

**Universités de Marseille, septembre 2003**  
**DESS Ingénierie Mécanique et Calcul Scientifique**  
**Matlab**

**TP 2, Discrétisation de problèmes hyperboliques 1d**

On souhaite, dans ce TP, comparer différentes discrétisations d'un problème hyperbolique (à une dimension d'espace), issu de la simulation numérique de la récupération assistée d'hydrocarbures.

On se donne  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$  et 2 fonctions régulières,  $f_1$  et  $f_2$ , de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant  $f_1(0) = 0$ ,  $f_1$  croissante,  $f_2(1) = 0$  et  $f_2$  décroissante. On pose  $f = \frac{f_1(\alpha + \beta f_2)}{f_1 + f_2}$ . On suppose que  $I = \mathbb{R}$  ou  $I = ]0, 1[$ ,  $T > 0$  et on se donne  $u_0 \in L^\infty(I)$ ,  $0 \leq u_0 \leq 1$  p.p.. On cherche à calculer (de manière approchée) la solution (plus précisément l'unique solution faible entropique, cette solution prend ses valeurs dans  $[0, 1]$ )  $u : I \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  du problème :

$$u_t(x) + (f(u))_x = 0, \quad x \in I, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0, \quad \text{p.p. dans } I. \quad (2)$$

Si  $I = ]0, 1[$ , on ajoute à ce problème des conditions aux limites qui ne seront données que sur le problème discrétisé (voir plus loin).

Pour discrétiser ce problème, on utilise un maillage uniforme de pas  $h = 1/N$  ( $N \in \mathbb{N}^*$ ) en espace et de pas  $k = T/M$  ( $M \in \mathbb{N}^*$ ) en temps. Les inconnues discrètes sont notées  $u_i^n$ ,  $i \in \mathbb{Z}$  (pour  $I = \mathbb{R}$ ) ou  $i \in \{1, \dots, N\}$  (pour  $I = ]0, 1[$ ) et  $n \in \{0, \dots, M\}$ . La quantité  $u_i^n$  est censée approcher les valeurs de  $u(x, t)$  pour  $x \in ]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$  et  $t \in [t_n, t_{n+1}[$ , avec  $x_{i+\frac{1}{2}} = ih$  et  $t_n = nk$ . Les schémas numériques que nous allons étudier sont de la forme (volumes finis explicites) :

$$h \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + f_{i+\frac{1}{2}}^n - f_{i-\frac{1}{2}}^n = 0, \quad i \in \mathbb{Z}_I, \quad n \in \{0, \dots, M-1\}, \quad (3)$$

$$u_i^0 = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u_0(x) dx, \quad i \in \mathbb{Z}_I, \quad (4)$$

avec  $\mathbb{Z}_I = \mathbb{Z}$  si  $I = \mathbb{R}$  et  $\mathbb{Z}_I = \{1, \dots, N\}$  si  $I = ]0, 1[$ . La quantité  $f_{i+\frac{1}{2}}^n$  est donc censée être une approximation de  $f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n))$ . On pose  $\frac{k}{h} = \lambda$ . Les schémas étant explicites, nous aurons dans la suite une limitation sur  $\lambda$ .

**1. Equation linéaire, sans conditions aux limites**

On prend ici  $I = \mathbb{R}$ ,  $T = 1/2$ ,  $f_1(s) = s$ ,  $f_2(s) = 1 - s$  (pour tout  $s \in [0, 1]$ , mais on peut aussi définir ainsi  $f_1$  et  $f_2$  sur  $\mathbb{R}$ ),  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$  (de sorte que  $f(s) = s$ ),  $u_0(x) = 1$  si  $x < 0$  et  $u_0(x) = 0$  si  $x > 0$ .

Donner la solution exacte du problème et écrire un programme Matlab calculant la solution approchée pour les 2 choix suivants

- (a) schéma centré :  $f_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{f(u_i^n) + f(u_{i+1}^n)}{2}$ ,
- (b) schéma décentré amont :  $f_{i+\frac{1}{2}}^n = f(u_i^n)$ .

(On remarquera qu'il suffit de calculer  $u_i^n$  pour  $i \in \{-n+1, \dots, n\}$ .) Comparer la solution exacte et la solution approchée dans les cas  $\lambda = 1$  et  $\lambda = 1/2$ . déterminer numériquement l'ordre de convergence dans le cas  $\lambda = 1/2$  en prenant la norme  $L^1$  à l'instant  $t = T$ , c'est-à-dire  $\sum_{i=-M+1}^M |u_i^M - \bar{u}_i^M|$ , avec  $\bar{u}_i^n = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x, T) dx$ .

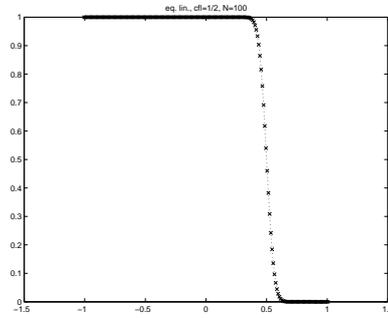


Figure 1: **Eq. Linéaire, schéma décentré, cfl=0.5, N=100, x=solution approchée**

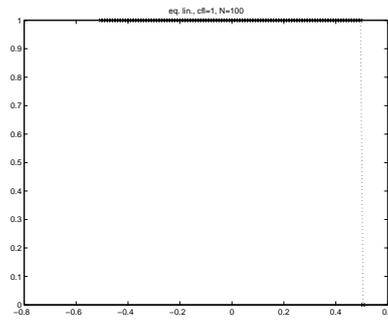


Figure 2: **Eq. Linéaire, schéma décentré, cfl=1, N=100, x=solution approchée**

**Commentaire :** Le schéma centré est instable et ne converge pas... pour le schéma décentré, avec  $\text{cfl}=1$ , on obtient la solution exacte, avec  $\text{cfl}=0.5$ , la convergence est d'ordre 1.

## 2. Equation non linéaire, $f' \geq 0$ , sans conditions aux limites

On prend ici  $I = \mathbb{R}$ ,  $T = 1$ ,  $f_1(s) = s^2$ ,  $f_2(s) = \frac{(1-s)^2}{4}$  (pour tout  $s \in [0, 1]$ , ici aussi on peut considérer que  $f_1$  et  $f_2$  sont définies sur  $\mathbb{R}$ ),  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $u_0(x) = 1$  si  $x < 0$  et  $u_0(x) = 0$  si  $x > 0$ .

Reprendre les mêmes questions que ci dessus (schéma centré et schéma décentré amont, on utilise ici le fait que  $f' \geq 0$  sur  $[0, 1]$ ) avec  $\lambda = 1/m$  et  $\lambda = 1/(2m)$ ,  $m = \max\{f'(s), s \in [0, 1]\}$  (on pourra faire un calcul approché de  $m$ ). La solution exacte peut être calculée (mais cela n'est pas demandé), on pourra choisir comme solution exacte la solution donnée par le schéma décentré amont avec  $\lambda = 1/m$  et  $h$  petit (par exemple  $N = 2000$ , on regarde alors l'ordre de convergence avec des  $h$  "grand"). La solution exacte doit avoir, pour  $t = T$ , une discontinuité de hauteur  $\gamma$  en  $x = f'(\gamma)T$  où  $\gamma \in ]0, 1[$  est t.q.  $f'(\gamma) = f(\gamma)/\gamma$ .

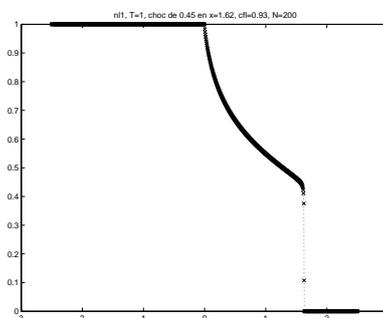


Figure 3: Eq. non Linéaire, schéma décentré,  $\text{cfl}=0.93$ ,  $N=200$ ,  $x$ =solution approchée

**Commentaire :** Le schéma centré est instable. Pour le schéma décentré, on constate que la discontinuité est parfaitement bien placée (environ 1.62 pour  $T = 1$ ) et sa hauteur est bonne (la hauteur exacte est  $1/\sqrt{5}$  c'est-à-dire environ 0.48). La convergence est aussi d'ordre 1.

## 3. Equation non linéaire, $f'$ change de signe, sans conditions aux limites

On prend ici  $I = \mathbb{R}$ ,  $T = 1/2$ ,  $f_1(s) = s$ ,  $f_2(s) = (1 - s)$  (pour tout  $s \in [0, 1]$ , on peut toujours considérer  $f_1$  et  $f_2$  définies sur formules sur  $\mathbb{R}$ ),  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$  (la fonction  $f$  est donc concave),  $u_0(x) = 1$  si  $x < 0$  et  $u_0(x) = 0$  si  $x > 0$ .

Calculer la solution exacte du problème. Comparer cette solution exacte avec les solutions approchées données par les 2 schémas obtenus en prenant  $f_{i+\frac{1}{2}}^n = g(u_i^n, u_{i+1}^n)$  et :

- schéma "amont des pétroliers" :  $g = g_P$ , avec  $g_P(a, b) = \frac{f_1(a)(\alpha + \beta f_2(a))}{f_1(a) + f_2(a)}$  si  $-\alpha + \beta f_1(a) \leq 0$  et  $g_P(a, b) = \frac{f_1(a)(\alpha + \beta f_2(b))}{f_1(a) + f_2(b)}$  si  $-\alpha + \beta f_1(a) > 0$ ,
- schéma de Godunov :  $g = g_G$ ,  $g_G(a, b) = \min\{f(c), c \in [a, b]\}$  si  $a \leq b$  et  $g_G(a, b) = \max\{f(c), c \in [a, b]\}$  si  $a > b$ .

On pourra prendre, par exemple,  $\lambda = 1/m$  et  $\lambda = 1/(2m)$ , avec  $m = \alpha + \beta$ .

#### 4. Avec conditions aux limites

On prend maintenant  $I = ]0, 1[$ ,  $T = 1/2$ . On cherche maintenant  $u_i^n$  pour  $i \in \{1, \dots, N\}$  et il faut donc définir  $f_{i+1/2}^n$  pour  $i \in \{0, \dots, N\}$ .

- (a) Pour les 2 premiers exemples, on utilise le schéma décentré amont pour définir  $f_{i+1/2}^n$  pour  $i \in \{1, \dots, N-1\}$  et on prend  $f_{1/2}^n = f(1)$ ,  $f_{N+1/2}^n = f(u_N^n)$ . Montrer que la solution approchée est la même que précédemment (pour  $i \in \{1, \dots, N\}$ ). Elle converge donc vers le même  $u$  restreint à  $x \in ]0, 1[$  (qui est l'unique solution entropique de (1)-(2) avec la condition à la limite  $u(0, t) = 1$  et pas de condition en  $x = 1$ ).

**Commentaire :** La figure 4 donne la solution pour le schéma décentré pour 200 mailles avec CFL=0.93. Le choc est situé en 0.81 pour  $T=1/2$ .

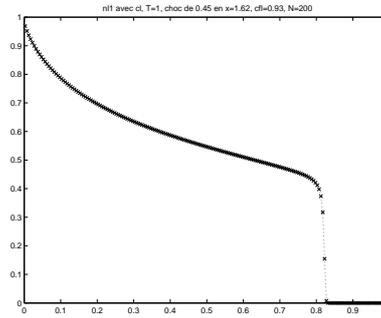


Figure 4: **Eq. non Linéaire, schéma décentré, cfl=0.93, N=200, x=solution approchée**

- (b) pour le 3eme exemple, comparer (avec  $\lambda = 1/(2m)$ ,  $m = \alpha + \beta$ ) les différents choix suivants (avec  $g_P$  et  $g_G$  comme dans la question précédente) :

- i. **Flux intérieurs :**  $f_{i+1/2}^n = g_P(u_i^n, u_{i+1}^n)$  ou  $f_{i+1/2}^n = g_G(u_i^n, u_{i+1}^n)$  pour  $i \in \{1, \dots, N-1\}$ ,
- ii. **Flux en  $x = 0$  :**  $f_{1/2}^n = \alpha$  (choix des pétroliers) ou  $f_{1/2}^n = g_G(u_m, u_1^n)$  avec  $u_m \in ]0, 1[$  t.q.  $f(u_m) = f(1) = \alpha$  (ces choix sont en fait identiques...).
- iii. **Flux en  $x = 1$  :**  $f_{N+1/2}^n = \frac{f_1(u_N^n)\alpha}{f_1(u_N^n)+f_2(u_N^n)}$  (choix des pétroliers) ou  $f_{N+1/2}^n = g_G(u_N^n, 1)$  (les 2 choix sont ici différents).

Les différents schémas convergent vers l'unique solution faible entropique de (1)-(2) avec les conditions aux limites suivantes "faiblement vérifiées" :  $u(0, t) = u_m$  et  $u(1, t) = 1$  pour presque tout  $t \in ]0, T[$ .

**Commentaire :** La figure 5 donne la solution pour le schéma "amont des pétroliers" pour 200 mailles avec CFL=0.6, au temps  $T = 1/2$ . Puis, la figure 6 donne la solution pour le schéma "amont des pétroliers" pour 200 mailles avec CFL=0.6, au temps  $T = 4$ . La solution est alors "stationnaire et vaut  $u_m$ ".

Un autres cas très intéressant est obtenu en prenant un débit d'eau en  $x = 0$  supérieur au débit total (on prend un débit d'eau égal à  $(10/9)\alpha$ , le débit total est égal à  $\alpha$ ). La figure 7 donne la solution pour le schéma "amont des pétroliers" pour 200 mailles avec CFL=0.6, au

temps  $T = 1/2$ , la solution à alors l'allure d'une détente. Puis, la figure 8 donne la solution pour le schéma "amont des pétroliers" pour 200 mailles avec CFL=0.6, au temps  $T = 4$ . On voit une "onde de choc" allant de  $x = 1$  vers  $x = 0$ .

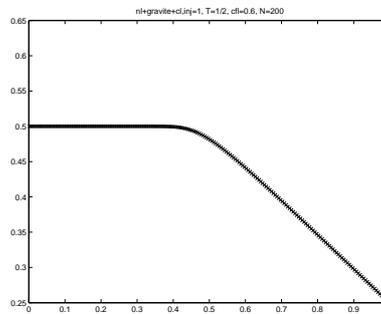


Figure 5: Eq. NL, schéma des pétroliers, injection=1, T=1/2, cfl=0.6, N=200

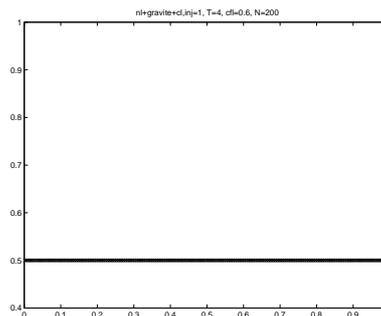


Figure 6: Eq. NL, schéma des pétroliers, injection=1, T=4, cfl=0.6, N=200

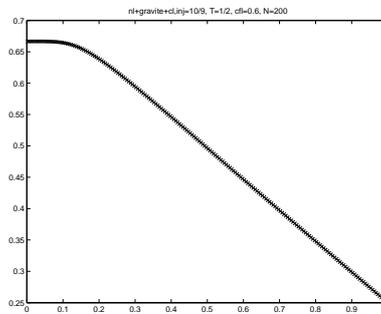


Figure 7: Eq. NL, schéma des pétroliers, injection=10/9,  $T=1/2$ , cfl=0.6,  $N=200$

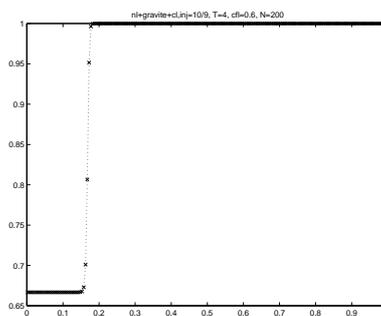


Figure 8: Eq. NL, schéma des pétroliers, injection=10/9,  $T=4$ , cfl=0.6,  $N=200$