Universités de Marseille, septembre 2005
Master professionnel, Ingénierie Mécanique et Calcul Scientifique
Matlab
TP 1, Discrétisation de problèmes elliptiques linéaires 1d

On souhaite, dans ce TP, comparer différentes discrétisations d'un problème (stationnaire) de diffusion-convection-reaction linéaire à une dimension d'espace.

Soient $\varepsilon > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$, $c, d \in \mathbb{R}$ et $f \in C([0,1], \mathbb{R})$. On cherche à approcher la solution u du problème suivant :

$$-\varepsilon u_{xx}(x) + a u_x(x) + b u(x) = f(x),\ x \in [0,1], \tag{1}$$

$$u(0) = c,\ u(1) = d. \tag{2}$$

Le problème (1)-(2) admet une solution unique $u \in C^2([0,1], \mathbb{R})$. On peut remarquer que cette solution est positive si c, d et f sont positives (cette propriété est importante pour de nombreuses applications). On cherche à calculer (de manière approchée) cette solution.

1 Discrétisation par DF-centrées et EF

Ecrire la discrétisation de (1)-(2) par différences finies centrées (ou par éléments finis P1, le résultat sera le même) avec un maillage uniforme de pas $h = 1/(N+1)$ ($N \in \mathbb{N}^\star$). Les inconnues discrètes, notées $u_1, \ldots, u_N$, sont donc supposées approcher les valeurs de u aux points $x_i = ih$, $i = 1, \ldots, N$.

Ecrire un programme Matlab calculant cette solution approchée et déterminer numériquement l'ordre de convergence de la méthode (en norme L^2 ou L^∞) sur des exemples simples (l'ordre doit être égal à 2) . On pourra choisir les exemples suivants :

1. $\varepsilon = 1$, $a = b = c = d = 0$, $f(x) = -12x^2 + 12x - 2$ (la solution doit être $u(x) = x^2(1-x)^2$),
2. $\varepsilon = 1/4$, $a = 1$, $b = 3$, $c = 1$, $d = \exp(-2)$, $f = 0$ (la solution doit être $u(x) = \exp(-2x)$),
3. $\varepsilon = 1/100$, $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$, $f = 0$ (calculer $u \ldots$).

2 Discrétisation par VF-centrés

Reprendre les mêmes questions que ci dessus en discrétisant (1)-(2) par volumes finis centrés avec un maillage uniforme de pas $h = 1/N$ ($N \in \mathbb{N}^\star$). Les inconnues discrètes, toujours notées $u_1, \ldots, u_N$, sont donc supposées approcher les valeurs de u aux points $x_i = ih - h/2$, $i = 1, \ldots, N$ (l'ordre de convergence doit aussi être égal à 2).

3 Discrétisation par VF-décentrés

Dans le troisième exemple décrit ci-dessus, on remarque que la solution n'est qualitativement pas satisfaisante si h est "grand" par rapport à ε (en fait, si $h > (2\varepsilon)/a$). On perd, par exemple, la positivité de la solution approchée (la solution exacte est positive). Il est intéressant aussi de répondre aux questions suivantes :

1. Quelle est la limite, quand $\varepsilon \to 0$, de la solution de (1)-(2) avec $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$, $f = 0$? (pour ε petit par rapport à h, on dit que la solution présente une "couche limite" en $x = 1$.)

2. Quelle est la solution du schéma obtenu par différence finies centrées (par exemple) si $\varepsilon = 0$, $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$, $f = 0$ (distinguer les cas N pair et N impair) ?

Pour obtenir une solution satisfaisante pour tout maillage (mais moins précise pour h "petit"), on va maintenant décentrer la discrétisation du terme de convection (c'est-à-dire au_x). Ecrire la discrétisation de (1)-(2) ainsi obtenue par volumes finis (décentrés pour le terme de convection) avec un maillage uniforme de pas $h = 1/N$ ($N \in \mathbb{N}^\star$). Les inconnues discrètes sont donc toujours supposées approcher les valeurs de u aux points $x_i = ih - h/2$, $i = 1, \ldots, N$.

Ecrire un programme Matlab calculant cette solution approchée et déterminer numériquement l'ordre de convergence de la méthode sur les mêmes exemples simples (sauf celui pour lequel $a = 0\ldots$) que précédemment (l'ordre doit être égal à 1) .
Le but de la suite est de trouver une méthode donnant une solution satisfaisante pour tout maillage et un ordre de convergence égal à 2...

4 Discrétisation par VF-décentrés d'ordre 2, sans limiteurs

On suppose $a > 0$. La discrétisation par VF-décentrés a consisté, pour le calcul du terme de convection, à approcher la valeur de $u(x_{i+1/2})$ (avec $x_{i+1/2} = ih$) par u_i, si $i = 1, \ldots, N$ (et $u(0)$ par c).

Pour obtenir un schéma plus précis (et toujours décentré), on introduit $p_i = (u_{i+1} - u_{i-1})/2h$ pour $i = 2, \ldots, N-1$ et, pour simplifier, on prend $p_1 = p_N = 0$. On discrétise alors le terme de convection en approchant la valeur de $u(x_{i+1/2})$ par $u_i + (h/2)p_i$, si $i = 1, \ldots, N$ (et $u(0)$ par c).

Ecrire un programme Matlab calculant cette solution approchée et déterminer numériquement l'ordre de convergence de la méthode sur le troisième exemple de la première question. Regarder aussi l'allure de la solution approchée pour h "grand".

5 Discrétisation par VF-décentrés d'ordre 2, avec limiteurs

On suppose $a > 0$. On reprend dans cette question le même schéma que dans la question précédente en changeant légérement la formule pour p_i :

$p_i = \text{minmod}\{(u_{i+1} - u_{i-1})/2h, 2(u_{i+1} - u_i)/h, 2(u_i - u_{i-1})/h\}$ avec $\text{minmod}\{\alpha, \beta, \gamma\} = 0$ si α, β et γ n'ont pas tous le même signe et $\text{minmod}\{\alpha, \beta, \gamma\} = \text{sign}(\alpha)\min\{|\alpha|, |\beta|, |\gamma|\}$ si α, β et γ ont le même signe.

Ecrire un programme Matlab calculant cette solution approchée et déterminer numériquement l'ordre de convergence de la méthode sur le troisième exemple de la première question. Regarder aussi l'allure de la solution approchée pour h "grand". [On remarquera que le système à résoudre pour calculer $u_1, \ldots, u_N$ est maintenant un système non linéaire et on cherchera donc une méthode itérative convenable pour le résoudre...]