

# Equations satisfaites par des limites de solutions approchées

Thierry Gallouët

Université Aix-Marseille 1, CMI, 13453

## Introduction

Dans de nombreuses situations industrielles, des schémas numériques efficaces ont été développés par des équipes d'ingénieurs, souvent après de nombreux essais infructueux. L'efficacité du schéma apparaît dans le fait que la solution trouvée semble raisonnable (elle satisfait, par exemple, des contraintes naturelles, comme des contraintes de bornes, et semble concordante avec des observations expérimentales). Toutefois, dans de nombreux cas, il n'est pas clair de voir de quel problème est solution la limite des solutions approchées lorsque les pas de discrétisation tendent vers 0, donc, finalement, de comprendre quelles équations (et quelles conditions aux limites) ont été discrétisées par le schéma numérique.

Quelques exemples de telles situations sont présentés ici :

- Ecoulement diphasique dans une conduite,
- Ecoulement diphasique avec “forcing” dans un milieu poreux,
- Simulation de colonnes à distiller,
- Ecoulement gravitaire dans un milieu poreux hétérogène,
- Ecoulement diphasique multidimensionnel en milieux poreux,
- Simulation du transport des sédiments dans les bassins sédimentaires.

Dans les 3 premiers exemples, la difficulté est de comprendre les conditions au bord satisfaites par la limite des solutions approchées (paragraphe 1 ci après). Dans le quatrième exemple, il s'agit de comprendre en quel sens cette limite satisfait une équation que l'on “devine” (paragraphe 2). Le cinquième exemple (paragraphe 3) décrit un cas où l'équation obtenue n'est peut être pas tout à fait celle que l'on attend. Enfin, dans le dernier exemple (paragraphe 4), le problème est essentiellement ouvert.

## Conditions aux limites pour des équations hyperboliques

Plusieurs situations peuvent être traitées en utilisant un théorème général de convergence des schémas numériques à flux monotone (donné dans [19]). On donne ici 3 exemples.

Le premier exemple vient de la simulation numérique des écoulements diphasiques (liquide-gaz) dans une conduite pétrolière. La difficulté est ici le traitement de la condition à la limite aval. Le système étudié en pratique (voir [7] par exemple) est un système hyperbolique  $3 \times 3$  à une dimension d'espace. La matrice jacobienne du flux a donc trois valeurs propres, deux valeurs propres ont un signe constant (elles correspondent à des ondes dites “de pression” et les vitesses des phases sont faibles par rapport à la vitesse du son du mélange) et la valeur propre intermédiaire (correspondant à une onde dite “de taux de vide”) peut changer de signe. Le traitement de la condition à la limite amont ne pose pas de difficulté en pratique. Souvent, cela consiste à donner les débits (reentrants) de gaz et liquide (et cela est compatible avec le fait que 2 valeurs propres soient positives en cette limite). Par contre, le traitement de la condition à la limite aval est beaucoup plus délicat, probablement essentiellement parce qu'une valeur propre change de signe en aval. Une comparaison avec des cas simples (systèmes hyperboliques linéaires, par exemple. . .) suggère d'imposer un nombre de conditions à la limite égal au nombre de valeurs propres négatives de la jacobienne (et de choisir convenablement ces conditions aux limites). Plusieurs traitements numériques utilisant ce principe, et un calcul des valeurs propres de la jacobienne de la dernière maille de calcul, ont échoué (essentiellement par instabilité du schéma obtenu), ce qui est d'ailleurs compréhensible sur des exemples simples. Le traitement numérique finalement retenu (après de nombreux essais) est très clair du point de vue physique mais peut sembler curieux du point de vue mathématique. Il consiste à imposer toujours, en

aval, la pression et le fait que le liquide ne peut pas rentrer dans la conduite. On ne tient donc pas compte du signe des valeurs propres de la jacobienne, et la contrainte sur le débit liquide (aucun liquide ne rentre en aval) est directement imposée sur le flux numérique (voir [7] pour plus de détails). Cette dernière condition est conforme au fait que la conduite se déverse dans un “séparateur”. On va décrire plus précisément cette technique dans un cas simplifié et montrer des propriétés de stabilité et convergence du schéma numérique obtenu.

Le modèle simplifié (décrit dans [18] et dans un document de travail de M. Baudin, I. Faille et Q.-H. Tran) correspond à supposer constantes les masses volumiques de chaque phase (les ondes de pression ont donc disparu). Dans ce cas, il est relativement facile de voir que le débit volumique total (somme des débits de chaque phase) est constant en espace. On le supposera aussi constant en temps (et positif). Le système se ramène alors à une équation scalaire :

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad (1)$$

où  $u(x, t)$  ( $x \in ]0, 1[$ ,  $t \in \mathbf{R}_+$ ) est le taux de présence du gaz (donc  $u(x, t) \in [0, 1]$ ) et  $f(u) = au - bu^2$  est le débit de la phase gaz ( $a$  et  $b$  sont des constantes,  $b < a < 2b$ ). Le débit total est égal à  $f(1)$  (le débit de la phase liquide est donc  $f(1) - f(u)$ ). La fonction  $f$  est donc strictement croissante entre 0 et  $u_M = a/(2b)$  et décroissante entre  $u_M$  et 1. Une valeur importante est  $u_m \in ]0, u_M[$  t.q.  $f(u_m) = f(1)$  (le liquide est donc à contre courant du gaz pour  $u > u_m$ ). A cette équation, on ajoute une condition initiale :  $u(x, 0) = u_0(x)$  pour  $x \in ]0, 1[$ , on peut prendre par exemple  $u_0 = 0$ , et une condition entrante de flux en  $x = 0$  :  $f(u)(0, t) = \bar{f}(t)$  pour  $t > 0$ , on peut prendre par exemple  $\bar{f}(t) = c$  pour  $t \in ]0, T[$  puis  $\bar{f}(t) = 0$  pour  $t \geq T$ , avec  $f(u_m) < c \leq f(u_M)$  et  $T$  assez grand pour que le problème du traitement de la condition à la limite aval apparaisse (toutefois, si  $T$  est trop grand, un problème pourra aussi apparaître en amont). Enfin, la condition à la limite aval est que le liquide ne peut pas entrer dans la conduite. Pour discrétiser ce problème, on se donne un pas de temps, noté  $k$ , et un pas d'espace, noté  $h$ . Avec des notations faciles à comprendre ( $n$  représente le temps et  $i$  l'espace,  $Nh = 1$ ), la solution approchée est définie par les valeurs  $u_i^n$ ,  $i = 1, \dots, N$  et  $n \geq 0$ , solutions de :

$$h \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + f_{i+\frac{1}{2}}^n - f_{i-\frac{1}{2}}^n = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad n \geq 0, \quad (2)$$

avec les  $u_i^0$  données par les moyennes maille par maille de  $u_0$  et

$$f_{i+\frac{1}{2}}^n = g(u_i^n, u_{i+1}^n), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad n \geq 0, \quad (3)$$

où  $g$  est une fonction définie sur  $[0, 1]^2$ , lipschitzienne, consistante (i.e.  $g(s, s) = f(s)$ ), croissante par rapport à son premier argument et décroissante par rapport au deuxième. On pourra, par exemple, choisir la fonction  $g$  donnée par le schéma de Godunov, c'est à dire  $g = g_G$  avec  $g_G(\alpha, \beta) = \min\{f(\gamma), \gamma \in [\alpha, \beta]\}$  si  $\alpha \leq \beta$  et  $g_G(\alpha, \beta) = \max\{f(\gamma), \gamma \in [\beta, \alpha]\}$  si  $\alpha > \beta$  (bien sûr d'autres choix sont possibles, il est aussi intéressant de noter qu'il est tout à fait possible de choisir des fonctions  $g$  dépendant de  $i$  et  $n$ , le résultat de convergence énoncé plus loin et le théorème principal de [19] restent vrais pourvu que la restriction sur le pas de temps, appelée “condition CFL” soit prise en accord avec les constantes de Lipschitz de toutes les fonctions  $g$  utilisées.)

Il reste à donner le choix de  $f_{\frac{1}{2}}^n$  (limite amont) et  $f_{N+\frac{1}{2}}^n$  (limite aval). Le choix du code TACITE de l'IFP (voir [7]) consiste à poser

$$f_{\frac{1}{2}}^n = \bar{f}(nk), \quad n \geq 0, \quad (4)$$

et

$$\begin{aligned} f_{N+\frac{1}{2}}^n &= f(u_N^n), \text{ si } u_N^n \leq u_m, n \geq 0, \\ f_{N+\frac{1}{2}}^n &= f(u_m), \text{ si } u_N^n > u_m, n \geq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

La condition (5) (condition ‘‘aval’’) exprime bien le fait que le liquide ne peut pas rentrer dans la conduite par l’aval (on rappelle que  $f(u_m) = f(1)$  est le débit volumique total). Noter aussi que si  $u_m < u_N^n < u_M$ , on a  $f'(u_N^n) > 0$  mais que  $f_{N+\frac{1}{2}}^n \neq f(u_N^n)$ . On peut alors voir que ce choix de  $f_{N+\frac{1}{2}}^n$  correspond au schéma de Godunov obtenu avec la valeur 1 dans une maille fictive extérieure au domaine de calcul, c’est à dire  $f_{N+\frac{1}{2}}^n = g_G(u_N^n, 1)$ . (Lorsque  $u_N^n > u_m$ , la résolution du problème de Riemann en sortie correspond donc à une onde de choc rentrant dans la conduite avec un état monophasique gaz à droite.)

Le choix de  $f_{\frac{1}{2}}^n$  (condition ‘‘amont’’) est légèrement incorrect (mais correct pour les situations habituelles d’écoulements en conduites pétrolières). En fait, si on prend le cas  $\bar{f}(t) = c$ , pour  $t \in ]0, T[$ , et  $\bar{f}(t) = 0$ , pour  $t \geq T$ , avec  $f(u_m) < c \leq f(u_M)$ , il existe  $\bar{u}$  et  $\underline{u}$  t.q.  $u_m < \bar{u} \leq \underline{u} < 1$  et  $f(\bar{u}) = f(\underline{u}) = c$ . Le choix de  $f_{\frac{1}{2}}^n$  fait en (4) est alors parfait pour  $t \geq T$  et adéquat pour  $t < T$  tant que  $u_1^n \leq \underline{u}$ , ce qui est la situation habituelle dans les écoulements en conduites pétrolières. Dans le modèle simplifié étudié ici avec  $u_0 = 0$ , c’est aussi la situation si  $T$  n’est pas trop grand. Le choix de  $f_{\frac{1}{2}}^n$  correspond alors au choix de Godunov, c’est à dire  $f_{\frac{1}{2}}^n = g_G(\bar{u}^n, u_1^n)$  avec  $\bar{u}^n = \bar{u}$  si  $nk < T$  et  $\bar{u}^n = 0$  si  $nk \geq T$ . On peut noter que  $f_{\frac{1}{2}}^n \neq g_G(\underline{u}, u_1^n)$ , en général, si  $u_1^n \in [0, 1]$  ( $nk < T$ ), bien que  $f_{\frac{1}{2}}^n = f(\bar{u}) = f(\underline{u})$ , car  $g_G(\underline{u}, u_1^n) = f(u_1^n)$  si  $u_1^n \in [u_M, 1]$  et  $g_G(\underline{u}, u_1^n) = f(u_M)$  si  $u_1^n \in [0, u_M]$ . Pour le résultat de convergence énoncé ci après, il est donc important d’avoir choisi  $\bar{u}$  et non  $\underline{u}$ . On peut aussi noter que le choix (4) peut créer des instabilités numériques si  $u_1^n > \underline{u}$ . Un exemple simple est obtenu avec  $u_1^n = u_2^n = 1$  et  $f_{\frac{1}{2}}^n = \bar{f}(nk) > f(u_m)$ , on alors  $u_1^{n+1} > 1$ . Pour traiter tous les cas possibles en amont (c’est à dire traiter aussi le cas  $u_1^n > \underline{u}$ ) et pour éviter de demander une régularité inutile sur  $\bar{f}$ , on va donc légèrement modifier (4) en prenant :

$$f_{\frac{1}{2}}^n = g_G(\bar{u}^n, u_1^n), \quad n \geq 0, \quad (6)$$

avec  $\bar{u}^n = (1/k) \int_{nk}^{(n+1)k} \bar{u}(t) dt$  où, pour tout  $t \geq 0$ ,  $\bar{u}(t)$  est la plus petite valeur de  $[0, 1]$  t.q.  $f(\bar{u}(t)) = \bar{f}(t)$ .

Le schéma numérique (2),(3),(5),(6) définit alors une solution approchée, notée  $u_{h,k}$ , avec  $u_{h,k} = u_i^n$  pour  $x \in ](i-1)h, ih[$  et  $t \in ]nk, (n+1)k[$ . Pour  $u_0 \in L^\infty(]0, 1[)$  et  $\bar{u} \in L^\infty(]0, \infty[)$ ,  $u_0$  et  $\bar{u}$  prenant leurs valeurs dans  $[0, 1]$ , on peut alors montrer que  $u_{h,k}$  prend aussi ses valeurs dans  $[0, 1]$  sous une condition de stabilité habituelle (condition CFL)  $k \leq Ch$ , où  $C$  ne dépend que des constantes de Lipschitz (sur  $[0, 1]^2$ ) de  $g$  et  $g_G$ . On montre également que  $u_{h,k}$  converge dans  $L_{loc}^p([0, 1] \times [0, \infty[)$  pour tout  $p < \infty$ , quand  $h \rightarrow 0$ , vers l’unique solution entropique, notée  $u$ , de (1) avec condition initiale  $u_0$  et condition à la limite  $\bar{u}$  en  $x = 0$  et 1 en  $x = 1$ . Ces conditions aux limites étant à prendre en un sens ‘‘faible’’, plus précisément  $u$  est l’unique solution du problème suivant :

$$\begin{aligned}
& u \in L^\infty([0, 1[ \times ]0, \infty[), \\
& \int_0^\infty \int_0^1 [(u - \kappa)^\pm \varphi_t + \text{sign}^\pm(u - \kappa)(f(u) - f(\kappa))\varphi_x] dx dt \\
& + \int_0^1 (u_0 - \kappa)^\pm \varphi(x, 0) dx + M \int_0^\infty (\bar{u}(t) - \kappa)^\pm \varphi(0, t) dt + M \int_0^\infty (1 - \kappa)^\pm \varphi(1, t) dt \geq 0, \\
& \forall \kappa \in [0, 1], \forall \varphi \in C_c^1([0, 1] \times [0, \infty[, \mathbf{R}_+).
\end{aligned} \tag{7}$$

Dans l'inégalité donnée en (7),  $M$  est un majorant de  $|f'|$  sur  $[0, 1]$  (la solution de (7) ne dépend donc pas du choix de ce majorant). Lorsque  $u$  est une fonction régulière solution de (7), on peut montrer (cf [19]) que  $u$  satisfait la condition initiale et satisfait les conditions aux limites en un sens faible connu sous le nom de “condition BLN”, voir [1], c'est à dire :

$$\text{sign}(u(0, t) - \bar{u}(t))(f(u(0, t)) - f(\kappa)) \leq 0, \quad \forall \kappa \in [\bar{u}(t), u(0, t)], \quad p.p. \quad t \in \mathbf{R}_+,$$

$$\text{sign}(u(1, t) - 1)(f(u(1, t)) - f(\kappa)) \geq 0, \quad \forall \kappa \in [1, u(1, t)], \quad p.p. \quad t \in \mathbf{R}_+,$$

avec  $[a, b] = \{ta + (1-t)b, t \in [0, 1]\}$ . Cela signifie, à l'amont, que  $u(0, t) = \bar{u}(t)$  ou  $u(0, t) \geq \underline{u}(t)$  et, à l'aval, que  $u(1, t) \leq u_m$  ou  $u(1, t) = 1$ .

Ce résultat de convergence est montré dans [6], il découle essentiellement des résultats de [19] qui contient également des extensions multidimensionnelles de ces résultats de convergence et de la définition de solution entropique pour une équation hyperbolique avec des conditions aux limites (ainsi que des théorèmes d'existence et d'unicité, en majeure partie dus à Otto, [13]). Il est intéressant de noter que si on remplace, dans (7), les 2 entropies  $(u - \kappa)^\pm$  par la seule entropie  $|u - \kappa|$ , on a toujours (bien sûr), un résultat d'existence de solution mais on n'a plus nécessairement l'unicité (voir [19]).

Dans le cas plus précis qui nous intéresse ici, on peut aussi remarquer que pour obtenir le résultat de convergence, il n'est pas nécessaire que les flux en amont et en aval puissent s'écrire avec le flux de Godunov, noté  $g_G$ , on peut remplacer  $g_G$  par n'importe quelle fonction  $g$  vérifiant les conditions décrites ci dessus pour les flux intérieurs (caractère lipschitzien, consistance et monotonie) et, à l'aval, il suffit en fait que  $f_{N+\frac{1}{2}}^n = h(u_N^n)$  où  $h$  est une fonction croissante t.q.  $h(1) = f(1)$ .

Le deuxième exemple considéré ici est celui d'un écoulement diphasique, eau et huile, dans un milieu poreux. Il s'agit en fait de la modélisation d'une expérience de laboratoire sur une “carotte” extraite d'un gisement pétrolier. Les phases sont supposées immiscibles et incompressibles, les effets capillaires sont négligés (mais on conserve les effets de gravité). Un modèle à une dimension d'espace est obtenu en écrivant la conservation des deux phases et la loi de Darcy. Grâce au caractère unidimensionnel, la pression peut être éliminée, et le modèle se ramène à l'équation (1) avec

$$f(u) = \frac{f_1(u)(\alpha + \beta f_2(u))}{f_1(u) + f_2(u)}$$

(connue, pour  $\beta = 0$  en général, sous le nom d'équation de Buckley-Leverett). L'inconnue est la saturation de la phase eau, notée  $u$ . La quantité  $\alpha$  représente le débit volumique total (la porosité est prise égale à 1), elle est nécessairement constante en espace et on la suppose aussi constante en temps et positive. La quantité  $\beta$  représente la différence de densité entre les phases, elle est aussi constante et positive. Les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  sont les mobilités des phases. La fonction  $f_1$  est croissante régulière et vérifie  $f_1(0) = 0$ , la fonction  $f_2$  est décroissante régulière et vérifie  $f_2(1) = 0$ . La fonction  $f_1 + f_2$  est bornée inférieurement (sur  $[0, 1]$ ) par un nombre strictement positif. Un premier exemple simple de telles fonctions est  $f_1(s) = s$  et  $f_2(s) = 1 - s$ .

A l'équation (1) on ajoute une condition initiale  $u_0 \in L^\infty(]0, 1[)$ , prenant ses valeurs entre 0 et 1 (cette condition initiale est traitée numériquement de manière classique), et des conditions aux limites précisées plus loin.

Le schéma numérique utilisé est encore le schéma (2) avec (3). Le choix de la fonction  $g$  est connu sous le terme “amont des pétroliers” ou “décentrement phase par phase” (voir [3], par exemple) :

$$\begin{aligned} g(a, b) &= \frac{f_1(a)(\alpha + \beta f_2(a))}{f_1(a) + f_2(a)} \text{ if } -\alpha + \beta f_1(a) \leq 0 \\ g(a, b) &= \frac{f_1(a)(\alpha + \beta f_2(b))}{f_1(a) + f_2(b)} \text{ if } -\alpha + \beta f_1(a) > 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Il s'agit bien d'une fonction lipschitzienne sur  $[0, 1]^2$ , consistante (i.e.  $g(a, a) = f(a)$ ), croissante par rapport à son premier argument et décroissante par rapport au second (on dira qu'une telle fonction est “lipschitzienne, consistante et monotone”).

Il reste encore à donner le choix de  $f_{\frac{1}{2}}^n$  et de  $f_{N+\frac{1}{2}}^n$ . En  $x = 0$ , on injecte de l'eau seule (il n'y a ni entrée ni sortie d'huile). On prend donc

$$f_{\frac{1}{2}}^n = \alpha, \quad n \geq 0. \quad (9)$$

En  $x = 1$ , le fluide sortant de la carotte est un mélange d'eau et d'huile. Pour des raisons “physiques” (liées à la pression), on introduit en général une fonction (régulière)  $\bar{f}_1$  croissante et vérifiant  $\bar{f}_1(0) = 0$  et une fonction (régulière)  $\bar{f}_2$  décroissante et vérifiant  $\bar{f}_2(1) = 0$ . Le choix de  $\bar{f}_1$  et  $\bar{f}_2$  est aussi tel que  $\bar{f}_1 + \bar{f}_2$  soit bornée inférieurement sur  $[0, 1]$  par un nombre strictement positif. On suppose également que

$$\frac{\bar{f}_1(s)\alpha}{\bar{f}_1(s) + \bar{f}_2(s)} \leq f(s), \quad \forall s \in [0, 1].$$

Pour simplifier, on peut imaginer que  $\bar{f}_1 = f_1$  et  $\bar{f}_2 = f_2$ . Le choix de  $f_{N+\frac{1}{2}}^n$  est alors :

$$f_{N+\frac{1}{2}}^n = \frac{\bar{f}_1(u_N^n)\alpha}{\bar{f}_1(u_N^n) + \bar{f}_2(u_N^n)}. \quad (10)$$

Ici encore, il n'est pas immédiat de comprendre de quel problème est solution la limite des solutions approchées (et de montrer que les solutions approchées convergent bien quand les pas de discrétisation tendent vers 0). Ceci se montre en mettant une nouvelle fois les conditions aux limites sous la forme d'un flux numérique “lipschitzien, consistant et monotone” évalué entre la valeur de  $u^n$  dans la première ou dernière maille (selon que l'on travaille en  $x = 0$  ou en  $x = 1$ ) et une valeur extérieure convenablement choisie. On est alors ramené, comme dans le premier exemple, au résultat général de convergence sur les schémas à flux monotones donné dans [19]. Pour effectuer ce travail, on précise maintenant la structure de la fonction  $f$ . Le cas le plus intéressant est obtenu pour  $\beta f_1(1) > \alpha$  et lorsque la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]0, u_M[$  puis strictement décroissante sur  $]u_M, 1[$ , comme dans le premier exemple. En fait, le point important est qu'il existe un et seul  $u_m \in ]0, 1[$  tel que  $f(u_m) = f(1) = \alpha$  et tel que la fonction  $f$  soit croissante sur  $[0, u_m]$  puis reste supérieure ou égale à  $\alpha$  sur  $[u_m, 1]$  (et qu'elle soit régulière). Il est alors “facile” de voir que (9) donne

$$f_{\frac{1}{2}}^n = \alpha = g_G(u_m, u_1^n),$$

où  $g_G$  est le flux de Godunov (décrit précédemment). Le problème est un peu plus délicat pour la condition en  $x = 1$ , mais on peut construire (cf. [6]) une fonction  $g_o$  de  $[0, 1]^2$  dans  $\mathbf{R}$ ,

lipschitzienne, consistante (c'est à dire t.q.  $g_o(s, s) = f(s)$  pour tout  $s \in [0, 1]$ ) croissante par rapport à son premier argument, décroissante par rapport à son deuxième argument et telle que

$$f_{N+\frac{1}{2}}^n = g_o(u_N^n, 1).$$

On peut maintenant appliquer le théorème principal de [19]. Sous une condition de stabilité habituelle (condition "CFL"), ne dépendant que des constantes de Lipschitz de  $g$ ,  $g_G$  et  $g_o$ , la solution approchée,  $u_{h,k}$ , définie comme dans le premier exemple, prend ses valeurs entre 0 et 1 et converge, quand  $h \rightarrow 0$ , vers une fonction  $u \in L^\infty([0, 1[ \times ]0, \infty[)$ , dans  $L_{loc}^p([0, 1] \times [0, \infty[)$  pour tout  $p < \infty$ . La fonction  $u$  étant l'unique solution du problème suivant :

$$\begin{aligned} & u \in L^\infty([0, 1[ \times ]0, \infty[), \\ & \int_0^\infty \int_0^1 [(u - \kappa)^\pm \varphi_t + \text{sign}^\pm(u - \kappa)(f(u) - f(\kappa))\varphi_x] dx dt \\ & + \int_0^1 (u_0 - \kappa)^\pm \varphi(x, 0) dx + M \int_0^\infty (u_m - \kappa)^\pm \varphi(0, t) dt + M \int_0^\infty (1 - \kappa)^\pm \varphi(1, t) dt \geq 0, \\ & \forall \kappa \in [0, 1], \forall \varphi \in C_c^1([0, 1] \times [0, \infty[, \mathbf{R}_+), \end{aligned} \tag{11}$$

où  $M$  est un majorant de  $|f'|$  sur  $[0, 1]$ . Comme pour le premier exemple, on peut préciser le sens des conditions aux limites. Lorsque  $u$  est une fonction régulière solution de (11), on peut montrer (cf [19]) que  $u$  satisfait la condition initiale et satisfait les conditions aux limites au sens "BLN", c'est à dire :

$$\text{sign}(u(0, t) - u_m)(f(u(0, t)) - f(\kappa)) \leq 0, \forall \kappa \in [u_m, u(0, t)], p.p. t \in \mathbf{R}_+,$$

$$\text{sign}(u(1, t) - 1)(f(u(1, t)) - f(\kappa)) \geq 0, \forall \kappa \in [1, u(1, t)], p.p. t \in \mathbf{R}_+,$$

avec  $[a, b] = \{ta + (1 - t)b, t \in [0, 1]\}$ . Cela signifie que  $u(0, t) = u_m$  ou  $u(0, t) = 1$  et que  $u(1, t) \leq u_m$  ou  $u(1, t) = 1$ . Du point de vue des flux, on a toujours  $f(u(0, t)) = \alpha$  mais on a  $f(u(1, t)) < \alpha$  si  $u(1, t) < u_m$  (et si  $f$  est strictement croissante sur  $[0, u_m]$ ), ce qui signifie que l'on a bien une production d'huile en  $x = 1$ .

Le résultat de convergence donné ci dessus est encore vrai sous des conditions plus générales. On peut, par exemple (comme cela est dit dans le premier exemple), utiliser une fonction flux numérique dépendant de  $i + 1/2$ . On peut également remplacer dans (10) la fonction  $\frac{\bar{f}_1(s)\alpha}{\bar{f}_1(s) + \bar{f}_2(s)}$  par n'importe quelle fonction croissante, égale à  $f(1)$  en 1 et inférieure à  $f$ , la solution approchée converge toujours vers  $u$ , unique solution de (11).

Le troisième exemple est un modèle de colonnes à distiller binaires, ce modèle est utilisé pour le "contrôle" des colonnes. Ici encore le système discret utilisé est clair mais les conditions aux bords de la colonne, satisfaites par les limites de solutions approchées, ne sont pas si claires. L'intérêt de les connaître peut éventuellement suggérer des moyens pour améliorer le contrôle des colonnes. Le problème est voisin des deux problèmes déjà étudiés ci dessus. On peut se référer à [12] pour une description du problème discret et à [6] pour l'étude des conditions aux limites obtenues.

### Conditions d'entropie pour des équations hyperboliques à flux discontinus

On s'intéresse dans ce paragraphe à la prise en compte d'hétérogénéités du milieu solide dans les écoulements diphasiques, par exemple eau et huile, dans un milieu poreux. Comme précédemment, les phases sont supposées immiscibles et incompressibles et les effets capillaires sont négligés. En ne considérant, pour simplifier l'exposé, que des écoulements à une dimension

d'espace, l'équation à résoudre est donc de la forme (1) où  $f(u)$  est remplacé par la fonction  $f(x, u)$  définie par

$$f(x, u) = \frac{f_1(u)(\alpha + \beta k(x)f_2(u))}{f_1(u) + f_2(u)}. \quad (12)$$

L'hétérogénéité du milieu est représentée par le coefficient  $k$  qui dépend de la variable d'espace,  $x$ . On va supposer que

$$\begin{aligned} k(x) &= k_g \text{ pour } x < 0, \\ k(x) &= k_d \text{ pour } x > 0, \end{aligned} \quad (13)$$

avec  $k_g \neq k_d$ . On ne s'intéresse pas ici au problème des conditions aux limites, la variable d'espace est prise dans  $\mathbf{R}$ . On considère donc l'équation (1) avec, au lieu de  $f(u)$ , la fonction  $f(x, u)$  donnée par (12). A cette équation, on ajoute une condition initiale (dans  $L^\infty(\mathbf{R})$ ). Les équations hyperboliques à coefficients discontinus présentent souvent des caractéristiques "désagréables" (non existence ou non unicité de solutions), on peut se reporter, par exemple, à [2]. On va voir cependant que, pour ce modèle d'origine "physique", on obtient bien un résultat d'existence et d'unicité (d'une solution entropique).

Le schéma numérique, utilisé par exemple dans la communauté pétrolière, est le schéma (2) avec un calcul de  $f_{i+1/2}^n$  utilisant une fonction flux numérique  $g$ , dépendant de  $i + 1/2$ , donnée par (8) où  $\beta$  est remplacé par  $\beta k_{i+1/2}$  où  $k_{i+1/2}$  est la moyenne harmonique des valeurs de  $k$  dans les mailles  $i$  et  $i + 1$ , le point  $x = 0$  (lieu de l'hétérogénéité) étant placé entre deux mailles. En fait, ce choix de moyenne harmonique pour  $k$  n'est pas tout à fait justifié pour l'équation (1) avec (12) (mais n'est pas pénalisant). Ce choix est "naturel" lorsque l'on s'intéresse au système couplé dont les inconnues sont  $u$  (qui est une saturation) et la pression  $p$ . Le système couplé contient des termes de diffusion sur  $p$ , et  $k$  est l'un des facteurs de cette diffusion. Ici, il a été possible d'éliminer la pression grâce au caractère unidimensionnel de l'écoulement mais on a conservé cette technique de moyenne harmonique pour le traitement de  $k$ . La question est donc maintenant de comprendre le sens que l'on doit donner à l'équation (1) avec (12) et de voir si les solutions approchées données par le schéma numérique convergent bien vers cette solution. Cette question est étudiée dans [20] dans le cas particulier où  $\alpha = 0$  et lorsque la fonction  $f_1 f_2 / (f_1 + f_2)$  est strictement concave (elle est par ailleurs nulle en 0 et 1). Cette situation est la situation habituelle dans le contexte pétrolier. Un cas simple consiste à prendre  $f_1(s) = s$  et  $f_2(s) = 1 - s$ . L'équation est donc

$$u_t + (kg(u))_x = 0, \quad (14)$$

avec  $k$  donné par (13) et  $g$  une fonction régulière strictement concave t.q.  $g(0) = g(1) = 0$ . La variable d'espace est dans  $\mathbf{R}$  et la variable de temps dans  $\mathbf{R}_+$ . A cette équation, on ajoute une condition initiale  $u_0 \in L^\infty(\mathbf{R})$ . L'inconnue  $u$  étant une saturation, on ajoutera ici que  $u_0$  prend ses valeurs dans  $[0, 1]$  (et la solution  $u$  doit aussi prendre ses valeurs dans  $[0, 1]$ ).

A partir de la définition de solution entropique lorsque  $k$  est régulière, un passage à la limite sur des régularisations de  $k$  suggère de considérer qu'une solution de (14) est une fonction vérifiant :

$$\begin{aligned} &u \in L^\infty(\mathbf{R} \times ]0, \infty[), \\ &\int_0^\infty \int_{\mathbf{R}} [|u - \kappa| \varphi_t + k(x) \text{sign}(u - \kappa)(g(u) - g(\kappa)) \varphi_x] dx dt \\ &+ \int_{\mathbf{R}} |u_0 - \kappa| \varphi(x, 0) dx + |k_g - k_d| \int_0^\infty g(\kappa) \varphi(0, t) dt \geq 0, \\ &\forall \kappa \in [0, 1], \forall \varphi \in C_c^1(\mathbf{R} \times [0, \infty[, \mathbf{R}_+). \end{aligned} \quad (15)$$

Dans cette formulation, le dernier terme correspond à une condition d'entropie en  $x = 0$ , c'est à dire à l'endroit de l'hétérogénéité (cette condition ne semble pas bien connue du milieu pétrolier). Il est montré dans [20] que (15) admet une et une seule solution. L'existence étant obtenue en passant à la limite sur les solutions des problèmes obtenus en régularisant  $k$ . Dans [20], des tests numériques montrent la convergence des solutions approchées données par le schéma décrit précédemment vers la solution de (15) mais il n'y a pas de démonstration de convergence pour ce schéma. Une démonstration de convergence pour un schéma numérique particulier est donnée dans [17]. Lorsque la fonction  $g$ , apparaissant dans (14), n'est plus concave (ou convexe) et que  $k$  est discontinu, le problème semble plus difficile à résoudre et il n'est pas clair qu'on puisse trouver une formulation entropique comme (15).

L'équation (14) peut également être vue comme un système hyperbolique de 2 équations à 2 inconnues :

$$\begin{aligned} u_t + (kg(u))_x &= 0, \\ k_t &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Ce système est un système appelé "résonnant". Dans le cas simple où  $g(u) = u(1 - u)$ , on voit que la matrice jacobienne du système (qui est une matrice  $2 \times 2$ ) a 0 pour valeur propre double et n'est pas diagonalisable, pour  $u = 1/2$  et  $k$  quelconque. L'étude théorique de (16) est donc délicate, mais la forme (16) de l'équation (14) suggère de nouveaux schémas pour la discrétisation de (14), reprenant ainsi des idées développées pour le traitement des termes sources dans les équations et systèmes hyperboliques (voir, par exemple, [10] qui est l'un des premiers travaux sur ce sujet). Deux schémas dans cet esprit, un schéma de Godunov et un schéma appelé VFRoe-ncv (voir [8] pour un schéma semblable dans le cas du traitement d'un terme source de topographie dans les équations de Saint Venant), sont présentés dans [20] et les résultats obtenus sont très convaincants par rapport aux schémas classiquement utilisés pour discrétiser (14).

## H-convergence numérique pour des systèmes parabolique-hyperbolique

On s'intéresse toujours ici à un problème d'écoulement diphasique en milieu poreux mais on considère maintenant un problème à plusieurs dimensions d'espace. On ne peut plus se ramener à une seule équation avec une seule inconnue (la saturation) comme cela a été fait précédemment. Le système à résoudre est un système de 2 équations à 2 inconnues, pression (notée ici  $u$ ) et saturation (notée  $s$ ). Un exemple "simple" d'écoulement immiscible, sans capillarité, sans gravité, dans un milieu homogène, mène à un système du type suivant :

$$\begin{aligned} (\phi(u)s)_t - \operatorname{div}(f_1(s)K \operatorname{grad} u) &= g_1, \\ (\phi(u)(1-s))_t - \operatorname{div}(f_2(s)K \operatorname{grad} u) &= g_2. \end{aligned} \tag{17}$$

La matrice  $K$  représente la perméabilité du milieu poreux. Les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  sont les mobilités des phases. Elles prennent des valeurs positives,  $f_1$  est croissante,  $f_2$  est décroissante,  $f_1(0) = f_2(1) = 0$  et la somme,  $f_1 + f_2$ , est bornée inférieurement par un nombre strictement positif (on peut penser à  $f_1(s) = s$  et  $f_2(s) = 1 - s$ ). Les phases sont incompressibles mais le milieu poreux est supposé déformable, ceci s'exprime par la fonction  $\phi$ . Cette fonction  $\phi$  est strictement croissante. On peut imaginer, par exemple, que la fonction  $\phi$  est affine. Les termes sources,  $g_1$  et  $g_2$ , sont des fonctions (non précisées ici, voir par exemple [5]) de  $s$  et  $u$ , et sont localisés aux puits (ils ne sont pas toujours faciles à prendre en compte...). Le problème se pose dans un ouvert borné de  $\mathbf{R}^d$  ( $d = 2$  ou  $3$ ) et pour  $t > 0$ . Il faut donc ajouter des conditions aux limites, on peut prendre, par exemple, une condition de flux nul (ce qui est réaliste et simplifie le traitement des conditions aux limites), et des conditions initiales sur  $u$  et  $s$ .

On ne sait pas actuellement montrer l'existence (et l'unicité) de solutions au système (17), avec conditions aux limites et conditions initiales. Par contre, il existe des schémas numériques pour

donner des solutions approchées à ce problème. Un schéma classique de volumes finis avec une généralisation du schéma “amont des pétroliers” décrit (en 1d) dans le premier paragraphe (à vrai dire, ici le décentrement phase par phase est simple car, ayant négligé l’action de la gravité, les deux phases se déplacent dans le même sens) donne des solutions approchées sur lesquelles on a des estimations. La saturation approchée prend ses valeurs entre 0 et 1 (on a donc une estimation  $L^\infty$  sur  $s$ ) et on obtient des estimations sur la pression approchée dans une “version discrète” de  $L^2(]0, T[, H^1)$  et sur  $u_t$  dans une “version discrète” de  $L^2(]0, T[, (H^1)')$ , pour tout  $T > 0$ . On peut donc supposer que les suites de solutions approchées convergent (à une extraction près) dans  $L^2$  (pour la pression) et dans  $L^\infty$  pour la topologie faible étoile (pour la saturation), quand les pas de discrétisation (espace et temps) tendent vers 0. La question est alors de savoir de quels problèmes ces limites de solutions approchées sont solutions.

La réponse est assez claire pour la pression. La pression approchée vérifie une version discrétisée de l’équation

$$(\phi(u))_t - \operatorname{div}(M(s)\operatorname{grad}u) = g_1 + g_2, \quad (18)$$

avec  $M = (f_1 + f_2)K$ . Il est alors possible, voir [5] ou [4], d’adapter les raisonnements classiques de H-convergence ou G-convergence (introduits dans [14], puis [16] ou [11] et plus récemment par [15] qui étudie le problème, important et inévitable ici, de la dépendance de la matrice de diffusion par rapport au temps). On obtient que la limite des pressions approchées (à une sous suite près) est encore solution d’un problème du type

$$(\phi(u))_t - \operatorname{div}(\overline{M}\operatorname{grad}u) = g. \quad (19)$$

Pour être plus précis, le champ de vecteur (en  $x$  et  $t$ ) qui représente, dans le schéma numérique, la discrétisation de  $M(s)\operatorname{grad}u$ , est borné dans  $L^2(]0, T[, L^2)$  (pour tout  $T > 0$ ) et donc converge (à une sous suite près), dans  $L^2$  pour la topologie faible, vers un champ de vecteurs  $\sigma$ . On montre alors (en s’inspirant des méthodes développées pour la H-convergence et la G-convergence) qu’il existe une matrice  $\overline{M}$ , dépendant de  $x$  et  $t$ , telle que  $\sigma = \overline{M}\operatorname{grad}u$  où  $u$  est la limite (dans  $L^2$ ) des pressions approchées. La matrice de diffusion  $\overline{M}$  est coercive et bornée mais ne s’exprime pas comme une fonction de  $s$ , limite des saturations approchées. En particulier, elle n’est pas égale à  $M(s) = (f_1(s) + f_2(s))K$  sauf si les saturations approchées convergent fortement vers  $s$ . Il n’est pas clair que cette dernière propriété de convergence forte soit vérifiée. Le second membre  $g$  n’est pas non plus la fonction attendue de  $s$  (c’est à dire  $g = g_1(s, u) + g_2(s, u)$ ) si les saturations approchées ne convergent pas fortement. Les calculs numériques effectués sur ce modèle présentent, dans certains cas (physiquement intéressants), de fortes variations de répartition spatiale de  $s$  à l’échelle des maillages réalistes utilisés. Il est aussi intéressant de noter que les ingénieurs pétroliers travaillant sur ces modèles adaptent les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  à la taille du maillage utilisé pour la discrétisation du problème.

Pour certaines formes des fonctions  $f_1$  et  $f_2$ , on peut aussi préciser l’équation satisfaite par  $s$  (voir [5]).

### Equation de diffusion avec contrainte sur les flux de diffusion

On s’intéresse dans ce dernier paragraphe à la simulation numérique de la genèse des bassins sédimentaires. Un élément important de cette simulation est l’élaboration d’un modèle stratigraphique, c’est à dire d’un modèle qui décrit les transports de sédiments et les phénomènes d’érosion et de sédimentation dans un bassin sédimentaire dont on connaît les déplacements tectoniques et les variations du niveau de la mer. On connaît aussi les apports de sédiments aux frontières du bassin (voir [9] par exemple). Les modèles utilisés sont souvent directement sous forme discrétisée. En considérant, pour simplifier, des modèles à une seule lithologie, ils consistent à écrire une loi de conservation du sédiment avec une loi de transport donnant des

flux de sédiment proportionnels au gradient de la topographie, et une prise en compte convenable des phénomènes de sédimentation et d'érosion. En particulier, ces modèles utilisent une contrainte sur la taux d'érosion. Cette contrainte s'écrit  $h_t \geq -E$  où  $E$  est donné (par des conditions climatiques) et  $h$  est l'épaisseur de sédiment (c'est une inconnue du problème). Les flux de diffusion sont alors limités pour respecter partout cette contrainte sur le taux d'érosion. Il faut bien sûr tenir compte de conditions aux limites données (en général, les flux de sédiment sont donnés au bord).

Les schémas numériques utilisés pour la résolution numérique de ce problème sont souvent explicites et donc coûteux (car on discrétise ici un opérateur de diffusion). Comme cela a été dit précédemment, ils ont aussi, en général, été élaborés directement sous leur forme discrète (sans passer par l'écriture d'une équation "continue"). Il semble alors intéressant de mieux comprendre de quelles équations continues ces schémas sont la discrétisation et si possible de montrer la convergence des solutions approchées vers la solution du problème continu lorsque les paramètres de discrétisation tendent vers 0. En fait, la compréhension de ces équations continues est également utile pour mieux élaborer des schémas implicites (ce qui est probablement nécessaire pour avoir des méthodes plus performantes). Le problème de la convergence des solutions approchées est actuellement complètement ouvert mais il semble clair que l'équation continue recherchée est (en prenant un cas simple) de la forme (inhabituelle) suivante :

$$\begin{aligned} h_t - \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad}(\varphi(h))) &= S, \\ h_t &\geq -E, \quad \lambda \leq 1, \\ (h_t + E)(1 - \lambda) &= 0, \end{aligned} \tag{20}$$

où  $\varphi$  est une fonction donnée croissante et  $S$  un terme source. La variable d'espace est dans un ouvert borné de  $\mathbf{R}^2$  et la variable de temps dans  $\mathbf{R}_+$ . A cette équation, il faut ajouter des conditions aux limites et des conditions initiales.

Il n'y a pas actuellement de résultat d'existence et d'unicité de solutions pour ce modèle. En fait, un tel résultat d'existence et d'unicité est lié à la recherche d'une "bonne" formulation du problème (20) qui est formulé pour l'instant de manière un peu imprécise. L'étude de ces modèles stratigraphiques, important pour l'exploration pétrolière, fait l'objet de la journée industrielle 2002 du Congrès d'Analyse NUMérique.

## Références

- [1] C. BARDOS, A. Y. LE ROUX, AND J.-C. NÉDÉLEC, *First order quasilinear equations with boundary conditions*, Comm. Partial Differential Equations (1979), no. 9, pp. 1017–1034.
- [2] F. BOUCHUT, F. JAMES, *One-dimensional transport equations with discontinuous coefficients*, Nonlinear Ana. **32** (1998), no. 7, pp. 891–933.
- [3] Y. BRENIER, J. JAFFRÉ, *Upstream differencing for multiphase flow in reservoir simulation*, SIAM J. Num. Ana. **28** (1991), pp. 685–696.
- [4] R. EYMARD, T. GALLOUËT, *H-convergence and numerical schemes for elliptic problems*, Soumis.
- [5] R. EYMARD, T. GALLOUËT, *Finite volume schemes and the viscous fingering problem*, En préparation.
- [6] R. EYMARD, T. GALLOUËT, J. VOVELLE, *Boundary conditions in the numerical approximation of some physical problems via finite volume schemes*, En préparation.
- [7] I. FAILLE, E. HEINTZÉ, *A rough finite volume scheme for modeling two phase flow in a pipeline*, Computers and Fluids, 28 (1999), pp. 213–241.

- [8] T. GALLOUËT, J. M. HÉRARD, N. SEGUIN, *Some approximate Godunov schemes to compute shallow water equations with topography*, Accepted for publication in Computers and Fluids.
- [9] D. GRANJEON, P. JOSEPH, *Concepts and applications of a 3D multiple lithology, diffusive model in stratigraphic modelling*, in J. W. Harbaugh. and al. (eds), Numerical Experiments in Stratigraphy, SEPM Sp Publ. 62, 1999.
- [10] J. M. GREENBERG, A. Y. LEROUX, *A well balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations*, SIAM J. Numer. Anal. **33** (1996), no. 1, pp. 1–16.
- [11] F. MURAT, *H-convergence*, Séminaire d'analyse fonctionnelle et numérique de l'Université d'Alger (1977–1978).
- [12] J. LÉVINE, P. ROUCHON, *Quality control of binary distillation columns based on nonlinear aggregated models*, Automatica **27** (1991), pp. 463–480.
- [13] F. OTTO, *Initial-boundary value problem for a scalar conservation law*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. (1996), no. 8, pp. 729–734.
- [14] S. SPAGNOLO, *Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche*, Ann. Scu. Norm. Pisa, Vol **22** (1968), pp. 571–597.
- [15] N. SVANSTEDT, *G-convergence of parabolic operators*, Nonlinear analysis, Vol **36** (1999), pp. 807–842.
- [16] L. TARTAR, *Cours Peccot*, collège de france (Paris, 1977).
- [17] J. D. TOWERS, *Convergence of a difference scheme for conservation laws with a discontinuous flux*, SIAM J. Numer. Anal. **38** (2000), no. 2, pp. 681–698.
- [18] S. PATAULT, Q.-H. TRAN, *Modèle et schéma numérique du code TACITE-NPW*, tech. report, rapport IFP 42415, 1996.
- [19] J. VOVELLE, *Convergence of finite volume monotone schemes for scalar conservation laws on bounded domains*, Num. Math. (2002), no. 3, pp. 563–596.
- [20] J. VOVELLE, N. SEGUIN, *Analysis and approximation of a scalar conservation law with a flux function with discontinuous coefficients*, Soumis.