T \in H'$, $\exists\, z \mid T(v) = (z, v)$ (Riesz)

on veut mq $\exists!\, u \mid \langle Au, v\rangle = T(v)$

i.e. $A \begin{cases} \text{surjective} & (Au = z) \\ \text{injective} & (\exists!) \end{cases}$

On veut mq A iso.

$a(u,v) = (Au)(v)$

$u \to Au \in H$, $(Au|v) = a(u,v)$

A surjective Im?

A lin. cont.

$Au = 0 \Rightarrow u = 0$

$\mathrm{Im}(A)$ fermé

$Au_n \to z$

$\alpha\|u_n - u_m\|^2 \leq a(u_n - u_m, u_n - u_m)$

$u_n \to u$

$\mathrm{Im}(A)$ dense

$\mathrm{Im}(A)^\perp = \{0\}$ (par Lax)

(35) $\exists a>0 \mid \Omega \subset]-a,a[\times \mathbb{R}^{N-1}$ (borné ds 1 direct°)

$$\underbrace{u(x_1,y)}_{x} = \int_{-a}^{x_1} D_1 u(t,y)\, dt$$

$$u^2 \underset{C.S}{\leq} \left(\int_{-a}^{a} (D_1 u)^2 \right) \underbrace{2a}_{C_\Omega}$$

et $\int_\Omega u^2 \leq 4a^2 \int_\Omega (D_1 u)^2(x)\, dx \quad \forall u \in \mathcal{E}_c^\infty$

Par densité : $u \in H_0^1$, $u_n \in \mathcal{E}_c^\infty(\Omega)$, $u_n \xrightarrow{H^1} u$

donc $\|u_n\|_2^2 \leq C_\Omega \sum \|D_i u_n\|_2^2$

$\downarrow n\to\infty$

cqfd

Rappel (H) Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $a_{ij} \in C^1$ + ellipt. [illegible]

* **Déf** : Ω ouvert $\mathbb{R}^N$, $H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))'$

  $W^{-1,p}(\Omega) = (W_0^{1,p'})'$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

  si $1 \leq p' < \infty$, $1 < p \leq \infty$

Nt : $T \in H^{-1}(\Omega)$, $T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \quad \forall \varphi \in H_0^1$

* **Th** (∃! sol) : Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$

  vérifiant (E) et $f \in H^{-1}$ (f forme lin. c sur H_0^1)

  alors $\exists!\, u \in H_0^1 \mid \int_\Omega \sum a_{ij} D_j v D_i u = \langle f, v \rangle_{H^{-1}}$

  $\forall v \in H_0^1$

Dém (par Lax-Milgram : $T = f \in H_0^{1\,\prime}$)

(G c u T. faible, $T \in H^{-1}$)

• Ex : ① $\varphi \longmapsto \int f\varphi$ ~~$H_0^1 \to \mathbb{R}$~~ ~~lin. continue si $f \in L^2$~~ OK si $f \in L^1$ [illegible] $\in H^{-1}$

② $N=2$: $H_0^1 \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q$ fini.
(Ω borné)

$\|v\|_{L^q} \leq C_q \|v\|_{H_0^1}$

$f \in L^p$: $p > 1$, $\varphi \longmapsto \int f\varphi$ est lin. continue car par densité, T se prolonge à H_0^1 uniquement.

* Caractérisat° de $H^{-1}(\Omega)$, $W^{-1,p}(\Omega)$.

. $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, Ω ouvert $\mathbb{R}^N$ borné.

$T \in H^{-1} \iff \exists (g_1, \dots, g_n) \in L^2 \mid T = \sum_{i=1}^{n} D_i g_i$ ($D_i g_i$ ds sens distrib.)

$T \in W^{-1,p} \iff \exists (g_1, \dots, g_n) \in L^p \mid T = \sum_{i=1}^{n} D_i g_i = \operatorname{div} G$ où $G = (g_1, \dots, g_n)$

$(1 < p \leq \infty)$

~~1ère idée~~ $p \neq 2$ ($\Leftarrow$) $T = \sum D_i g_i$ $\langle T, \varphi \rangle = \int g_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \leq c \|\varphi\|_{W^{1,p'}}$

→ Démo : ($\Rightarrow$) $p = 2$ 1ère idée $\int g_i u\, dx \leq \dots$ $T = \sum D_i g_i$

($\Rightarrow$) $T \in H^{-1}$: $T : H_0^1 \to \mathbb{R}$ lin. c.

~~1 ere~~ ~~$W^{-1,p}$~~

$$\Theta : H_0^1 \longrightarrow (L^2)^N$$
$$u \longmapsto (D_1 u, \dots, D_n u)$$

Si $\varphi \in \Theta(H_0^1) \subset (L^2)^N$, $S(\varphi) = T(\Theta^{-1}(\varphi))$

On peut le définir car

Θ injective ; si $u \in H_0^1$, $\|u\|_{H_0^1} = \sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_2^2$

$\|.\|_{H_0^1} \sim \|.\|_{H^1}$ par poincaré

On munit H_0^1 de $\|.\|_{H_0^1}$ (ss Hilbert) et

Θ est une isométrie $H_0^1 \longrightarrow \Theta(H_0^1)$

. $S : \Theta(H_0^1) \longrightarrow \mathbb{R}$ lin. continue (Θ isométrie)

Hahn Banach : S se prolonge en

$$\bar{S} : \underbrace{(L^2)^N}_{\text{hilbert}} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Riesz : $\bar{S} = \langle \cdot, G \rangle_{(L^2)^N}$ pour un unique $G = (g_1, \dots, g$

$$\bar{S}(f) = \sum_{i=1}^{n} \langle f_i, g_i \rangle_{L^2}$$

$$\Rightarrow \underset{[\varphi = \Theta(u)]}{T(u)} = \sum_{i=1}^{n} \underset{\int g_i D_i u}{\langle D_i u, g_i \rangle_{L^2}} = \sum_{i=1}^{n} \underset{(-D_i g_i)(u)}{\langle -D_i g_i, u \rangle}$$

 pour tout $v \in \mathcal{D}_c(\Omega)$ (dense Π_0)

- u sol $(1)_f \iff \begin{cases} u \in H^1_0 \\ -\sum_{i,j} D_i(a_{ij} D_j u) = f \text{ ds } \mathcal{D}'(\Omega) \\ \text{(distribut°)} \end{cases}$

$\underbrace{\overbrace{\quad}^{\in L^2}}_{\in H^{-1}}$ (Σ de dérivées distr. de fct°)

* **Rq**: Ω non borné alors

$T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\quad T \in H^{-1} \iff \exists (g_0, \dots, g_n) \in L^2 /$

$$T = g_0 + \sum_{i=1}^{n} D_i g_i$$

(ex facile : $\theta : H^1_0 \to L^2 \times (L^2)^N$)

* **Résumé**: $f \in H^{-1} \Rightarrow \exists!\, u \in H^1_0$ sol $(1)_f$

$T_0 \begin{cases} f \longrightarrow u \\ H^{-1} \longrightarrow H^1_0 \end{cases}$ linéaire continue

$\left(\sum a_{ij} D_j u D_i v = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in \right.$

$\Rightarrow v = u$, $u \in H^1_0$, $\|f\|_{H^{-1}} \|u\|_{H^1_0} \geq \langle f, u \rangle \geq \alpha \underbrace{\int \sum D_i u^2}_{\alpha \|u\|^2_{H^1_0}}$

$\Rightarrow \|u\|_{H^1_0} \leq \lambda \|f\|_{H^{-1}})$

- $T_0 : L^2 \subset H^{-1} \longrightarrow H^1_0 \subset L^2$??

$(H_1) \begin{cases} (H) + \\ \text{symétrie} \end{cases}$

II-2) Analyse spectrale.

$(A) \begin{cases} D(A) - \\ A - \end{cases}$

$(H) \begin{cases} \Omega \text{ ouvert borné } \mathbb{R}^N \\ a_{ij} \in L^\infty(\Omega) \text{ vérifient } (E) \\ D(A) = \{ u \in H^1_0 \mid \underbrace{\sum_{i,j} D_i(a_{ij} D_j u)}_{\text{distr.} \in H^{-1}} \in L^2 \} \end{cases}$

$u \in D(A)$, on pose $Au = \sum_{i,j} D_i(a_{ij} D_j u)$

$\Rightarrow A : D(A) \subset L^2 \longrightarrow L^2$ est linéaire "non borné"

Rappel: $\forall f \in L^2$, $\exists!\, u \in D(A) / Au = f$

(41) et $\sum \int a_{ij} D_j v \, D_i w = \langle g, w \rangle$

$$\langle f, Tg \rangle = \sum \int a_{ij} D_j u \, D_i v$$

$$= \sum \int \underset{a_{ij}}{\underset{\parallel}{a_{ji}}} D_j v \, D_i u = \langle g, \underbrace{Tf}_{u} \rangle \quad \text{ok}$$

et $\langle Tf, f \rangle = \langle u, f \rangle = \int f u \qquad (u = Tf)$

$$= \sum_{i,j} \int a_{ij} D_i u \, D_j u$$

$$\geq \alpha \sum \|D_i u\|_2^2 \geq \alpha \|u\|_{H_0^1}^2 > 0 \text{ si } f$$

$(f \neq 0 \Rightarrow u \neq 0)$

- Conséquence

Th décomp spectrale $\quad \underline{T \in \mathcal{L}(E)} \quad$ E Banach

$\rightarrow \sigma(T) = \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid (T - \lambda I_d) \text{ non bijective} \}$

$V_p(T) = \{ \quad " \quad \text{injective} \}$

et 0 non v.a.p. $\quad \| V_p(T) = \sigma(T) - \{0\}$

$\| V_p(T) =$ suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\mu_n > 0$, $\mu_n \longrightarrow 0$
$\mu_{n+1} \leq \mu_n$

$\| \exists (e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tq $T(e_n) = \mu_n e_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
(e_n) base hilb. $L^2 \qquad (\ker T = \{$

$e_n \in D(A) \qquad (\mu_n e_n \in D(A))$
et $A e_n = \dfrac{1}{\mu_n} e_n = \lambda_n e_n$, $\quad \lambda_n \nearrow +\infty$

- $\forall u \in L^2$, $\quad u = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \langle u, e_n \rangle e_n \quad$ (c.v ds L

* On a, rappel, $\quad \forall f \in H^{-1}$,

$\exists!$ u sol. de $\quad (1) \begin{cases} u \in H_0^1 \\ \forall v \in H_0^1, \ \int D_j u \, D_i v \, a_{ij} = \langle f, v \end{cases}$

et $\| \ \|u\|_{H_0^1} \leq \dfrac{1}{\alpha} \|f\|_{H^{-1}} \qquad (\|f\|_{H^{-1}} = \sup_{v \in H_0^1} \{ \langle f,$

(43) $u \in D(A) \iff \sum_{n\geq 1} \langle u, e_n\rangle_2^2 \lambda_n^2 < \infty$.

Démo : ($\Rightarrow$) $u \in H_0^1$; $f = \sum_{ij} D_i(a_{ij} D_j u) \in L^2$

$u = Tf$, $f = \sum \langle f, e_n\rangle e_n$

$u = \sum \langle f, e_n\rangle \mu_n e_n$ (T linéaire)

$= \sum \langle u, e_n\rangle e_n$

$\Rightarrow \lambda_n \langle u, e_n\rangle = \langle f, e_n\rangle$

or $\sum \langle f, e_n\rangle^2 < \infty$ (th. Riesz) ($f \in L^2(\Omega)$)

($\Leftarrow$) $\sum \langle u, e_n\rangle \lambda_n e_n$ CV L^2 (pas Δ-c) (par Cauchy)

$\left[\|\sum_p^q \langle u, e_n\rangle \lambda_n e_n\|^2 = \sum_p^q \langle u, e_n\rangle^2 \lambda_n^2 \xrightarrow[p,q\to\infty]{} 0 \right]$

$f = \sum \langle u, e_n\rangle \lambda_n e_n$ (CV ds L^2)

$Tf = \sum \langle u, e_n\rangle e_n$ (T lin. c)

$= u \Rightarrow u \in D(A)$ ($T : L^2 \to D(A)$)

2) Caractérisation de λ_1 (1^e v.ap) [$\lambda_1 > 0$, $\lambda_1 \leq \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$]

. On a $\left[\lambda_1 = \inf \left\{ \dfrac{\sum_{ij}\int_\Omega a_{ij} D_i u D_j u}{\int_\Omega u^2 dx} , u \in H_0^1 \setminus \{0\} \right\} \right.$

Démo : 1) $u \in D(A) \setminus \{0\}$

$\sum_{ij} \int_\Omega a_{ij} D_i u \, D_j u \, dx = \int_\Omega Au \cdot u \, dx$

$f = Au$: $f = \sum \langle f, e_n\rangle e_n$ ($= \cancel{\sum \lambda_n \langle u, e_n\rangle e_n}$)

$u = Tf = \sum \langle f, e_n\rangle \dfrac{e_n}{\lambda_n} = \sum \langle u, e_n\rangle e_n$

et $\int_\Omega Au \cdot u = \langle Au, u\rangle = \sum_{n\geq 1} \langle u, e_n\rangle^2 \lambda_n$

$\geq \lambda_1 \sum_{n\geq 1} \langle u, e_n\rangle^2$

$\geq \lambda_1 \langle u, u\rangle$

* On a vu (cf feuille 43) que

$$D(A) = \{ v \in L^2(\Omega) \mid \sum \lambda_n^2 \langle v, e_n\rangle^2 < \infty \}$$

On définit alors, $\forall s \in \mathbb{R}$,

$$D(A^s) = \{ v \in L^2(\Omega) \mid \sum \lambda_n^{2s} \langle v, e_n\rangle^2 < \infty \}$$

et on va voir que

$$D(A^{1/2}) = H_0^1(\Omega)$$

(C) Soit $v \in L^2(\Omega) \mid \sum \lambda_n \langle v, e_n\rangle^2 < +\infty$

Alors $v = \sum_{n \geq 1} \langle v, e_n\rangle e_n$ dans L^2, i.e

$$\sum_{n=1}^{N} \langle v, e_n\rangle e_n \xrightarrow{N\to\infty} v \text{ dans } L^2$$

donc $\nabla\left(\sum_{n=1}^{N} \langle v, e_n\rangle e_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \langle v, e_n\rangle \nabla e_n \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{D}'} \nabla v$

$(e_n \in D(A) \subset H_0^1)$

. Or si $v_N = \sum_{n=1}^{N} \langle v, e_n\rangle e_n$, si $a = ((a_{ij}))$,

$$a\nabla v_N \cdot \nabla v_N = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} \langle v, e_n\rangle \langle v, e_m\rangle a\nabla e_n \cdot \nabla e_m$$

donc $\int a\nabla v_N \cdot \nabla v_N = \sum_{n,m} \langle v, e_n\rangle\langle v, e_m\rangle \underbrace{\int a\nabla e_n\cdot\nabla e_m}_{\lambda_n \underbrace{\int e_n \cdot e_m}_{\delta_{n,m}}}$

donc $\alpha \|\nabla v_N\|_{L^2}^2 \leq \int a\nabla v_N \cdot \nabla v_N = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle v, e_n\rangle^2$

$\leq M$ indépendant de N $(v \in D(A))$,

i.e. ∇v_N est bornée L^2 donc v_N est bornée H_0^1.

H_0^1 étant un Hilbert, une sous-suite de v_N (encore notée v_N) converge vers $v \in H_0^1$ dans H_0^1 - faible.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Donc } v_N \xrightarrow{\mathcal{D}'} v \\ \text{Or } v_N \xrightarrow{L^2} v \end{array}\right\} \Rightarrow v = v \in H_0^1.$$

(45) 3) On peut mq, si $f \in L^2$, Ω ouvert borné régulier

$$Tf(x) = \int_\Omega G(x,y)\, f(y)\, dy, \quad G \text{ fct° avec } G \in L^2(\Omega\times\Omega) \quad (N=2 \text{ et } 3)$$

T est un opérateur de Hilbert - Schmidt

(ts ces op. sont compacts et $\sum \mu_n^2 < \infty$)

II-3) Régularité des solutions faibles, solutions fortes.

* Question : Si $f \in L^2$, u sol $(1)f$, $u \in H^1_0(\Omega)$

peut-on mq u mieux H^1_0 ?

. En effet : u sol $(1)f \Rightarrow u \in H^1_0$ et

$$-\Delta u = f \in L^2 \qquad (a_{ij} = \delta_{ij})$$

$$\sum_i D_i D_i u \in L^2 \Rightarrow \forall i,j,\ D_i D_j u \in L^2 \quad (\text{i.e. } u \in H^2_0)$$

. **Th 1** : Ω ouvert borné de $\mathbb{R}$ à frontière $\mathcal{C}^2$, (H)

$a_{ij} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$, ~~vérifient~~ (E)

$f \in L^2(\Omega)$, u sol. de $(1)f$ alors $u \in H^2(\Omega)$

De plus $\|u\|_{H^2} \leq C(\Omega, a_{ij})\, \|f\|_2$

Rq : . $u \in H^2_0 = \overline{\mathcal{C}^\infty_c}^{H^2} \Rightarrow u = 0$ sur $\partial\Omega$

et $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega$ (γ tgte $\partial\Omega$)

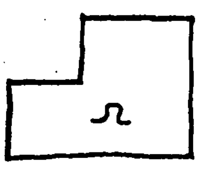
D(A) = $H^2 \cap H^1_0$

[i.e. $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \sum_{i=1}^{N} \gamma(D_i u)\, n_i$

γ trace, $\gamma(D_i u) \in L^2(\partial\Omega)$ car $D_i u \in H^1$, $\gamma : H^1 \to L^2(\partial\Omega)$

$$H^2_0 \neq H^1_0 \cap H^2$$

* Contre - ex : si Ω non $\mathcal{C}^2$:



$a_{ij} = \delta_{ij}$ $\quad (Au = -\Delta u)$

$\exists f \in L^2 \mid u$ sol $(1)f$ vérifie donc $(2) f \begin{cases} \langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int f v \\ u \in H^1_0 \end{cases}$ $(a_{ij} = \delta_{ij})$

<u>Riesz</u> : $\forall\ \ell \in H^{-1}(\Omega)$, $\exists!\ u \in H^1_0$ |

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle \ell, v \rangle_{H^{-1}, H^1_0} \quad \forall v \in H^1_0.$$

. De plus $\|u\|^2_{H^1} \leq \|\ell\|_{H^{-1}} \|u\|_{H^1}$ $(v = u)$

$\|u\|_{H^1} \leq \|\ell\|_{H^{-1}}$ (et $=$ par Riesz)

<u>Idée démo</u> : $a_{ij} = \delta_{ij}$

$-\Delta u + u = g$ on veut dériver / i : $u \in H^1_0$

$-\Delta(D_i u) + D_i u = D_i g$: $D_i u \in H^1_0$?

$D_i u$ sol pb avec $D_i g$: $\|D_i u\|_{H^1} \leq \|D_i g\|_{H^{-1}} \leq \|g\|$

(i.e. $D_i u \in H^1$)

Mais on ne peut dériver $|\leftarrow$ bord

On pose donc $h \in \mathbb{R}$, $T_h u(x) = \dfrac{u(x_1, x_2 + h, \dots x_n) - u(x_i)}{h}$.

$\to$ Si $u \in H^1_0$, $T_h u \in H^1_0$ (on dérive // frontière $|\uparrow$)

$\to (\Rightarrow)$, $T_{-h}(T_h u) \in H^1_0$ donc $v = T_{-h}(T_h u)$

$$\langle u, T_{-h}(T_h(u)) \rangle = \int g v$$

i.e. $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(T_{-h}(T_h(u))) + \int u\, T_{-h}(T_h u) = \int g\, T_{-h}($

<u>Rq</u> : $\nabla(T_h(u)) = T_h(\nabla u)$

$$\int u_1 T_h u_2 = \int u_1(x) \left[\frac{1}{h}\left(u_2(x + \bar{h}) - u_2(x)\right)\right] dx$$

$(\bar{h} = (0, h, 0, \dots, 0))$

$$= \int \left(u_1(x + \bar{h}) - u_1(x)\right) \frac{1}{-h}\, u_2(x)$$

$$= -\int T_h u_1 \cdot u_2 .$$

49

• (l1) $\|T_h g\|_{H^{-1}} = \sup \{ \int T_h g\, \varphi , \ \forall \varphi \in H^1_0, \ \|\varphi\|_{H^1_0} \leq 1 \}$

$$\Rightarrow \int T_h g\, \varphi\, dx = - \int g\, T_{-h} \varphi \ dx$$

$$T_{-h} \varphi = \frac{1}{-h} \left(\varphi(x_1, x_2 - h, \dots) - \varphi(x_1, x_2, \dots) \right)$$

$$\Rightarrow \|T_{-h}\varphi\|_2 \leq \|D_2 \varphi\|_2 \leq \|\varphi\|$$

(c Rellich) [$\int$ dérivée $\mathcal{C}^1$ et densité]

Donc $\left| \int T_h g\, \varphi \right| \leq \|g\|_2 \, \|T_{-h}\varphi\|_2$

$\leq \|g\|_2 \, \|\varphi\|_{H^1}$

$\boxed{C = 1}$ $\left(\|T_h g\|_{H^{-1}} \leq \|g\|_2 \right)$

• (l2) il suffit $u \in L^1_{loc}$ $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\int T_h u\, \varphi = - \int_K u \left(T_{-h} \varphi \right)$$

CU (φ $\mathcal{C}^2$)

$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$

$- \int u \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$ ok

• Rq : $a_{ij} \neq \delta_{ij}$?

a_{ij} dép x : $T_h (a_{ij} D_j u)$

$= \frac{1}{h} \left(a_{ij}(x+h) D_j u(x+h) - a_{ij}(x) D_j u(x) \right)$

$= a_{ij}(x)\, T_h D_j u(x) + T_h(a_{ij}) D_j u($

et a_{ij} $\mathcal{C}^1 \cap$ lip : $T_h a_{ij}$ borné

* On a donc $\left| \begin{array}{l} u \in H^1_0(\Omega) \\ \Delta u \in L^2 \end{array} \right. \Rightarrow u \in H^2$ et $\|u\|_{H^2} \leq C_\Omega \|$

• Ceci est le théorème de régularité jusqu'au bord :

(51) 1) (local, rég intérieure) Ω ouvert borné suffit)

$$f \in H^m_{loc}(\Omega) \Rightarrow u \in H^{m+2}_{loc}$$

2) (rég intérieure, Ω ouvert borné) :

$$f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \Rightarrow u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$$

3) (rég bord) Ω fr $\mathcal{C}^\infty$:

$$f \in H^m(\Omega) \Rightarrow u \in H^{m+2}(\Omega)$$

• En particulier, si $f \in H^m(\Omega)$, $m > \frac{N}{2}$, $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$

(th inj Sobolev)

4) (rég bord)

$$f \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}) \Rightarrow u \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$$

→ Démo : on dérive l'équat°.

* Autres résultats de régularité : (cadre non hilbertien)

$a_{ij} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ vérifient (E), Ω ouvert borné rég à fr $\mathcal{C}^2$, $f \in H^{-1}(\Omega)$ et u sol faible P6.

1] • $f \in L^2 \Rightarrow u \in H^2$

2] • On peut mq $f \in L^p(\Omega) \Rightarrow u \in W^{2,p}(\Omega)$ $(\forall\ p \geq 2)$

[cf devoir : noyau de Green $u(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y)$

3] • $f \in H^{-1} = W^{-1,2} \Rightarrow u \in H^1_0$

4] • On peut mq $f \in W^{-1,p} \Rightarrow u \in W^{1,p}(\Omega)$ $(\forall p \geq 2)$

$(W^{-1,p} \subset W^{-1,2} = H^{-1}$ si $p \geq 2)$

• $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ vérifie (E)

$f \in H^{-1} \Rightarrow u \in H^1_0$ (ok)

1), 2] s'effondrent

.. $\| ?$ . . . $\mathcal{D} \subset W^{-1,p}$ . . . . $\Rightarrow u \in W^{1,p}$

(53) → Démo L1 : $u \in H_0$: $\exists\, u_n \in \mathcal{D}(\Omega) \xrightarrow{\;''\;} u$

$u_n \xrightarrow{L^2} u$ et pp | et à 1 suite, $|u_n| < F$, $F \in L^2$

$D_i u_n \xrightarrow{L^2} D_i u$ et pp | et $|D_i u_n| < F_i \in L^2$

• $\varphi \circ u_n \in \mathcal{C}^1_c(\Omega)$ car $\varphi(0) = 0$.

→ or $|\varphi(s)| \leq M|s|$, $M = \|\varphi'\|_\infty$

$\varphi(u_n) \longrightarrow \varphi(u)$ pp $(\varphi\ c)$

$|\varphi(u_n)| \leq MF \in L^2$ $\underset{\text{CV dominée}}{\Rightarrow}$ $\varphi(u_n) \xrightarrow{L^2} \varphi(u)$

→ $D_i \varphi(u_n) = \varphi'(u_n)\, \underbrace{D_i u_n}_{\frac{\partial u_n}{\partial x_i}}$ (pp)

$\varphi'(u_n) \xrightarrow{pp} \varphi'(u)$, $D_i u_n \xrightarrow{pp} D_i u$

$D_i(\varphi \circ u_n) \xrightarrow{pp} \varphi'(u) D_i u$

$|D_i \varphi \circ u_n| \leq M F_i \in L^2$

CV dominée : $D_i(\varphi \circ u_n) \xrightarrow[\mathcal{D}']{L^2} \varphi'(u) D_i u$

or $D_i(\varphi(u_n)) \xrightarrow{\mathcal{D}'} D_i(\varphi(u))$

$(\varphi(u_n) \xrightarrow{\mathcal{D}'} \varphi(u))$

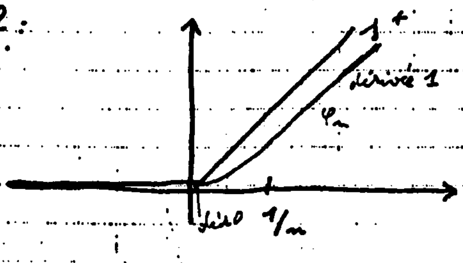
Donc $D_i \varphi(u) = \varphi'(u) D_i u$

⇒ $\varphi(u) \in H^1(\Omega)$, $D_i \varphi(u) = \varphi'(u) D_i u$

→ $\varphi(u) \in H^1_0$ car $\varphi(u_n) \in H^1_0$

et $\varphi(u_n) \xrightarrow{H^1} \varphi(u)$: $\varphi(u) \in H^1_0$ fermé

→ Démo L2 :



$\varphi_n(s) = 0$, $s < 0$

$= \frac{n}{2} s^2$, $0 < s < \frac{1}{n}$

$= s - \frac{1}{2n}$, $\frac{1}{n} < s$

$\varphi_n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$\varphi_n(s) \xrightarrow[n \to \infty]{} s^+$ $(\forall s \in \mathbb{R})$

$\varphi'_n(s) = 0$, $s \leq 0$ et $\varphi'_n(s) \longrightarrow 1$ $\forall s$

(35) Donc $0 \le \int_\Omega |Du^+|^2 \le \int \underbrace{f(x)}_{\le 0} \underbrace{u^+(x)}_{\ge 0} \le 0$

$\Rightarrow \|u^+\|_{H^1_0} = 0 \qquad (\|Du^+\|_2^2 = 0$

$u^+ = 0 \Rightarrow u \le 0$ pp.

* Conséquences:

① Ω ouvert borné $\mathbb{R}^n$ à fr $\mathcal{C}^\infty$, $a_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(\bar\Omega)$,
$f \in L^\infty(\Omega)$, u sol $(1)_f$
Alors $u \in L^\infty(\Omega)$ et $\|u\|_\infty \le C_{\Omega, a_{ij}} \|f\|_\infty$.

Démo: v sol. $(1)_f$, $f = 1$, $v \in \mathcal{C}^\infty(\bar\Omega)$

$u - v\|f\|_\infty$ sol Pb $(1)_f$ avec $f - \|f\|_\infty$

$u + v\|f\|_\infty$ sol Pb $(1)_f$ avec $f + \|f\|_\infty$

$-v\|f\|_\infty \le u \le v\|f\|_\infty$

② On peut mq $f \in \mathcal{C}^3(\bar\Omega) \Rightarrow u \in \mathcal{C}^2(\bar\Omega)$

(on dérive 3 x l'éq et $D^3u \in L^\infty$ $\Rightarrow D^2u \in \mathcal{C}$)

II-5] Autres Pb Elliptiques

- $a_{ij} = \delta_{ij}$ pour simplifier

1) Cond aux limites non homogènes

$$(1)\ \begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

- $f \in H^{-1}(\Omega)$, $g \in \gamma(H^1) = H^{1/2}(\Omega)$ (γ trace)

$g \in H^{1/2}(\Omega) \Rightarrow \exists\ G \in H^1(\Omega) \mid \gamma(G) = g$ sur $\partial\Omega$

- (1) $\{ -\Delta u = f$ sur Ω

(57) **Th** : Ω ouvert borné, $f \in L^2(\Omega)$,
$\exists!$ u sol. $(1)_f$

$\rightarrow$ Démo : Th Riesz.

$$v \to \int f v \quad \in \quad H^1 \to \mathbb{R}.$$

* Rq : 1) on peut remplacer $f \in L^2$ par $T \in (H^1)'$

On ne peut identifier $T \in (H^1)'$ avec $T_{|\mathcal{D}(\Omega)} \in \mathcal{D}'$ (car) $T_{|\mathcal{D}(\Omega)} = S_{|\mathcal{D}(\Omega)}$, $T, S \in (H^1)'$ $\not\Rightarrow$ $T = S$ sur H^1.

($\mathcal{D}(\Omega)$ non dense H^1)

Ex : $N = 1$, $\Omega =]0,1[$, $T = 0$

$S(v) = v(0)$, $v \in H^1(\Omega)$

$T \neq S$ et $T_{|\mathcal{C}_c^\infty} = S_{|\mathcal{C}_c^\infty} = 0$

2) Si $f \in L^2$, Ω fr rég, $u \in H^2$

alors $\begin{cases} -\Delta u + u = f & pp \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \sum\limits_{i=1}^{N} \gamma(D_i u) \cdot n_i = 0 & pp \end{cases}$

Démo : $\int \nabla u \nabla v + \int u v = \int f v \quad \forall v \in H^1$

. $v \in \mathcal{C}_c^\infty \Rightarrow -\Delta u + u = f$ ds $\mathcal{D}'(\Omega)$

Si $u \in H^2$, $-\Delta u + u = f$ p.p (2 fct° L^2

. $v \in H^1$, $D_i u \in H^1$: IPP,

$$\int \nabla u \nabla v + \int u v = \int f v$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int \gamma(D_i u)\, \gamma(v) n_i \underbrace{- \int_\Omega \Delta u\, v + \int u v}_{0 \quad (-\Delta u + u = f)} = \int f v$$

Donc $\sum\limits_i \int_{\partial\Omega} \gamma(D_i u) n_i\, \gamma(v)\, d\sigma(x) = 0$

$\forall v \in H^1$, $\int_{\partial\Omega} \left(\sum \gamma(D_i u) n_i\right)(\gamma(v)) = 0$

4) Cond. mêlées

$\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_0 \amalg \Gamma_1$

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u = g \text{ sur } \Gamma_0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial n} = h \text{ sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

5) Opérateurs elliptiques ordre pair

$$\begin{cases} \Delta(\Delta u) = f \\ C.L \end{cases}$$

où C.L : $\begin{cases} u = 0 \\ \Delta u = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} u = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \end{cases}$

Equations elliptiques non linéaires

Stokes

III-1) Inéquations variationnelles

1-1) Théorème de Stampacchia

* **Th** (Stampacchia). H Hilbert réel, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ bilinéaire continue coercive, $T \in H'$, K convexe fermé $\neq \phi$ de H alors

$\exists !\, u$ solution de

$$\text{(S) (inéq. var)} \begin{cases} u \in K \\ a(u, v-u) \geqslant T(v-u), \quad \forall v \in K \end{cases}$$

→ Rq : On reobtient L.M. avec $K = H$

Démo : Etape 1 : $\exists A : H \to H$ lin. $\mathcal{C}$ tq

$\langle A \ldots \rangle \quad \langle \ldots \rangle \quad \langle R \ldots \rangle \quad \forall\ldots$

61

$$(A(u-v), u-v) = a(u-v, u-v) \geq \alpha \|u-v\|^2$$

$$\|\phi(u)-\phi(v)\|^2 \leq (1-2\alpha\rho)\|u-v\|^2 + \rho^2\|A\|^2\|u-v\|^2$$

or $\|A\| \leq \|a\| = C$

$$\leq \underbrace{(1-2\alpha\rho+\rho^2C^2)}_{k}\|u-v\|^2$$

et $k \in]0,1[$ si $0 < \rho < \frac{2\alpha}{C^2}$

($1-2\alpha\rho+\rho^2C^2 < 1$ si $\rho^2C^2 < 2\alpha\rho$: $\rho < \frac{2\alpha}{C^2}$)

* Rmq : Sous hypo Stamp, si a est symétrique,

u sol (S) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} u \in K \\ u \text{ minimise } J : J(u) \leq J(v) \; \forall v \in K \end{cases}$

où $J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - T(v)$.

En effet, $J(u+tw) = \frac{1}{2}a(u,u) + t\,a(u,w) + \frac{1}{2}t^2 a(w,w) - T(u) - tT(w)$

$= J(u) + t(a(u,w) - T(w)) + \frac{t^2}{2}a(w,w)$

$\forall (u,w) \in H$, $\forall t$.

- u sol(S) $\Rightarrow$ $\forall w = v-u$, $v \in K$, $t=1$: $a(u,w) \geq T(w)$

$\Rightarrow J(u+w) = J(v) \geq J(u) + \underbrace{\frac{a(w,w)}{2}}_{\geq 0}$

- u minimise $\Rightarrow$ $t(a(u,w) - T(w)) + \frac{t^2}{2}a(w,w) \geq 0$

$\forall w$ tq $u+tw \in K$

$v \in K$, $w = v-u$, $u+tw \in K$ $\forall t \in]0,1]$ (convexe)

et $(t \neq 0)$ $a(u,w) - T(w) + \frac{t}{2}a(w,w) \geq 0$

$\underset{(t \to 0^+)}{\Rightarrow}$ $a(u, v-u) \geq T(v-u)$ OK

(67)

→ Or $T \in H^{-1}$: $T|_{\mathcal{D}_c} \in \mathcal{D}'$

$\exists\, S \in \mathcal{D}' \mid \langle T, \varphi\rangle_{H^{-1}, H^1_0} = \langle S, \varphi\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}$
$\forall \varphi \in \mathcal{D}$

. Si $\exists\, f \in L^1_{loc}(\Omega) \mid S = T_f$ (on identifie distrib à L^1_{loc})

$T(\varphi) = \langle T, \varphi\rangle_{H^{-1}, H^1_0} = \langle S, \varphi\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}$

$= \int f\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$
" $(f, \varphi)_{L^2}$

→ $\langle T, \varphi\rangle = (u, \varphi)_{H^1_0} = (f, \varphi)_{L^2}$

Or $\boxed{u \neq f}$

i.e. $\exists!\, u \in H^1_0 \mid \int \nabla u \nabla \varphi = \langle T, \varphi\rangle_{H^{-1}, H^1_0}$

$\exists!\, f \in L^2 \mid \int f\varphi = \langle T, \varphi\rangle_{H^{-1}, H^1_0}$

On ne peut confondre u et f

. On identifie $T = f$ <u>mais</u> on ne peut plus identifier T avec u.

L'isomorphisme $H^{-1} \longrightarrow H^1_0$ donné par Riesz est $f \longrightarrow u \in H^1_0$ (même id. fai[te]
$(-\Delta u = f)$ et $T \to u$
$f \to u$)

⊛ On identifie

$L^1_{loc} \hookrightarrow \mathcal{D}'$

on ne peut plus dire $H^{-1} = H^1_0$: 2 identif ≠

(Th)

↦ K est fermé car $u_n \leq \psi$ pp

$u_n \xrightarrow{H^1} u$

$u_n \xrightarrow{pp} u$ ss-suite $\Rightarrow u \leq \psi$ pp

* <u>Rq</u> : <u>$K \neq \phi$?</u>

1) $\psi \in H^1_0$: $K \neq \phi$

2) Si $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$, $\psi \geq 0$: $K \neq \phi$ $(0 \in K)$

(b) • on peut mq $\exists \mu$ mesure sur $\mathcal{B}(\Omega)$

tq $\langle T, \varphi \rangle = \int \varphi \, d\mu$

2) $u \in H^2_{loc}$, $\Delta u + f$ distr. ≥ 0

• Si $F \in L^1_{loc}$, F distrib ≥ 0 $\left(\int F\varphi \geq 0 \ \forall \varphi \right)$

alors $F \geq 0$ pp

<u>En effet</u> : $\Omega = \bigcup K_n$, K_n compacts

ρ_m app unité $\in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$

$F \mathbb{1}_{K_n} * \rho_m \geq 0$ sur compact + petit K_n

et limite : $F \mathbb{1}_{K_n} \geq 0$ "

• $\Delta u + f \in L^2_{loc} \subset L^1_{loc} \Rightarrow \Delta u + f \geq 0$ pp

(distr. ≥ 0)

• Mq $(\Delta u + f)(u - \psi) = 0$ pp

<u>1er cas</u> : $u \in H^2$, $\psi \in H^1_0$.

$\int \nabla u \, \nabla(v - u) \geq \int f(v - u)$, $v = \psi$

$\int \nabla u \, \nabla(\psi - u) \geq \int f(\psi - u)$.

c. $u \in H^2$, IPP : $-\int \Delta u (\psi - u) \geq \int f(\psi - u)$

$$\int \underbrace{(\Delta u + f)}_{\geq 0} \underbrace{(\psi - u)}_{\geq 0} \leq 0$$

$\Rightarrow (\Delta u + f)(\psi - u) = 0$ pp

• <u>2e cas</u> : $u \in H^2_{loc}$, $\psi \in H^1$, $\psi \geq 0$.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$, $\varphi \geq 0$: $\varphi \in [0,1]$

$v = u + (\psi - u)\varphi \in H^1_0$ (supp φ compact)

$= (1 - \varphi) u + \varphi . \psi \leq \psi$ $\in K$

$\int \nabla u . \nabla ((\psi - u) \varphi) \geq \int f (\psi - u) \varphi$

$\exists \ \overline{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ | $\overline{\varphi} = 1$ sur supp φ.

$\int \nabla(\overline{\varphi} u) \, \nabla(\psi - u)\varphi = \int \nabla u \, \nabla(\psi - u)\varphi) = \int$ ...

p 7) Donc $|h| < \eta_\varphi$, $\eta_\varphi = d(\operatorname{supp}\varphi, \partial\Omega)$

$$T_{-h}(\varphi^2 T_h u) \in H^1_0$$

. Mq $v \leqslant \psi$ pp si ε petit.

$$v(x) = u(x) + \frac{\varepsilon}{-h}\left(\varphi^2(x-h)\,\frac{u(x)-u(x-h)}{h} - \varphi^2(x)\,\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right)$$

$$= \underbrace{u(x)}_{\leq a}\left(1 - \frac{\varepsilon}{h^2}\varphi^2(x-h) - \frac{\varepsilon}{h^2}\varphi^2(x)\right)$$

$$+ \frac{\varepsilon}{h^2}\left(\varphi^2(x-h)\right)\underbrace{u(x-h)}_{\leq a} + \frac{\varepsilon}{h^2}\varphi^2(x)\underbrace{u(x+h)}_{\leq a}$$

$\leqslant a$ si on a 1 comb. convexe,

i.e. $\frac{\varepsilon}{h^2}\varphi^2(x-h) \geqslant 0$

$\frac{\varepsilon}{h^2}\varphi^2(x) \geqslant 0$

$1 - \frac{\varepsilon}{h^2}\varphi^2(x-h) - \frac{\varepsilon}{h^2}\varphi^2(x) \geqslant 0$

$\Rightarrow \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}h^2\|\varphi^2\|_\infty^{-1}$ ok

• $\varepsilon\int_\Omega \nabla u\,\nabla T_{-h}(\varphi^2(T_h u)) \geqslant \varepsilon\int f\,T_{-h}(\varphi^2 T_h u)$

$$\| $$

$$-\int \nabla(T_h u)\,\nabla(\varphi^2 T_h u) \geqslant -\int T_h f\,\varphi^2 T_h u$$

$$\Rightarrow \int \nabla(T_h u)\,\underbrace{\nabla(\varphi^2 T_h u)}_{\nabla(\varphi^2)\,T_h u + \varphi^2 \nabla T_h u} \leq \int T_h f\,\varphi^2 T_h u$$

Donc $\int \varphi^2|\nabla T_h u|^2 \leq \int (\varphi T_h f)\cdot(\varphi T_h u)$

$$+2\int |\nabla(T_h u)\,.\,\varphi\,.\,(\nabla\varphi)(T_h u)|$$

et $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ $\quad$ ($a = \varphi\nabla T_h u$, $b = 2\,\nabla\varphi T_h u$)

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \varphi^2|\nabla T_h u|^2 \leq \int (\varphi T_h f)\cdot(\varphi T_h u) + 2\int |\nabla\varphi T_h u$$

$$\leq \|\varphi T_h f\|_{H^{-1}}\,\|\varphi T_h u\|_{H^1_0} + 2\int |\nabla\varphi T_h$$

et $\|\varphi T_h f\|_{H^{-1}} = \sup\left\{\frac{\int(\varphi T_h f)\psi}{\|\psi\|_{H^1_0}},\ \psi \in \mathcal{C}_c^\infty\right.$

(69)

Si, de plus, $u \in H^2_{loc}(\Omega)$, u solut° de

$$(D)_F \begin{cases} u \in K \cap H^2_{loc} \\ \Delta u = 1 \quad pp \text{ sur } \{u>0\} \\ \Delta u \leq 1 \quad \text{sur } \{u=0\} \end{cases}$$

→ Démo : Exo

III-1-4) Pb Signorini

cf Partiel

III-2-1) Degré topologique, Th de Schauder

[réf : Deimling, Non linear functionnal Analysis]

1) Degré topo, dimension finie

① Objectifs :

- $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $y \in \mathbb{R}^N$, on cherche à mq
  $\exists\, x \in \Omega \mid f(x) = y$.
- Unicité ? Nb solution ?
- $f \in \mathcal{C}(E, E)$, $y \in E$: $x \in E \mid f(x) = y$
  (dim $E = \infty$)

* On cherche une application (N≥1 fixé)

$d : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{Z}$ vérifiant : (d = nb …

(d_0) → $\mathcal{A} = \{ (f, \Omega, y),\ \Omega$ ouvert borné $\mathbb{R}^N$, $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, y … tq $y \notin f(\partial\Omega) \}$

$(d1)$ → Normalisation : $d(Id, \Omega, y) = 1$ si $y \in$

$(d2)$ → Additivité : $(f, \Omega, y) \in \mathcal{A}$, $\exists\, \Omega_1, \Omega_2$ ouvert inclus dans Ω, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ tq $y \notin f(\bar{\Omega} \setminus$

* **Ex** : Brouwer.

Th : Si $f : B^N \to B^N$ est continue, elle possède 1 pt fixe :

D : (1^er cas) Si $\exists x \in \partial B^N = S^{N-1}$, $f(x) = x$ ok

(2^e cas) $0 \notin (Id - f)(\partial B^N)$

$g = f - Id$; $\Omega = \mathring{B}^N$; $R(t,x) = t f(x) - x$

R c, $0 \notin R(t, \partial B^N)$ (sinon $t f(x) = x$

$\underset{\in \partial B^N}{|x|} = 1 = |t|\,|f(x)|$

$\Rightarrow t = 1$ exclu

$t < 1$ exclu

$(-1<$

Donc $d(f, \mathring{B}^N, 0) = d(+Id, \mathring{B}^N, 0) = 1$

$(0 \in \mathring{B}_N)$

→ **Rq** : $(f, \Omega, y) \in ct$, $g(x) = f(x) - y$,

$(g, \Omega, 0) \in ct$

et $d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, 0)$

[En effet, $R(t,x) = f(x) - t\,y$

$y(t) = (1-t)\,y$

$R(t,x) = y(t) \Leftrightarrow f(x) - ty = y - ty$

$\Leftrightarrow f(x) = y$

dc $y(t) \notin R(t, \partial\Omega)$ ok]

Th : $N \geq 1$, $\nexists$ rétract° r : $B^N \to S^{N-1}$

(i.e. $r_{|S^{N-1}} = Id$)

D : $f : B^N \to S^{N-1}$ c, $f_{|S^{N-1}} = Id$

$g(x) = -f(x)$ continue $B^N \to B^N$

Brouwer : $\exists x \mid g(x) = x$

$f(x) = -x \in S^{N-1}$

$-x = x$ ds S^{N-1} exclu.

73

Th : Il existe au plus une application $d : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}$ vérifiant $(d_0) - (d_3)$

De plus, si $f(x) = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{N,N}$, $0 \in \Omega$

$\det A \neq 0$ alors $(A, \Omega, 0) \in \mathcal{A}$

et $d(A, \Omega, 0) = \mathrm{sgn}(\det A)$

→ Démo : $\boxed{1}$ On mq d entièrement déterminée par ses valeurs sur $\mathcal{A}_\varphi = \{(f, \Omega, y) \in \mathcal{A},\ f \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})\}$

• Soit $(f, \Omega, y) \in \mathcal{A}$, on a : $\exists\ (g, \Omega, y) \in \mathcal{A}$

$d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, y)$ [g indép d]

→ Soit $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $\overline{\Omega}$ compact (f u.c.)

alors (exo) $\exists\ \tilde{f} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, $\tilde{f} = f$ sur $\overline{\Omega}$

→ $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $\int \rho = 1$, $\rho > 0$, $\mathrm{supp}\, \rho \subset B(0,$

$\rho_n = n^N \rho(n\,.)$

$\underbrace{\tilde{f} * \rho_n}_{\mathcal{C}^\infty} \xrightarrow{cv} \tilde{f}$ $\forall$ compact

• $\tilde{f} * \rho_n \xrightarrow[\Omega]{cv} f$

→ (f, Ω, y), $y \notin f(\partial\Omega)$, $\alpha = d(y, \underbrace{f(\partial\Omega)}_{\text{compact}}) > 0$

n grd $(\tilde{f} * \rho_n \xrightarrow[\partial\Omega]{cv} f)$: $y \notin (\tilde{f} * \rho_n)(\partial\Omega)$

$g = \tilde{f} * \rho_n$

. $R(t, x) = tg + (1-t) f$: $y \notin R(t, \partial\Omega)$

$= f + t(f - g)$ (si n grd)

$\Rightarrow d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, y)$ (g indép d

de $d_1 = d_2$ sur ...

$\Rightarrow d_1 = d_2$ sur

$\boxed{2}$ On mq d entièr^t déterminée par ses valeurs sur $\mathcal{A}_{\infty, r} = \{(f, \Omega, y) \in \mathcal{A}_\varphi$, y pt

(75) et $f^{-1}(y)$ inclus ds Ω compact : fini.

$\cdot (f,\Omega,y) \in \mathcal{A}_{\infty,\Omega} \Rightarrow f^{-1}(y)$ fini

$\Rightarrow f^{-1}(y) = \emptyset$ ou $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \Omega$.

[4] On mq d déterminé par valeurs sur

$\mathcal{A}_2 = \{(A, B, 0),\ A \in GL_N(\mathbb{R}),\ B$ boule unité $\mathbb{R}^N\}$

$\cdot\ (f,\Omega,y) \in \mathcal{A}_{\infty,\Omega}$

→ $f^{-1}(y) = \emptyset \Rightarrow d(f,\Omega,y) = 0$ ($\forall d$ degré)

→ Sinon, $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$

$(i \in [1,n])$ $f(x) = \underset{f(x_i)}{y} + \underbrace{Df(x_i)}_{A}(x - x_i) + \underset{x \to x_i}{\varepsilon(x-x_i) \to 0}\,|x - x_i|$

et $d(f,\Omega,y) = \sum_{i=1}^{n} d(f, \overbrace{B_\delta(x_i)}^{\Omega_i}, y)$

[$B_\delta(x_i)$ disjointes ds Ω]

$\cdot$ i fixé : $R(t,x) = t f(x) + (1-t) A(x - x_i)$, $t \in [0,1]$

$R(t,x) - ty = t(f(x) - y) + (1-t) A(x - x_i)$

$= A(x - x_i) + t\,\varepsilon(x - x_i)\,|x - x_i|$

on veut $\underset{x \neq x_i}{|x - x_i| \leq \delta} \Rightarrow R(t,x) - ty \neq 0$

$R(t,x) - ty = 0 \Rightarrow x - x_i = -A^{-1} t\,\varepsilon(x-x_i)|x - x_i|$

$|x - x_i| \leq \|A^{-1}\|\,\|\varepsilon(x - x_i)\|\,|x - x_i|$

$x \neq x_i$:

$1 \leq \|A^{-1}\|\,\|\varepsilon(x - x_i)\|$

On prend δ tq $|x - x_i| < \delta \Rightarrow |\varepsilon(x - x_i)|\,\|A^{-1}\| < \frac{1}{2}$

Donc $ty \notin R(t, \partial B_\delta)$

$d(f, B_\delta, y) = d(A\cdot - Ax_i, B_\delta, 0)$

$\exists!\, x \mid Ax - Ax_i = 0$ ds B_δ $(x = x_i)$

Avec r grand (solut° tjs unique...)

tq $B_r(0) \supset x_i$, $d(A - Ax_i, B_\delta, 0)$

$= d(A \dots$

(77) 2 Pb : → y doit, ici, être régulier !

Que faire si $y \notin f(S_f)$

→ Si f seul^t continue ?

• <u>Rappel</u> : $\lambda_N(f(S_f)) = 0$ (Sard)

Donc $\forall y \in f(S_f)$, $\forall \alpha > 0$, $\exists z \in B(y,\alpha) \setminus f(S_f)$

• $(f, \Omega, y) \in \mathcal{A}_{1,2}$: on mq $\exists n > n_0$, n_0 dépendant de $(f, \ldots$

tel que $d(f,\Omega,y) = \int_\Omega \rho_n (f(x)-y) \, Jf(x) \, dx$ (*)

ρ_n noyau régularisant.

<u>Rq</u> : (*) a un sens même si y n'est pas régulier

Mais on ne définit pas d ainsi

En utilisant (*), on mq $d(f,\Omega,y_1) = d(f,\Omega,y_2)$

si $(y_1,y_2) \notin f(S_f)$, $(y_1,y_2) \in B(y,\alpha)$

$\alpha = d(y, f(\partial\Omega))$

– On pourra ensuite poser :

pour $(f,\Omega,y) \in \mathcal{A}_1$, $d(f,\Omega,y) = d(f,\Omega,y_1)$

$y_1 \in B(y, d(y, f(\partial\Omega)))$, y_1 réguli…

• Démo (*) : $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_\Omega \rho_n (f(x)-y) \, Jf(x) \, dx \quad ?$$

cas 1) : $y \notin f(\Omega)$ $\quad \bar{\alpha} = d(y, f(\bar\Omega)) > 0$

$n_0 \mid \frac{1}{n_0} < \bar\alpha$

Alors $\rho_n(f(x)-y) = 0$, $\forall x \in \bar\Omega$ cqf

cas 2) : $f^{-1}(y) \cap \Omega = \{x_1, \ldots, x_p\}$

$\forall i \in [1,p]$, $Df(x_i) \neq 0$ donc par inversion locale

$\exists$ V_i vois x_i, W_i vois y tq $f : V_i \to W_i$ bij…

(79) • Si $(y_1, y_2) \in B(y, \alpha)$
$(f, \Omega, y_i) \in \mathcal{A}_{2,\Omega}$ $\Big\} \Rightarrow d(f, \Omega, y_1) = d(f, \Omega, y_2)$

alors $d_2 - d_1 = \int_\Omega \left(\rho_n(f(x) - y_2) - \rho_n(f(x) - y_1)\right) Jf(x)$

(pour n grand)

→ On mq $\rho_n(x - y_2) - \rho_n(x - y_1) = \operatorname{div}(w(x))$:

on a $\varphi(t) = \rho_n(x - t y_2 - (1-t) y_1)$.

$\varphi(1) - \varphi(0) = \rho_n(x - y_2) - \rho_n(x - y_1)$

$= \int_0^1 \varphi'(t)\, dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^m \frac{\partial \rho_n}{\partial x_i}(x - t y_2 - (1-t) y_1) \cdot (y_1 - y_2)_i$

$w(x) = (y_1 - y_2)\left(\int_0^1 \rho_n(x - t y_2 - (1-t) y_1)\, dt\right)$

$\operatorname{div} w = \sum \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = \sum (y_1 - y_2)_i \int_0^1 \frac{\partial \rho_n}{\partial x_i}(\ )\, dt$

$= \varphi(1) - \varphi(0)$ $\boxed{\text{cqfd}}$.

Donc $d_2 - d_1 = \int_\Omega \operatorname{div}(w(f(x)))\, Jf(x)\, dx$

→ Si n grand, $w(f(x)) = 0$ sur $\partial\Omega$ car
$(y_1, y_2) \in B(y, \alpha)$

$\rho_n(f(x) - y_i) \neq 0$ il faut $\frac{1}{n} > \|f(x) - y_i\|$

si n tq $\frac{1}{n} + d(y_1, y) < \alpha$
$\frac{1}{n} + d(y_2, y) < \alpha$

alors $x \in \partial\Omega \Rightarrow \|f(x) - y_i\| > \frac{1}{n}$

$\Rightarrow w(f(x)) = 0$; $\forall x \in \partial\Omega$. (et un voi

Pour $n > n_0(y_1), n_0(y_2)$, $\frac{1}{n} + \max(d(y, y_1), d(y, y_2))$

(8 1) CCl : d définit sur $\mathcal{A}_2$ par

$$d(f,\Omega,y) = d(f,\Omega,z), \quad z \in f(S_f)^c \cap B(y, d(y,\ldots))$$

3 **Lemme** : $(f,\Omega,y) \in \mathcal{A}_2$, $g \in \mathcal{C}^2(\bar\Omega, \mathbb{R}^N)$

Alors $\exists \delta > 0 \mid (f+tg,\Omega,y) \in \mathcal{A}_2$, $\forall t$, $|t|<\delta$

et $d(f+tg,\Omega,y) = d(f,\Omega,y)$

- Si lemme ok, $(f,\Omega,y) \in \mathcal{A}$, $\alpha = d(y, f(\partial\Omega)) > 0$

Soit $g \in \mathcal{C}^2(\bar\Omega,\mathbb{R})$, $\|g-f\|_\infty < \alpha$

Alors $d(g,\Omega,y)$ est défini, $(g,\Omega,y) \in \mathcal{A}_2$

On a envie de poser $d(f,\Omega,y) = d(g,\Omega,y)$

Il faut $d(g,\Omega,y) = d(\tilde g,\Omega,y)$

si $(g,\tilde g) \in B_\infty(f,\alpha)$:

Par lemme, $t \to d(g + t(\tilde g - g),\Omega,y)$

est loc^t constante

(définie car $\|f-g-t(\tilde g-g)\|_\infty < \alpha$)

$\Rightarrow$ constante sur $[0,1]$

c'est bien indép $g, \tilde g$ ...

- Démo lemme : $\alpha = d(y, f(\partial\Omega)) > 0$

$\to$ $|t| < \delta_1$ avec $\delta_1 \|g\|_\infty < \alpha$

alors $(gt+f,\Omega,y) \in \mathcal{A}_2$

$\to$ $\boxed{1^e \text{ cas}}$: $f^{-1}(y) \cap \Omega = \phi$

$\Rightarrow d(y, f(\bar\Omega)) = \beta > 0$

$|t| < \delta$, $\delta\|g\|_\infty < \beta$

$\Rightarrow d(f+tg,\Omega,y) = 0$ ok (pas sol $f(x)+tg(x)$

$\to$ $\boxed{2^e \text{ cas}}$: $(f,\Omega,y) \in \mathcal{A}_{2,i}$

$f^{-1}(y) \cap \Omega = \{x_1,\ldots,x_n\}$

$f(x) + tg(x) - y = R(t,x)$

(83) (4) vérifier (d1) (ok)

(d2) facile

(d3) ?

• On démontre (d3) si $h(t,\cdot) \in \mathcal{A}_2$, $\forall t$

(grâce lemme étape 3)

• Comment montrer (d3) si $h(t,\cdot) \in \mathcal{A}$

$h : [0,1] \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ continue,

$y \notin h(t, \partial\Omega) \quad \forall t \in [0,1]$

$d(y, h([0,1] \times \partial\Omega)) = \alpha > 0 \quad : \exists \tilde{h} \in \mathcal{C}^2([0,1] \times \bar{\Omega})$

tq $\|\tilde{h} - h\|_\infty < \alpha$, donc $\|h(t,\cdot) - \tilde{h}(t,\cdot)\|_\infty$

$< \alpha(t) = d(h(t, \partial\Omega), y)$

D'où $d(h(t,\cdot), \Omega, y) = d(\tilde{h}(t,\cdot), \Omega, y)$ et 1er cas : $\tilde{h} \in$

* Rq. ① $(f, \Omega, y) \in \mathcal{A}$ et $d(f, \Omega, y) \neq 0$

$\Rightarrow \exists x \in \Omega, \ f(x) = y$

② Si $(f, \Omega, y) \in \mathcal{A}$, $(g, \Omega, y) \in \mathcal{A}$

$f = g$ sur $\partial\Omega$ alors $d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega$

$(h(t,x) = t f(x) + (1-t) g(x))$

2) <u>Dimension infinie</u>

* E Banach, $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}, E)$, $y \in E \setminus f(\partial\Omega)$

$d(f, \Omega, y)$?

Impossible...

• On le fait pour $f = Id - g$ où g est compacte $\bar{\Omega} \to E$ (i.e. 1) g continue $\bar{\Omega} \to E$

2) $g(\bar{\Omega})$ est rel. compac

(85) • En prenant une base de X_n complétée en base de X

on peut supposer $X_n = \mathbb{R}^n$, $X_n = \mathbb{R}^n \times \{0\}$

<u>1er cas</u> : y régulier, $f \in \mathcal{E}^2$

$$g = Id - f \ , \quad g_n = (Id - f)_{|\Omega \cap X_n} \ : \quad g(x) = \begin{pmatrix} (x - f(x))_1 \\ \vdots \\ (x - f(x))_m \end{pmatrix}$$

et $f \to X_n$: $\quad g(x) = \begin{pmatrix} (x - f(x))_1 \\ \vdots \\ (x - f(x))_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad , \; g_n = \begin{pmatrix} (x - f(x))_1 \\ \vdots \\ (x - f(x))_n \end{pmatrix}$

$$\text{Donc} \quad Dg(x) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \ \cdots \ \frac{\partial g}{\partial x_m} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} Dg_n(x) & \\ 0 & \begin{matrix} 1 & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$Jg(x) = Jg_n(x)$$

$$\text{Donc} \quad d(g, \Omega, y) = d(g_n, \Omega \cap X_n, y) \quad (*)$$

<u>2e cas</u> : $f \ \mathcal{E}^2$, y singulier

• y singulier $g_n \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists \ y_0$ régulier g_n,

$$|y_0 - y| < \varepsilon \qquad (y_0 \in X_n)$$

$$d(g_n, \Omega \cap X_n, y) = d(g_n, \Omega, y_0)$$

$$y_0 = \begin{pmatrix} (y_0)_1 \\ \vdots \\ (y_0)_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

• Or $d(g, \Omega, y) = d(g, \Omega, y_0)$ car $|y_0 - y| < d(y, g(\partial\Omega))$

$$\text{donc} \quad d(g, \Omega, y) = d(g_n, \Omega \cap X_n, y_0)$$

(par 1er cas)

$$= d(g_n, \Omega_n, y)$$

<u>3e cas</u> f non $\mathcal{E}^2$, on l'approche par $\bar{f} \in \mathcal{E}^2$.

② <u>Applicat° compactes</u>

(87) Soit $\Psi_i(x) = \dfrac{\varphi_i(x)}{\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x)}$ $\quad$ ($\sum \varphi_j > 0$ sur B, $\varphi_i \in \mathcal{C}(B, [0,1])$),

• On pose $g(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \Psi_i(x)$ $\quad$ $(\forall x \in B)$

→ g continue : $B \to E$

→ g bornée par $\sum \|y_i\|$,

et $g(B) \subset \mathrm{Vect}(y_1, .., y_n) = F$ de dim finie

~~donc $g(B)$ bornée ds F → $g(B)$ rel compact~~

g est de dim $< \infty$

• $\|f - g\|_\infty = \sup_{x \in B} \left| \sum_{i=1}^{n} (f(x) \Psi_i(x) - y_i \Psi_i(x)) \right|$

($\sum \Psi_i = 1$ sur B)

$\leq \sum_{i=1}^{n} \|f(x) - y_i\| \underbrace{\Psi_i(x)}_{0 \text{ si } f(x) \notin B(y_i, \varepsilon)}$

$\leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Psi_i(x) = \varepsilon$

③ <u>Définition du degré topo de L-S.</u>

* <u>Th</u> : E Banach, $\mathcal{A} = \{ (Id - f, \Omega, y)$, Ω ouvert borné E, $f : \bar{\Omega} \to E$ compacte, $y \notin (Id - f)(\partial \Omega) \}$

Il existe une unique application $d : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}$ vérifiant

(d1) (normalisation) $d(Id, \Omega, y) = 1$ si $y \in$

(d2) (additivité) $(I - f, \Omega, y) \in \mathcal{A}$ et Ω_1, Ω_2 ouverts disjoints de Ω tq $y \notin (Id - f)(\Omega \setminus \Omega$

alors $d(I - f, \Omega, y) = d(I - f, \Omega_1, y) + d(I - f, \Omega_2, y)$

(d3) (invariance homot) $R : [0,1] \times \bar{\Omega} \to E$ compacte, $y : [0,1] \to E$ continue (donc compac

89 ... existence.

- Soit $(I-f, \Omega, y) \in \mathcal{A}$: on pose $\alpha = d(\mathcal{E}-f(\partial\Omega))$, $\alpha > 0$

- Soit (f_1, f_2) de dimension finies : $\overline{\Omega} \to E$,
$$\|f - f_i\|_\infty < \alpha$$

On mq $d_{\text{Brouwer}}((I-f_1)_{|\overline{\Omega \cap E_1}}, \Omega \cap E_1, y)$
$$= d_B((I-f_2)_{|\overline{\Omega \cap E_2}}, \Omega \cap E_2, y)$$

où E_1, E_2 sev dim finie, $E_i \supset f_i(\overline{\Omega})$
$y \in E_1 \cap E_2$

→ Soit $E_3 = E_1 + E_2$

sev dim $< \infty$ contient y, $f_1(\overline{\Omega})$ et $f_2(\overline{\Omega})$

E_1, E_2 sev E_3, E_3 d. finie donc
$$d_B((I-f_1)_{|\overline{\Omega \cap E_1}}, \Omega \cap E_1, y)$$
$$= d_B((I-f_1)_{|\overline{E_3 \cap \Omega}}, \Omega \cap E_3, y)$$

et $d_B((I-f_2)_{|\overline{\Omega \cap E_2}}, \Omega \cap E_2, y)$

(on est dim $< \infty$)
$$= d_B((I-f_2)_{|\overline{E_3 \cap \Omega}}, E_3 \cap \Omega, y)$$

Or $g_t = t f_{1|E_3} + (1-t) f_{2|E_3} : [0,1] \times \overline{\Omega \cap E_3} \to E_3$

continue ; $y \notin g_t(\partial \Omega \cap E_3)$

donc par (d3) degré Brouwer,
$$d_B(I-f_1) = d_B(I-f_2)$$

- On peut donc poser
$$d(I-f, \Omega, y) = d_B((I-f_1)_{|\overline{\Omega \cap E_1}}, \Omega \cap E_1, y)$$

pour f_1 dim $< \infty$,
$$\|f - f_1\|_\infty < \alpha$$
(c'est indépendant d'un tel f_1).

(91) Conséquences:

1) $(I-f, \Omega, y) \in \mathcal{A}$, $d(I-f, \Omega, y) \neq 0$

$\Rightarrow \exists x \in \Omega, \quad x - f(x) = y$

(Démo id Brouwer, $\Omega_1 = \Omega_2 = \emptyset$)
(contraposée)

(ou $\nexists x \in \bar{\Omega}$, $x - f(x) = y$

$\alpha = d(y, (\cdot - f(\cdot))(\bar{\Omega})) > 0$ compacité f

f_1 dim $< \infty$ ... $d((I-f_1)_{|\Omega \cap E_1}, \Omega \cap E_1, y) = 0$
$\|f - f_1\|_\infty < \alpha$

car pas nul $x \in \bar{\Omega}$)

2) $(I-f, \Omega, y) \in \mathcal{A}$, $(I-g, \Omega, y) \in \mathcal{A}$

$f = g$ sur $\partial\Omega \Rightarrow d(I-f, \Omega, y) = d(I-g, \Omega, y)$

(par d3)

④ Théorème de Schauder

Th (Schauder) : E Banach, $B_R = \{x \in E, \|x\| < R\}$

$f : \bar{B}_R \to \bar{B}_R$ compacte (continue, $f(\bar{B}_R)$ rel comp.)

alors $\exists x \in \bar{B}_R$, $f(x) = x$

Rq Faux si f est seul^t continue.

→ Démo : f comp, $h(t,x) = t f(x)$ compacte
$[0,1] \times \bar{B}_R \to \bar{B}_R$

$d(I - h_t, B_R, 0) = d(I, B_R, 0)$ $\forall t$ ($h_0 = 0$)

($0 \notin (I - h(t,\cdot))(S_R)$ sinon $\exists x \in S_R$, $x = f(x) \in$
($x = tf$: $t < 1 \Rightarrow \|x\| < 1$: $x \notin S_R$.
$t = 1 \Rightarrow x = f(x)$)

$d(I - f, B_R, 0) = 1 \Rightarrow \exists x \mid x - f(x) = 0$

$x = f(x)$.

(93) · On s'intéresse à $\begin{cases} \cdot -\operatorname{div}\big(a(x,u(x))\,\nabla u(x)\big) = f(x,u(x)) \\ \quad x \in \Omega \\ \cdot\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$

<u>Hyp.</u> (H) $\begin{cases} \cdot\ a \text{ fonction de Carathéodory} \\ (\ .\ a(x,.) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ continue pour pp } x) \\ (\ a(.,s) : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable } \forall s \in \mathbb{R}) \\ \cdot\ \exists \alpha > 0,\ a(x,s) \geq \alpha \quad \text{pp } x \in \Omega,\ \forall s \in \mathbb{R} \\ \cdot\ a \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}) \\ \cdot\ f \text{ de Carathéodory},\ f \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}) \end{cases}$

<u>Généralisat°</u> : $a\ \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{N,N} = \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$

et $\langle a(x,s)\xi, \xi\rangle \geq \alpha|\xi|^2 \quad (\alpha > 0)$

* <u>Déf</u>: Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$,

f vérifiant (H) : u est sol. faible de (1) si

$$(1)_f \begin{cases} u \in H^1_0(\Omega) \\ \forall v \in H^1_0(\Omega),\ \int_\Omega a(x,u(x))\,\nabla u(x)\,\nabla v(x)\,dx \\ \qquad = \int f(x,u(x))\ v(x)\,dx \end{cases}$$

· <u>Th</u>: Ω ouvert borné $\mathbb{R}^N$, f et a vérifiant H, alors il existe au moins une solution faible à (1)

→ <u>Démo</u>: 1) Schauder: $E = L^2(\Omega)$,

$v \in L^2(\Omega) \Rightarrow \exists !\ u$ solution faible de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\big(a(x,v)\,\nabla u\big) = f(x,v) \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

(cf §II opérateurs linéaire)

et dans L^2 (Rellich - suite)

et pp (ss-suite)

• Donc $a(x, v_{n_k})$ $\downarrow$ pp (suite) (v) $a(x, v)$ pp dominée par $M \in L^\infty$. et $a(x, v_{n_k}) \nabla w \xrightarrow{pp} a(x,v) \nabla w$ dominée par $\|a\|_\infty |\nabla w|$ ds L^2

Donc $a(x, v_{n_k}) \nabla w \xrightarrow{L^2} a(x, v) \nabla w$.

et $\nabla u_{n_k} \longrightarrow \nabla \bar{u}$ faiblement L^2

$\Rightarrow$ Donc $\int a(x, v_{n_k}) \nabla w \nabla u_{n_k} \longrightarrow \int a(x, v) \nabla w \nabla \bar{u}$

Lemme : $\left.\begin{array}{ll} f_n \longrightarrow f & L^2 \text{ faible} \\ g_n \longrightarrow g & L^2 \text{ fort} \end{array}\right) \Rightarrow \int f_n g_n \longrightarrow \int f g$

Démo : $\left|\int f_n g_n - \int f g\right| \leq \left|\int f_n (g_n - g)\right| + \underbrace{\left|\int f_n g - \int f g\right|}_{\leq \varepsilon \text{ pour } n \text{ grand}}$

(CV faible $\Rightarrow \langle f_n, g\rangle \longrightarrow \langle f, g\rangle$

Banach-Steinhaus (Or f_n CV faiblt

$\Rightarrow$ fortt bornée L^2 (faibt borné $\Rightarrow$ fort. borné

$\Rightarrow \left|\int f_n (g_n - g)\right| \leq C \|g_n - g\|_2$

$(\|f_n\|_2 \leq C)$

• Et $f(x, v_{n_k}) \xrightarrow{pp} f(x, v)$ dominé L^∞ donc L^2

$\Rightarrow f(x, v_{n_k}) \xrightarrow{L^2} f(x, v)$ (Ω borné)

$\Rightarrow \int f(x, v_{n_k}) w \longrightarrow \int f(x, v) w$

Donc $\bar{u}$ solut° de

$$\left\{\begin{array}{l} \int a(x, v) \nabla \bar{u} \nabla w = \int f(x, v) w \\ \bar{u} \in H^1_0 \end{array}\right.$$

$\bar{u}$ solut° de (2) avec v : $\bar{u} = F(v) = v$

(unicité sol. pb ell. linéaire)

$u_{n_k} \longrightarrow v$.

(97) (estimation : $F : B_R \to B_R$.

Soit $v \in L^2$, u sol (2)$_f$:

$$K_{\Omega,\alpha} \|u\|_{H^1} \leq \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \leq \int_\Omega |f(x,v)| \, |u|$$

$$\leq \beta \int |v|^p |u| + \underbrace{\int d \cdot u}_{\leq \|d\|_2 \|u\|_2}$$

Si $\varepsilon > 0$, $\beta |v|^p |u| \leq \varepsilon |u|^2 + \dfrac{\beta^2}{\varepsilon} |v|^{2p}$

(si pas majoré $|u|^2$,
$|u| < \frac{\beta}{\varepsilon} |v|^p$
$\Rightarrow \beta |v|^p |u| \leq \frac{\beta^2}{\varepsilon} |v|^{2p}$,

$$\leq \varepsilon \int |u|^2 + \frac{\beta^2}{\varepsilon} \int |v|^{2p} + \|u\|_2 \|d\|_2$$

Donc $\varepsilon = \dfrac{K_{\Omega,\alpha}}{2}$:

$$\frac{K_{\Omega,\alpha}}{2} \int |u|^2 \leq \frac{2\beta^2}{K_{\Omega,\alpha}} \int |v|^{2p} + \|d\|_2 \|u\|_2$$

Donc $C \|u\|_2^2 \leq \dfrac{\beta^2}{C} \|v\|_2^{2p} \left(\mu(\Omega)\right)^q + \|d\|_2 \|u\|_2$

(Holder)

$2p < 2 \Rightarrow \exists R > 0$ / si $X \geq R$,

$$C X^2 > \frac{\beta^2}{C} R^{2p} \left(\mu(\Omega)\right)^q + \|d\|_2 X$$

Donc $v \in \overline{B_R} \Rightarrow u \in B_R$ (on ne peut avoir $X = \|u\|_2 > R$,

2) $f(x,u) = \lambda u + h(x)$, $h \in L^2$, f linéaire $/u$. (f sous-lin mais $p=1$)

Si λ est vp : λ tq $\exists u$ sol. faible de

$$(a=1) \quad (1)_\lambda \begin{cases} u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ -\Delta u = \lambda u & \text{sur } \Omega \end{cases} \quad (u \neq 0)$$

alors $\exists$ bcp h tq le Pb initial n'ait pas de solut°:

- $(1)_f$ a une solution $\Leftrightarrow h \perp E_\lambda$

où $E_\lambda = \{ u \text{ solut° } (1)_\lambda \}$

(99) $F(x, u_n(x)) \xrightarrow{pp} F(x, u(x))$ dominée par MH.

$$\int F(\cdot, u_n) \to \int F(\cdot, u)$$

• $\int a |Du_n|^2$? on peut mq $u_n \xrightarrow[\text{faible}]{H_0^1} u$

alors $\left(\int a |Du|^2\right) \leq \liminf \left(\int a |Du|^2\right)$

[$a > 0$, $a \in L^\infty$ et $f_n \to f$ L^2 faible ($f_n = D_i u_n$)

$\sqrt{a} f_n \to \sqrt{a} f$ L^2 faible ($a \in L^\infty$, $a > 0$) ($\sqrt{a} g \in L^2$, $\langle f_n, \sqrt{a} g \rangle \to$)

$\int \sqrt{a} f_n g \to \int \sqrt{a} f g$, $\forall g \in L^2$

$g = \sqrt{a} f$: $\underbrace{\int a f_n f}_{\left(\int a f_n^2\right)^{1/2} \left(\int a f^2\right)^{1/2} \geq} \to \int a f^2$

Donc $\liminf \int a f_n f = \int a f^2 \leq \liminf \left(\int a f^2\right)^{1/2} \left(\int a f_n^2\right)^{1/2}$

$\Rightarrow \left(\int a f^2\right)^{1/2} \leq \liminf \left(\int a f_n^2\right)^{1/2}$]

• Donc

$E(u_n) = \int a |Du_n|^2 - \int F(x, u_n)$

liminf : $\gamma \leq E(u) \leq \liminf E(u_n) = \gamma$

$\Rightarrow E(u) = \gamma$

• Soit $\varphi \in H_0^1(\Omega)$: $E(u + t\varphi) \geq E(u)$ ($\forall t$)

développer et $\times 1/t \to 0^{\pm}$: $\int a\, Du\, D\varphi = \int f(x, u)\, \varphi$

[car $\int \frac{F(x, u + \varphi t) - F(x, u)}{t} \xrightarrow[\text{par CV dominée}]{} \int f(x, u)\, \varphi$]

2) $a(x, u)$: $E(u) = \frac{1}{2} \int a(x, u) |Du|^2 \, dx - \int F(x, u)\, dx$

On peut mq (exo)

$\exists u \in H_0^1$, $E(u) \leq E(v)$ $\forall v \in H_0^1$

<u>Mais</u> u n'est pas sol. (1) f :

$E(u + t\varphi) \leq E(u)$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$, $t \in \mathbb{R}$, $a \in$

et $\frac{\partial a}{\partial u} \in L^\infty$ $\overset{(t \to 0)}{\Rightarrow}$ $-\operatorname{div}(a(x, u) Du] + \frac{\partial a}{\partial u}(x, u) |Du|^2 = f(x, u)$

101 ② $\lambda \in vp(T)$:

$\exists\, u \in H \mid T(u) - \lambda u = f \iff f \in \ker(T - \lambda Id)^{\perp}$

et si $f \in \ker(T - \lambda Id)^{\perp}$,

$\exists!\, u_0 \in \ker(T - \lambda Id)^{\perp}$, $T(u_0) - \lambda u_0 = f$

et tte autre solut° s'écrit

$u_0 + u$, $u \in \ker(T - \lambda Id)$

* En pratique, $T = A^{-1}$

où $A : D(A) \to H$, $D(A)$ sev H.

On a alors $0 \notin Vp(T)$

Déf : H Hilbert réel, $A : \underset{(\text{sev } H)}{D(A)} \longrightarrow H$, linéaire.

- A est à résolvante compacte si $\exists\, a \in \mathbb{R}$ tq $A - a\, Id$ soit inversible et $(A - aI)^{-1}$ soit compact. (et $(A-aI)^{-1} : H \to D(A) \subset$
- A est autoadjoint si $\langle Au, v\rangle_H = \langle u, Av\rangle_H$ $\forall\, (u,v) \in D(A)$

Ex : Ω ouvert borné $\mathbb{R}^N$, $D(A) = \{ u \in H^1_0,\ \Delta u \in L^2(\Omega) \}$

$Au = -\Delta u$

A est à résolvante compacte, A^{-1} compact, et A autoadjoint.

[$(-\Delta u) \in L^2$ si $\exists\, f \in L^2$ tq $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\langle -\Delta u, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle f, \varphi\rangle$
$= \int f \varphi$

où $\underbrace{\langle -\Delta u, \varphi\rangle = \sum_i \int_\Omega \overset{\in L^2}{\overline{D_i u}}\, D_i \varphi = \int f \varphi}_{(*)}$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}($

densité $\mathcal{C}^\infty_c$ ds H^1_0, $(*)$ vraie pour $\varphi \in H^1_0$

Si $\varphi = v \in D(A)$:

$\underbrace{\sum_i \int D_i u\, D_i v} = \int f v = \langle -\Delta u, v\rangle$

$= \langle u, -\Delta v\rangle = \int g u$ si g représente

(103)

alors $\forall f \in H$, $\exists ! \, u \in H$, sol. de (2) $\begin{cases} u \in D(A) \\ Au = \lambda u + f \end{cases}$

② (alter Fredholm) A autoadjoint

$\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \in Vp(A)$, $f \in H$

(2) a 1 sol $\Leftrightarrow$ $f \in \ker(A-\lambda Id)^{\perp}$

et si $f \in \ker(A-\lambda Id)^{\perp}$,

$\{u \text{ sol. } (2)\} = u_0 + \ker(A-\lambda Id) =$

où u_0 unique solution de (2) avec

$u_0 \in \ker(A-\lambda Id)^{\perp}$

→ Démo

1) $a \notin Vp(A)$ car $A - aI$ inversible

$\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq a$

$\begin{cases} Au = \lambda u \\ u \in D(A) \setminus 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Au - au = (\lambda - a) u \\ u \in D(A) \setminus 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u = (\lambda - a) Bu \\ u \in D(A) \setminus 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} Bu = \frac{1}{\lambda - a} u \\ u \in H \end{cases}$ (car $B : H \to \underline{D(A)}$)

et $\ker(A - \lambda Id) = \ker\left(B - \frac{1}{\lambda - a} Id\right)$ (cqfd)

2) $\lambda \notin Vp(A)$ $\begin{cases} Au - \lambda u = f \\ u \in D(A) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (A - a Id) u = f + (\lambda - a) u \\ u \in D(A) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u = Bf + (\lambda - a) Bu \\ u \in H \end{cases}$ $(B : H \to D(A))$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u \in H \\ u = \left(B - \frac{1}{\lambda - a} I\right)^{-1} \frac{Bf}{\lambda - a} \end{cases}$

(inver. car $\lambda \notin Vp(A) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda - a} \notin Vp\, B$

et B compact $\Rightarrow \frac{1}{\lambda - a} \notin \sigma(B)$)

donc $(A - a Id)^{-1} = \left(B - \frac{1}{\ } Id\right)^{-1} \underline{B}$ compact

(105) • ex : $g(x,u) = a(u)u + k(x)$ où $k \in L^2(\Omega)$, $a \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

et $a(s) \xrightarrow[|s|\to\infty]{} 0$

→ Démo : $\lambda \notin Vp(A)$, $(A-\lambda I)^{-1} = B$ compacte $H \to H$

$(H = L^2)$

• (4) $\left\{ Av = \lambda u + g(\cdot,u) \quad u \in D(A) \right.$

$\iff$ (5) $\left\{ \begin{array}{l} u = B(g(\cdot,u)) \\ u \in H = L^2 \end{array} \right.$

• Mq (5) a 1 sol : deg. topo : $\forall t \in [0,1]$, $u \in H$,

$R(t,u) = t\,B(g(\cdot,u))$ compacte $[0,1]\times H$.

→ Compacité R : 1) continuité

$t_n \to t$, $u_n \xrightarrow[L^2]{} u$ on veut mq $R(t_n,u_n) \to R(t,u)$

→ à suite près, on peut supposer $u_n \xrightarrow[L^2]{pp} u$ majoré de L^2 pp

$g(\cdot,u_n) \xrightarrow{pp} g(\cdot,u)$ dominée L^2.

$\Rightarrow g(\cdot,u_n) \xrightarrow{L^2} g(\cdot,u)$ et B c : $B(g(\cdot,u_n)) \xrightarrow[L^2]{} B(g(\cdot,u))$

$\Rightarrow t_n\,B(g(\cdot,u_n)) \longrightarrow t\,B(g(\cdot,u))$ ok.

2) bornés $\xrightarrow{\text{h}}$ rel comp : D borné de L^2

$\{ g(\cdot,u),\ u \in D \}$ borné L^2 (g majorée)

$\Rightarrow \overline{\{ B(g(\cdot,u)) \ \cdots \}}$ compact (B comp)

$\Rightarrow \overline{\{ t\,B(g(\cdot,u)) \}}$

→ On a envie de dire $d(Id - h(t,\cdot), B_R, 0)$ indép t

(ceci permet de cl : $1 = d(Id, B_R, 0)$

$= d(Id - B(g(\cdot,u)), B_R, 0)$

$\Rightarrow \exists$ sol $u = B(g(\cdot,u))$ ok)

Il faut mq $\exists R > 0 \mid \forall t$, $\nexists$ sol u, $u - R(t,u) = 0$ pour $\|u\|_2 = R$

Par l'absurde : si $\nexists R > 0 \mid \ldots$, $\exists\ u_n \in L^2$, $t_n \in [0,1]$

[Résonnance]

(107)

* **th** : (Landesman - Lazer, 1970) : Ω ouvert $\mathbb{R}^N$,

$H = L^2(\Omega)$, $A : D(A) \subset H \to H$

A à résolvente compacte, $A = A^*$, $\lambda \in \sigma(A)$ [rés #1]

f de Carathéodory, $f(x,s) = \lambda s + \gamma(x,s) + R(x)$

$R \in L^2$,

$|\gamma(x,s)| \leq d(x)$, $d \in L^2(\Omega)$

$\gamma(x,s) \xrightarrow[s\to+\infty]{} \gamma_+(x) \in L^2$

(pp $x \in \Omega$)

$\xrightarrow[s\to-\infty]{} \gamma_-(x) \in L^2$

$$(S) \begin{cases} u \in D(A) \\ Au = \lambda u + \gamma(\cdot, u) + R \end{cases}$$ à résoudre.

1) Cond. nécessaire : si $\gamma_- \leq \gamma_+$ pp (resp $\gamma_- \geq \gamma_+$ pp) $\boxed{\text{et } \gamma_- \leq \gamma \leq \gamma_+}$

et si (S) a une solution alors

$$-\int_\Omega \gamma_+ \varphi^+ dx + \int_\Omega \gamma_- \varphi^- \leq \int R\varphi \, dx \leq \int_\Omega \gamma_+ \varphi^- dx - \int_\Omega \gamma_- \varphi^+ dx$$

$\forall \varphi \in \ker(A - \lambda Id)$

[resp $\geq$ $\geq$ si $\gamma_- \geq \gamma_+$]

2) C. suffisante : si $\forall \varphi \in \ker(A - \lambda Id) \setminus \{0\}$,

$$-\int_\Omega \gamma_+ \varphi^+ + \int_\Omega \gamma_- \varphi^- < \int_\Omega R\varphi$$

$\exists$ u sol. de (S)

(m̂ résultat si $>$ au lieu de $<$)

* **Rq** : . Il suffit de faire le th avec $R = 0$ et l'intégrer ds γ

. si $\gamma = 0$ (cas linéaire), cond. nécess : $\int R\varphi = 0$ (cf Fredholm) $R \in \ker(A-\lambda Id)^\perp$

) → Démo : 1) CN facile :

$Au = \lambda u + \gamma(u) + R$ $\times \varphi$:

$\int$: $0 = \int \gamma(u)\varphi + \int R\varphi$ et $\gamma_- \leq \gamma \leq \gamma_+$

(109) ② CS :

$$(6)\begin{cases} v \in D(A) \\ Av - (\lambda+\varepsilon)v = -\varepsilon t v + t\,\gamma(\cdot,v) + tR \end{cases}$$

- On soit $\lambda \in V_p(A)$ et $B = (A - a\,Id)$ compacte

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda - a} \in V_p(B)$$

Or B compacte $\Rightarrow \exists \varepsilon' > 0 \mid \left[\frac{1}{\lambda-a} - \varepsilon', \frac{1}{\lambda-a} + \varepsilon'\right] \cap V_p(B) = \left\{\frac{1}{\lambda-a}\right\}$

Or $\mu \in V_p(A)$, $|\mu - \lambda| < \varepsilon$

[où ε tq $\forall x$, $|x-\lambda| \le \varepsilon \Rightarrow |g(x) - g(\lambda)| \le \varepsilon'$ où $g(x) = \frac{1}{x-a}$ continue en λ

alors $\frac{1}{\mu - a} \in V_p(B)$, $\frac{1}{\mu-a} \in \left[\frac{1}{\lambda-a} - \varepsilon', \frac{1}{\lambda-a} + \varepsilon'\right]$

$$\Rightarrow \mu = \lambda$$

Donc $\exists \varepsilon > 0 \mid [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon] \cap V_p(A) = \{\lambda\}$

- Dans ce cas $A - (\lambda+\varepsilon) Id$ inversible d'inverse B compacte et $(B(L^2) \subset D(A))$

$$(6) \iff (7)\begin{cases} v \in L^2 \\ v = -\varepsilon t B(v) + t B(\gamma(\cdot,v)) + t B(R) \end{cases}$$

* Soit $G(t,v) = -\varepsilon t Bv + t B\gamma(\cdot,v) + t BR$

$\rightarrow$ Mq G compacte : • si $t_n \in [0,1]$ $(t_n \to t)$, v_n bornée L^2,

B compacte $\Rightarrow Bv_n \longrightarrow v$

et $|\gamma(x,v_n)| \le d \in L^2$

$\Rightarrow \|\gamma(x,v_n)\|$ bornée L^2, B compacte :

$$B\gamma(\cdot, v_n) \longrightarrow w$$

Donc $G(t_n, v_n) \to -\varepsilon t v + t w + t Bh$

- G continue : $\left\{\begin{matrix} t_n \to t \\ v_n \to v \end{matrix}\right.$; B linéaire compacte donc continue : $Bv_n \to Bv$

(111)

Or $\left|\gamma(x, v_n(x))\, v(x)\right| \leq d(x)\,|v(x)| \in L^1$

CV dominée $\Rightarrow$ $\gamma(x, v_n)\, v \xrightarrow[\text{fort}]{L^1} \gamma_{\mathrm{sgn}\, v(x)}\, v(x)$

$$\int_\Omega \gamma(x, v_n)\, v \longrightarrow \int_\Omega \gamma_{\mathrm{sgn}\, v(x)}\, v(x)$$

$$= \int_\Omega \gamma_+ v^+ - \int_\Omega \gamma^- v_-$$

[si $v \geq 0$, $v^+(x) = v(x)$ et $\gamma_{\mathrm{sgn}\, v(x)}\, v(x) = \gamma_+ v^+$ ... id $v < 0$]

* On a $v_n = -\varepsilon t_n B v_n + t_n B \gamma(\cdot, v_n)$

$$\Rightarrow (A - (\lambda+\varepsilon) Id) v_n = -\varepsilon t_n v_n + t_n \gamma(v_n)$$

donc $\times v$ et $\int$

$$\int \underbrace{(A - (\lambda+\varepsilon)) v_n\, v} = -\varepsilon t_n \int v_n v + t_n \int \gamma(\cdot, v_n) v$$

or A autoadj. $\int v_n (A - (\lambda+\varepsilon)) v$

$$= \underbrace{\int v_n (A - \lambda) v}_{0} + \varepsilon \int v_n v$$

car $v \in \ker(A - \lambda Id)$ [$t = 1$]

Donc

$$\underbrace{+\varepsilon(1-t_n) \int v_n v}_{-\varepsilon(1-t_n)\, \|v_n\|_2 \int v_n v} = \underbrace{t_n \int \gamma(\cdot, v_n) v}$$

$\downarrow n \to \infty$ $(t_n \to 1)$

$$\int \gamma_+ v^+ - \int \gamma_- v^- > 0$$

par hypothèse (H) de CS.

Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$,

$$-\underbrace{\varepsilon}_{>0} \underbrace{(1-t_n)}_{>0} \boxed{\|v_n\|_2}_{>0} \int v_n v > 0$$

$$\Rightarrow + \int v_n v < 0$$

$\downarrow n \to \infty$

Th 2 : Si f globalement lipschitzienne $E \to E$ alors $T = +\infty$ (sol. max sur $\mathbb{R}^+$)
i.e $\exists!\, u \in \mathcal{C}^1([0, \infty[, E)$ solut° (1).

Rq : En fait on a m̂ existence et unicité de $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, E)$ sol. (1) avec $t \in \mathbb{R}$.

* Cas particulier :

E Banach, $A \in \mathcal{L}_c(E, E)$, $f(u) = Au$

f glob. lips.

$\exists!\, u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ solution de (1)

$$\begin{cases} u_t(t) = A u(t) & (\forall t \in \mathbb{R}) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé.

$$S(t) \begin{cases} u_0 \longrightarrow u(t) \\ E \longrightarrow E \end{cases} \qquad (u \text{ sol } (1))$$

$S(t)$ est linéaire ((1) linéaire)

et $S(t) \in \mathcal{L}_c(E, E) \longrightarrow$ ($\forall u_0$, u sol $\Rightarrow u_t(t) = u_0 + \int_0^t A u(s)\, ds$

$\|u(t)\| \leq \|u_0\| + \int_0^t \|A\| \|u(s)\| ds$

Gronwall : $\|u(t)\| \leq \|u_0\| e^{\|A\| t} \Rightarrow \boxed{\|S(t)\| \leq e^{\|A\| t}}$)

$\{S(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ est un groupe

$$\begin{cases} S(t) \circ S(s) = S(t+s) \\ S(0) = Id \\ S(-t) = S(t)^{-1} \end{cases}$$

[$\forall t, t'$: u sol u_0, $v(t) = u(t+t')$ est sol de $v_t + Av = 0$, $v(0) = u(t')$

donc $v(t) = S(t) u(t') = S(t) \circ S(t') u_0$
$= u(t+t') = S(t+t') u_0$) $\Rightarrow S(t+t') = S(t) \circ S(t')$.]

* Généraliser ceci :

E Banach, $A : D(A) \subset E \to E$ linéaire

(non borné et $D(A)$ s.e.v. E)

- On s'intéresse au Pb :

$$(1) \begin{cases} u_t + A u(t) = 0 & \forall t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

($u_0 \in E$ donné)

(115)

→ $Au = -\Delta u$, condit° de Neumann ($\frac{\partial u}{\partial n} = 0$)

[$\langle -\Delta u | u \rangle = \int |\nabla u|^2 \geq 0$

$\forall f$ $\exists$ u sol $u - \Delta u = f$ avec cond Neumann]

→ $u_t + u_x = 0$, $u(0) = u_0$

solut°: $u(x,t) = u_0(x-t)$

$Au = u_x$ m-accrétif

* **Thm** (Hille-Yoshida, Phillips):

E Banach, $A : D(A) \subset E \to E$ linéaire

A est m-accrétif et $u_0 \in D(A)$

Alors $\exists ! \, u \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, E)$ tq

1) $u(t) \in D(A)$, $\forall t \geq 0$

2) $(1) \begin{cases} u_t(t) + Au(t) = 0 & \forall t \in \mathbb{R}^+ \\ u(0) = u_0 \end{cases}$

→ Démo: objectif du § IV-2.

* Rmq: 1) E Banach, A m-accrétif ⇒ Graph(A) est fermé (ou: A est "fermé")

i.e. $u_n \in D(A)$, $\begin{matrix} u_n \xrightarrow{E} u \\ Au_n \xrightarrow{E} f \end{matrix}$ ⇒ $u \in D(A)$ et $f = Au$

Démo: $\begin{matrix} u_n \xrightarrow{E} u \\ Au_n \xrightarrow{E} f \end{matrix}$, $g_n = u_n + Au_n \xrightarrow{E} u + f = g$

$(I+A)^{-1}$ continue ⇒ $(I+A)^{-1}(g_n) = u_n$

$(I+A)^{-1}(g) = u \in \mathcal{X}$

$u = (I+A)^{-1}(g)$ ⇒ $u + f = (I+A)(u)$

$f = Au$ OK

2) E Banach réflexif, A m-accrétif

alors ($\forall \lambda > 0$, $(I + A\lambda)$ inversible d'inverse $\underline{c}$)

⇒ ($\overline{D(A)} = E$) (hyp 2) ⇒ hyp 1)

(117)

- $\forall \lambda > 0$ on pose $J_\lambda = (I + \lambda A)$ résolvante.
- $\lambda > 0$: $A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)$ régularisée Yoshida

<u>Note</u> : $A_\lambda, J_\lambda : E \to E$ linéaires continus.

* <u>Rq</u> : $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1} \underset{\lambda \to 0}{\simeq} I - \lambda A \xrightarrow[\lambda \to 0]{} I$ (vrai

$J_\lambda \simeq I - \lambda A \Rightarrow A_\lambda \simeq A$ (Vrai : $A_\lambda \subseteq A$

* <u>Th</u> : E Banach, $A : D(A) \subset E \to E$ linéaire m-accrétif

Alors 1) $A_\lambda x = A \circ J_\lambda(x) = A(J_\lambda(x))$, $\forall x \in$

$A_\lambda x = J_\lambda \circ A(x)$ pour $x \in A$

2) $\| A_\lambda(x) \| \leq \| A(x) \|$ $\forall x \in D(A)$

3) $J_\lambda x \xrightarrow[\lambda \to 0]{} x$ $\forall x \in E$

4) $A_\lambda x \xrightarrow[\lambda \to 0]{} A x$ $\forall x \in D(A)$

5) $J_\lambda, J_\mu, A_\lambda, A_\mu$ commutent si $\lambda > 0$, $\mu > 0$

→ <u>Démo</u> : 1) • $(\lambda A + I) J_\lambda(x) = x$

$= \lambda A \circ J_\lambda(x) + J_\lambda(x)$

$A \circ J_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}(x - J_\lambda(x)) = A_\lambda(x)$

• $J_\lambda(\lambda A + I) = x = \lambda J_\lambda \circ A(x) + J_\lambda(x)$

$\frac{1}{\lambda}(x - J_\lambda(x)) = J_\lambda \circ A(x) = A_\lambda(x)$

2) découle 1 et $\|J_\lambda\| \leq 1$

3) $\| A_\lambda(x) \| \leq \| A(x) \|$, $x \in D(A)$

$\Rightarrow \left\| \frac{x - J_\lambda(x)}{\lambda} \right\| \leq \|A(x)\| = M < \infty$

$\Rightarrow \|x - J_\lambda(x)\| \leq \lambda M \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0$

$J_\lambda(x) \xrightarrow[\lambda \to 0]{} x$ pour $x \in D(A)$

(119)

- **Lemme:** $u_0 \in E$ Banach, $A : D(A) \subset E \to E$ linéaire m-accrétif. Si $u_\lambda \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[, E)$ unique solut° de (2), alors

i) $\|u_\lambda(t)\| \leq \|u_0\|$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\forall \lambda > 0$

ii) $\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\| \leq t \|A_\lambda u_0 - A_\mu u_0\|$
$(\lambda, \mu) > 0$

→ Démo: (Idée) Si E Hilbert, $A_\lambda \simeq A$

$u_t + Au = 0 \qquad u \in \mathcal{C}^1$

$$\underbrace{\langle u_t, u\rangle}_{\frac{1}{2}(\|u\|)^2_t} + \langle Au, u\rangle = 0$$

$\frac{1}{2}(\|u\|)^2_t + \langle Au, u\rangle = 0 \implies \frac{1}{2}(\|u\|)^2_t \leq 0$

$\implies \|u\|^2 \searrow$ ok

i) • On pose $u = u_\lambda$

$$\begin{cases} u_t + A_\lambda u = 0 & t \geq 0, \quad u \in \mathcal{C}^1 \\ u_0 = u(0) \end{cases}$$

$$\implies u_t + \frac{1}{\lambda} u - \frac{1}{\lambda} J_\lambda u = 0$$

$$\underbrace{u_t + \frac{u}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda} J_\lambda u$$

$$\left(e^{\frac{t}{\lambda}} u\right)' = e^{t/\lambda}\left(u_t + \frac{1}{\lambda} u\right) = e^{t/\lambda} \frac{1}{\lambda} J_\lambda u$$

$\int_0^t$: $$e^{t/\lambda} u(t) - u(0) = \int_0^t e^{s/\lambda} \frac{J_\lambda u(s)}{\lambda} ds$$

$$\underbrace{\|e^{t/\lambda} u(t)\|}_{\varphi(t)} \leq \|u_0\| + \int_0^t \frac{e^{s/\lambda}}{\lambda} \|u\|(s)\, ds$$

Gronwall

$$\varphi(t) \leq \|u_0\| + \frac{1}{\lambda}\int_0^t \varphi(s)\, ds$$

$$\implies \varphi(t) \leq \|u_0\| e^{t/\lambda}$$

$$\implies \|u(t)\| \leq \|u_0\| e^{t/\lambda - t/\lambda}$$

(121)

* **Th** : (H-S) E Banach, $A : D(A) \to E$ m-accrétif

1) $\forall u_0 \in D(A)$, $\exists !\, u \in \mathcal{C}^1([0,\infty[, E)$ tq

$\forall t \geq 0$, $u(t) \in D(A)$ et

$$\begin{cases} u_t + Au = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

2) De plus, on a $u(t) = S(t)\, u_0$ $(\forall t \geq 0)$

$\{ S(t), t \in \mathbb{R}^+ \}$ semi-groupe de contraction, i.e. $S(t) \in \mathcal{L}_c(E,E)$ $\forall t \geq 0$

$\forall t, t' \geq 0$: ① $S(t) \circ S(t') = S(t+t')$

② $S(0) = Id$

③ $\|S(t)\| \leq 1$

④ $\forall u_0 \in E$, $t \to S(t)\, u_0$ est continue $[0,\infty[\to E$

3) Si $u_0 \in E$, $u(t) = S(t)\, u_0$ est appelée solution généralisée de (1)

→ Réciproque : Prenons E Banach et $\{S(t) \in \mathcal{L}(E,E), t \geq 0\}$ semi-groupe de contraction.

alors $\exists !\, A : D(A) \subset E \to E$ linéaire m-accrétif tq $\{S(t), t \geq 0\}$ soit le semi-groupe associé à A

→ Démo HS :

(1) existence de $u(t)$ solut° (1) $(u_0 \in D(A))$

et construct° $S(t)$

(2) Unicité

① S_λ défini par A_λ

$u_0 \in D(A) \Rightarrow$ (lemme) $u_\lambda \xrightarrow[{[0,T]}]{CU} u$ unif. sur $[0,T]$ $\forall T >$

Soit $S(t)\, u_0 = u(t)$. $\|S(t)\| \leq 1$ [illegible]

* **Démo** cours hilbertienne de la m-accrétivité :

(⇒) ① $\forall u \in D(A)$, $\forall \lambda > 0$,

$(I+\lambda A)^{-1} v = u$ [on pose $v = (I+\lambda A) u$]

et $\|u\| \leq \|v\|$ $\quad (\|(I+\lambda A)^{-1}\| \leq 1)$

donc $\langle \underbrace{(I+\lambda A) u}_{v}, \underbrace{(I+\lambda A) u}_{v} \rangle \geq \langle u, u \rangle$

$\Rightarrow \langle u, u \rangle + 2\lambda \langle Au, u \rangle + \lambda^2 \langle Au, Au \rangle \geq \langle u, u \rangle$

$\times \frac{1}{\lambda}$: $\langle Au, u \rangle \geq -\frac{\lambda}{2} \langle Au, Au \rangle$
$(\lambda > 0)$ et $\lambda \to 0^+$: $\langle Au, u \rangle \geq 0$

② $I + A$ bij ⇒ surj

(⇐) On a vu qu'il suffisait $(E'' = E)$ de montrer 2) $\quad (2 \Rightarrow 1)$

- $\forall \lambda > 0$, $\lambda A + I$ injective :

Si $u + \lambda A u = 0$

$\underbrace{\langle u, u \rangle}_{\geq 0} + \lambda \underbrace{\langle Au, u \rangle}_{\boxed{\geq 0}} = 0 \Rightarrow \langle u, u \rangle = 0$
$u = 0$

- $\forall \lambda > 0$, si $v = (\lambda A + I) u$ $\quad (u \in D(A))$

alors $\|v\| \geq \|u\|$ $\quad$ (ceci ⇒ injectivité

en effet $\langle (\lambda A + I) u, (\lambda A + I) u \rangle$

$= \langle u, u \rangle + \underbrace{2\lambda}_{\geq 0} \underbrace{\langle Au, u \rangle}_{\geq 0} + \underbrace{\lambda^2 \langle A}_{\geq 0}$

$\geq \langle u, u \rangle$ cqfd

(i.e. si $\lambda A + I$ inver, $I + \lambda A$ ≤ et $\|(I+\lambda A)^{-1}\| \leq 1$)

- Montrons que si $I + \lambda_0 A$ est bijective, alors $I + \lambda A$ est bijective, $\forall \lambda > \frac{\lambda_0}{2}$

?   !!

(125)

On sait $\lambda_0 = 1$, $I + \lambda_0 A$ inversible,

donc $\forall \lambda > \frac{1}{2}$, $I + \lambda A$ inversible

donc $(\lambda_0 = \frac{2}{3})$, $\forall \lambda > \frac{1}{3}$, $I + \lambda A$ inver.

Donc $\forall \lambda > 0$, $I + \lambda A$ inversible

On a déjà montré $I + \lambda A$ inv $\Rightarrow (I + \lambda A)^{-1}$ continue de norme ≤ 1 cqfd.

* <u>Démo H-S:</u>

(1) $\forall u_0 \in D(A)$, $\forall (\lambda, \mu) > 0$, $\forall t$

$$\| u_\lambda(t) - u_\mu(t) \| \leq t \, \| A_\lambda u_0 - A_\mu u_0 \|$$

Donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists (\lambda_0, \mu_0) > 0$ tq $\forall t \in [0, T]$

$$\| u_\lambda(t) - u_\mu(t) \| \leq T \, \| A_\lambda u_0 - A_\mu u_0 \| \leq \varepsilon$$

dès que $\lambda < \lambda_0$, $\mu < \mu_0$ (car $u_0 \in D(A)$ $\Rightarrow A_\lambda u_0 \xrightarrow{\lambda \to 0} A u_0$ $\Rightarrow \| A_\lambda u_0 - A_\mu u_0 \| \leq \varepsilon / T$

Donc, par le critère de Cauchy,

$\exists u \in \mathcal{C}([0, T], E)$,

$$u_\lambda \xrightarrow[\lambda \to 0]{CU} u \quad \text{sur } [0, T]$$

Ceci étant vrai $\forall T > 0$,

$u \in \mathcal{C}^0([0, +\infty[, E)$ tq

$$u_\lambda \xrightarrow[\lambda \to 0]{CU} u \quad \text{sur tout } [0, T] \; (\forall T > 0)$$

Soit $S(t) : D(A) \longrightarrow E$ défini

par $\forall u_0 \in D(A)$, $u(t) = S(t) u_0$ ($u = \lim u_\lambda$

$\Rightarrow S(t)$ linéaire [si $a u_0 + b v_0 \in D(A)$ ($u_0, v_0 \in$; la sol. avec cond. init. du pb A_λ est

(127) Or $u_\lambda - u_\lambda^n$ est sol de

$$\begin{cases} (u_\lambda - u_\lambda^n)_t + A_\lambda (u_\lambda - u_\lambda^n) = 0 \\ (u_\lambda - u_\lambda^n)(0) = u_0 - \tilde{u}_n \end{cases}$$

Donc (cf lemme : $\|u_\lambda(t)\| \leq \|u_0\|$) :

$\forall n, \forall t, \forall \lambda$

$$\|u_\lambda(t) - u_\lambda^n(t)\| \leq \|u_0 - \tilde{u}_n\|$$

i.e. $\|u_\lambda(t) - S(t)u_0\| \leq 2\|u_0 - \tilde{u}_n\| + \|u_\lambda^n(t) - S(t)\tilde{u}_n\|$

$\forall \varepsilon > 0$: Soit $N \mid \|u_0 - \tilde{u}_N\| < \varepsilon/3$

pour cet N, $u_\lambda^N \xrightarrow[{[0,T]} \atop {\lambda \to 0}]{CU} S(t)\tilde{u}_N$

donc $\exists\ \lambda_0 > 0$ tq $\forall \lambda \geq \lambda_0$,

$\forall t \in [0,T]$, $\|u_\lambda^n(t) - S(t)\tilde{u}_n\| < \varepsilon/3$

donc $\|u_\lambda(t) - S(t)u_0\| < 2\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$

i.e. $u_\lambda \xrightarrow[{[0,T]} \atop {\lambda \to 0}]{CU} S(t)u_0$ $(\forall T > 0)$.

et ce $\forall u_0 \in E$.

- $\forall t$, $\boxed{S(t) \in \mathcal{L}_c(E)}$, $\boxed{\|S(t)\| \leq 1}$
et $\forall u_0 \in E$, $(t \to S(t)u_0)$ est limite uniforme sur $[0,T]$, $\forall T > 0$, des application $u_\lambda(t)$. Or u_λ continues $\Rightarrow$ limite unif c, $t \to S(t)u_0$ est continue sur $[0,T]$ $(\forall T > 0)$: $\boxed{(t \to S(t)u_0) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, E) \text{ [et ce } \forall u_0 \in E]}$

$\forall u_0 \in E$, $S(0)u_0 = \lim\limits_{\lambda \to 0} \underbrace{u_\lambda(0)}_{u_0}$ (u_λ solut° ..

$= u_0$

$\boxed{S(0) = Id}$

Soit $u_0 \in E$, $u(t) = S(t)u_0$ ($u(t) = \lim u_\lambda(t)$.

 $S(t)$ est bien un semi-groupe de contraction

⊛ Soit $v_0 \in D(A)$ tq $Av_0 \in D(A)$ (Pompé Brezis!)

et, pour $\lambda > 0$, $v_\lambda = (u_\lambda)_t$

On a alors $(u_\lambda)_t(t) + A_\lambda(u_\lambda(t)) = 0$ $(\Rightarrow (u_\lambda)_t(0) = -A_\lambda$

$\Rightarrow u_\lambda \in \mathcal{C}^\infty$ (par réc : $u_\lambda \in \mathcal{C}^1$, $A_\lambda \in \mathcal{C}^\infty$ $\Rightarrow u_\lambda' = -A_\lambda u_\lambda \in$

et $(u_\lambda)_{tt} + A_\lambda((u_\lambda)_t) = 0$ (A_λ linéaire c)

$\Rightarrow v_\lambda$ solut° $\begin{cases} (v_\lambda)_t + A_\lambda v_\lambda = 0 \\ v_\lambda(0) = -A_\lambda v_0 \end{cases}$

Donc, si V_λ est la solution de $\begin{cases} (V_\lambda)_t + A_\lambda V_\lambda = 0 \\ V_\lambda(0) = -Av_0 \end{cases}$

$v_\lambda - V_\lambda$ est solution de $\begin{cases} (v_\lambda - V_\lambda)_t + A_\lambda(v_\lambda - V_\lambda) = 0 \\ (v_\lambda - V_\lambda)(0) = Av_0 - A_\lambda v_0 \end{cases}$

D'où (cf lemme) (*) $\| v_\lambda(t) - V_\lambda(t) \| \leq \| Av_0 - A_\lambda v_0 \|$

$v_0 \in D(A) \Rightarrow Av_0 - A_\lambda v_0 \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0$.

et $-Av_0 \in D(A)$ cond. init. de V_λ

$\Rightarrow V_\lambda \xrightarrow[\lambda \to 0]{CU} V = S(t)(-Av_0)$ sur tout $[0,T]$

Donc (*) $\Rightarrow v_\lambda \xrightarrow[\lambda \to 0]{CU} -S(t)Av_0$ sur tout $[0,T]$

→ Ainsi $v_0 \in D(A^2) \Rightarrow u_\lambda \xrightarrow{CU} u = S(t)v_0$

$u_\lambda' = v_\lambda \xrightarrow{CU} -S(t)Av_0$

$\Rightarrow u$ dérivable, $u' = -S(t)Av_0 = (S(t)$

$\Rightarrow u \in \mathcal{C}^1$ (car $t \to -S(t)Av_0$ est c)

⊛ Si $v_0 \in D(A)$, $\overline{v_0}^\lambda = J_\lambda v_0 \in D(A)$ $(J_\lambda : E \to$

et $(I + \lambda A)\overline{v_0}^\lambda = v_0$

i.e. $\forall \lambda < \lambda_0$, $\lambda < \lambda_0$:

$$\|(v_\lambda^\infty)' - (-S(t)Av_0)\| \leq \varepsilon + \varepsilon + \|S(t)\|\|Av_{0N} - \dots$$

$((v_\lambda^N)' \xrightarrow[\lambda\to 0]{} -(S(t)Av_{0N}))$
N fixé par le 1^er ε

$$\leq 2\varepsilon + \|Av_{0N} - Av_0\|$$

$\downarrow N\to\infty$ $\quad\quad \downarrow N\to\infty$ 0

$$\|(v_\lambda^\infty)' + S(t)Av_0\| \leq 3\varepsilon \quad \text{dès que } \lambda \text{ petit}$$

$$\Rightarrow \quad (v_\lambda^\infty)' \xrightarrow[\substack{\mathbb{R}^+ \\ \lambda\to 0}]{CU} -S(t)Av_0$$

Or $v_\lambda^\infty \xrightarrow[{[0,T]}]{CU} u(t) = S(t)u_0$ (déf u... S...)

- Donc u est dérivable, $u' = -S(t)Au_0$ est continue (limite uniforme de fct°s)

donc :

$$\forall u_0 \in D(A), \quad u \in \mathcal{E}^1 \quad \text{et} \quad u' + S(t)Au_0 = 0$$

- Si on montre que $S(t)$ et A commutent,

on a $u' + A\underbrace{S(t)u_0}_{u \text{ par déf}} = u' + Au = 0$

et $u(0) = \lim\limits_{\lambda\to 0} u_\lambda(0) = \lim u_0 = u_0$

i.e. u sera sol. du Pb...

(*) $S(t)$ et A commutent : (sur D(A)... A n'est défini que sur D(A)

INUTILE

- Soit $u_0 \in D(A)$:

$$S(t)A_\mu u_0 = \lim_{\lambda\to 0} \overbrace{v_\lambda(t)}^{S_\lambda(t)A_\mu u_0} \quad \text{où } v_\lambda \text{ sol. de}$$

$$\begin{cases} (v_\lambda)_t + A_\lambda v_\lambda = 0 \\ v_\lambda(0) = A_\mu u_0 \end{cases}$$

$$A_\mu S(t)u_0 = A_\mu\left(\lim_{\lambda\to 0} v_\lambda(t)\right) \underset{(A_\mu \text{ continue})}{=} \lim_{\lambda\to 0} \underbrace{A_\mu v_\lambda(t)}_{A_\mu S_\lambda(t)u_0}$$

$\{(v_\lambda)_t + A_\lambda v_\lambda = 0$

on a mq S_λ et

(133) • On a $S(t)v_{0n} \xrightarrow[n\to\infty]{} S(t)v_0$

et $\Delta = \| (S(t)v_{0n})' + S(t)Av_0 \|$

$\leq \| (S(t)v_{0n})' - (v^n_\lambda)' \| + \| (v^n_\lambda)' + S(t)Av_0 \|$

→ Soit U_λ sol. $\begin{cases} U_\lambda' + A_\lambda U_\lambda = 0 \\ U_\lambda(0) = -Av_0 \end{cases}$

$(v_\lambda^n)'$ sol $\begin{cases} (v_\lambda^n)'' + A_\lambda v_\lambda^{n\,\prime} = 0 \\ (v_\lambda^n)'(0) = -A_\lambda v_{0n} \end{cases}$

Donc $U_\lambda - (v_\lambda^n)'$ sol $\begin{cases} y' + A_\lambda y = 0 \\ y(0) = A_\lambda v_{0n} - Av_0 \end{cases}$

i.e. (lemme) $\| U_\lambda - (v_\lambda^n)' \| \leq \| A_\lambda v_{0n} - Av_0 \|$

$\leq \| A_\lambda v_{0n} - Av_{0n} \| + \| Av_{0n} - Av_0 \|$

$\leq \varepsilon(\lambda, n) + \varepsilon(n)$

(les $\varepsilon \to 0$ qd $\lambda \to 0$ ou $n \to \infty$ séparém^t /chaque var)

Or, par déf, $\| U_\lambda + S(t)Av_0 \| = \varepsilon(\lambda) \xrightarrow[\lambda\to 0]{} 0$

Donc $\| (v_\lambda^n)' + S(t)Av_0 \| \leq \varepsilon(\lambda) + \varepsilon(\lambda, n) + \varepsilon(n)$

→ On a vu, puisque v_λ^n est sol. de

$\begin{cases} (v_\lambda^n)' + A_\lambda v_\lambda^n = 0 \\ v_\lambda^n(0) = v_{0n} \end{cases}$

et $v_{0n} \in D(A^2)$ que $(v_\lambda^n)' \xrightarrow[\lambda\to 0]{CU} (S(t)v_{0n})'$ $[0,T]$

[cf $v_\lambda^n \xrightarrow{CU} f_n$, $(v_\lambda^n)' \xrightarrow{CU} g_n$ $\Rightarrow$ f_n dér, $f_n' = g_n$ et $(v_\lambda^n)' \xrightarrow{CU} f_n'$]

Donc $\| (S(t)v_{0n})' - (v_\lambda^n)' \| = \varepsilon_n(\lambda) \xrightarrow[\lambda\to 0]{} 0$

$(\forall n, \ \varepsilon_n(\lambda) \xrightarrow[\lambda\to 0]{} 0)$

• Ainsi $\Delta \leq \varepsilon_n(\lambda) + \varepsilon(\lambda, n) + \varepsilon(n) + \varepsilon(\lambda)$

et Δ ne dépend que de n : $\Delta(n) = \| (S(t)v_{0n})' + S(t)Av_0 \|$