MAITRISE EN INGENIERIE MATHEMATIQUE 1998 - 1999

CALCUL DIFFERENTIEL

ET

OPTIMISATION

CALCUL DIFFERENTIEL

...érivées

...ition

> ... = e.v.n $f : E \to F$
> ... Ω ouvert de E et $f : \Omega \to F$)
> ... E (ou Ω)
>
> ... est <u>différentiable</u> (ou <u>Dérivable</u>) si il existe <u>$T \in \mathcal{L}(E,F)$</u>
> <u>...lle que</u> :
> $$f(a+h) = f(a) + T(h) + \|h\| \, \varepsilon(h)$$
> où $\varepsilon(h) \to 0$ qd $h \to 0$
>
> ...ans ce cas, <u>T est unique</u> et <u>on pose $T = Df(a) \in \mathcal{L}(E,F)$</u>

<u>...stration de l'unicité de T :</u>

T_1 et T_2 tq $f(a+h) = f(a) + T_1(h) + \|h\| \, \varepsilon(h)$

$f(a+h) = f(a) + T_2(h) + \|h\| \, \varepsilon(h)$

($\varepsilon(h)$ signifie tend vers 0 qd $h \to 0$)

... donc $(T_1 - T_2)(h) = \|h\| \, \varepsilon(h)$

$y \in E$; $\|y\| = 1$ y fixé

$t \in \mathbb{R}$

$(T_1 - T_2)(ty) = \|ty\| \, \varepsilon(ty) = |t| \underbrace{\|y\|}_{=1} \varepsilon(t) = |t| \, \varepsilon(t)$

$\| \; t (T_1 - T_2)(y)$

$t \to 0$ $(T_1 - T_2)(y) = \varepsilon(t)$ et donc $(T_1 - T_2)(y) = 0$

$T_1(y) = T_2(y)$ $\forall y \in E$, $\|y\| = 1$

comme T_1 et T_2 sont linéaires

on a $T_1(y) = T_2(y)$ $\forall y \in E$ $\Rightarrow T_1 = T_2$

questions :

1) f dérivable en a pour $(E, \| \|_E) \to (F, \| \|_F)$

$\not\Rightarrow$ ———————— $(E, \| \|'_E) \to (F, \| \|'_F)$

(sauf si $\dim E < +\infty$ et $\dim F < +\infty$)

2) f dérivable en a, $f : (E, \| \|_E) \to (F, \| \|_F)$: T_1

————————, $f : (E, \| \|'_E) \to (F, \| \|'_F)$: T_2

$T_1 : E \to F$ lin. cont de $(E, \| \|_E) \to (F, \| \|_F)$

$T_2 : E \to F$ — ———— $(E, \| \|'_E) \to (F, \| \|'_F)$

a-t-on $T_1 = T_2$?

Réponse : Oui (avec toutes les normes usuelles ; mais il existe des contres exemples (assez abstrait))

démonstration :

① $f(a+h) = f(a) + T_1(h) + \|h\|_E \, \varepsilon(h)$ $\quad \varepsilon(h) \to 0$ dans $(F, \| \|_F)$ qd $h \to 0$ dans $(E, \| \|_E)$

② $f(a+h) = f(a) + T_2(h) + \|h\|'_E \, \varepsilon'(h)$ $\quad \varepsilon'(h) \to 0$ dans $(F, \| \|'_F)$ qd $h \to 0$ $(E, \| \|'_E)$

Soit $y \in E$, y fixé

$h = ty$ $\quad t \to 0$ $\quad t \in \mathbb{R}$

① - ② $\Leftrightarrow$ $(T_1 - T_2)(h) = \|h\|_E \, \varepsilon(h) + \|h\|'_E \, \varepsilon'(h)$

$\cancel{t}\,(T_1 - T_2)(y) = \cancel{t}\,\|y\|_E \, \varepsilon(ty) + \cancel{t}\,\|y\|'_E \, \varepsilon'(ty)$

$\qquad \downarrow$ qd $t \to 0$: 0 $\qquad \downarrow t \to 0$: 0

donc $T_1(y) = T_2(y)$ $\forall y \in E$ $\quad$ donc $T_1 = T_2$

⚠ vrai pour toutes les normes usuelles (mais pb. pour certains cas.

3) E e.v.n. sur $\mathbb{R}$

$\| \|_1$, $\| \|_2$ deux normes sur E

? n, N 2 normes sur E tq $n(x) \leq \|x\|_1, \|x\|_2 \leq N(x)$ $\forall x \in E$

Sol : NON

N existe toujours (ex : $N(x) = \|x\|_1 + \|x\|_2$

ou $N(x) = \sup(\|x\|_1, \|x\|_2)$)

sur $n(x) = \operatorname{Inf}\{\|y\|_1 + \|z\|_2 \ , \ \forall (y,z) \in E^2 \ , \ y+z = x\}$

($n(x) \leq \|x\|_1, \|x\|_2$ $y=0, z=x$ ou $y=x, z=0$)

n a :

* inég. triang.
* $n(\lambda x) = |\lambda| n(x)$) facile

mais $n(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ NON ! (mais est vrai pour les normes "usuelles")

(ex : $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx$ $\|f\|_2 = \sup\{|f(x)|, x \in \mathbb{R}\}$

alors n définie précédemment est bien une norme)

Ex :

$= C([0,1], \mathbb{R})$

$\in E$ $f(u) = \int_0^1 |u(t)|^2\,dt$ $f : E \to \mathbb{R}$

ormes sur E : $\|u\|_1 : \int_0^1 |u(t)|\,dt$ $\|u\|_\infty = \sup\{|u(x)|, x \in [0,1]\}$

(Rappel : $(E, \|\ \|_\infty)$ est complet

$(E, \|\ \|_1)$ est non complet)

f est-elle dérivable en u ?

$f(u+h) = f(u) + \underbrace{\text{"linéaire, } h\text{"}}_{\text{lin, cont. ?}} + \underbrace{\text{"Reste"}}_{\|h\|\,\varepsilon(h)}$?

$$f(u+h) = \int_0^1 |u(t)+h(t)|^2\,dt$$
$$= \underbrace{\int_0^1 u(t)^2\,dt}_{} + \underbrace{2\int_0^1 u(t)h(t)}_{} + \int_0^1 h^2(t)\,dt$$
$$= f(u) + \text{" lin}/h\text{ "} + \text{reste}$$

ici, le "candidat" pour être $Df(u)$ serait $T : h \longmapsto 2\int_0^1 u(t)\,h(t)\,dt$
$E \longrightarrow \mathbb{R}$ linéaire

est-elle continue ? c.à.d a-t-on $|T(h)| \leq k\|h\|$

- <u>On munit E de la norme $\| \|_\infty$</u>

$$\left|\int_0^1 u(t)\,h(t)\right| \leq \|u\|_\infty \|h\|_\infty \qquad k = \|u\|_\infty$$

donc T lin, cont. de $E \to \mathbb{R}$

il reste à montrer que $\int_0^1 h^2(t)\,dt = \|h\|_\infty\, \varepsilon(h)$
$\downarrow$ qd $\|h\|_\infty \to 0$
0

oui, car $\int_0^1 h^2(t)\,dt \leq \|h\|_\infty^2 = \|h\|_\infty \|h\|_\infty$
$\downarrow$ qd $h \to 0$
0

<u>Conclusion</u> : f est dérivable en u et $Df(u)h = 2\int_0^1 u(t)h(t)\,dt$

- <u>On munit E de la norme 1</u>

$$|T(h)| = \left|\int_0^1 u(t)\,h(t)\right| \leq \|u\|_\infty \int_0^1 |h(t)|\,dt \leq \underset{k=\|u\|_\infty}{k}\,\|h\|_1$$

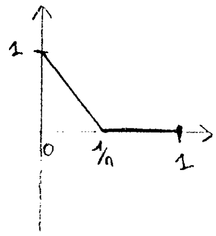
$\Rightarrow T$ lin, cont de $E \to \mathbb{R}$ pour $\| \|_1$

Il reste à montrer que $\int_0^1 h^2(t)\,dt = \|h\|_1\ \varepsilon(h)$
$\downarrow$ qd $\|h\|_1 \to 0$
0

• f soit dérivable en u pour la norme 1 il faut (et il suffit)

$$\frac{\int_0^1 h^2(t)\,dt}{\|h\|_1} \longrightarrow 0 \quad \text{qd } \|h\|_1 \longrightarrow 0$$

$$\frac{\int_0^1 h^2(t)\,dt}{\int_0^1 |h(t)|\,dt} \longrightarrow 0 \quad \text{qd } \int_0^1 |h(t)|\,dt \longrightarrow 0$$



$$h_n = (1-nx)^+$$

$$\|h_n\|_1 = \frac{1}{2n} \underset{\text{qd } n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\frac{\int_0^1 h_n^2}{\int_0^1 |h_n|} = \frac{1/3n}{1/2n} = \frac{2}{3} \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

donc f non dérivable en u pour la norme 1

ex (T.D.)

$E = L^p_{\mathbb{R}}(]0,1[)$ $\quad 1 \leq p < \infty \quad$ muni de la norme $\|\ \|_p$

$$f(u) = \int_0^1 |u(t)|^p\,dt$$

$p=1$ c'est non dérivable

$1<p<\infty$ f dérivable et $Df(u)\,(h) = \int_0^1 p\,|u(t)|^{p-2}\,u(t)\,h(t)\,dt$

Cas particuliers :

1) $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

$x \in \mathbb{R}^n$

f dérivable en x si $\exists\, Df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telle que

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)h + \|h\| \,\varepsilon(h) \qquad \underset{\|h\| \to 0}{\varepsilon(h) \to 0}$$

$\dim E < +\infty$

$T : E \to F$ linéaire $\Rightarrow T$ continue

$Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ linéaire représentée par une matrice $A \in \mathbb{R}^{p,n}$ (dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$)

En pratique on confond $\underset{\mathbb{R}^{p,n}}{\underset{\cap}{A}}$ et $\underset{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)}{\underset{\cap}{Df(x)}}$

$$\begin{aligned} h &\mapsto Ah \\ \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^p \end{aligned}$$

$n = p = 1$ $\quad f(x+h) = f(x) + Df(x)h + \|h\|\,\varepsilon(h)$

$\underline{\underline{A \in \mathbb{R}}} = \mathbb{R}$

$$\frac{f(x+h) - f(x) - Ah}{h} = \varepsilon(h) \to 0 \text{ qd } h \to 0$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \to A \text{ qd } h \to 0$$

$A = f'(x)$

On confond $\underset{\in \mathbb{R}}{f'(x)}$ et $Df(x)$ $\qquad \begin{aligned} h &\mapsto f'(x)h \\ \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \end{aligned}$

Dérivées partielles :

$: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$

$x \in \mathbb{R}^n$

dérivable en x

$f(x+h) = f(x) + Df(x)h + \|h\| \, \varepsilon(h) \qquad Df(x) \in \mathbb{R}^{p,n}$

$c = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \\ f_p(x) \end{bmatrix}$

alors f_j est dérivable en x par rapport à x_i et

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) = a_{ji} \qquad \begin{matrix} j \in \{1,\dots,p\} \\ i \in \{1,\dots,n\} \end{matrix}$$

$$\Big(Df(x)\Big)_{ij} = a_{ij}$$

a bien

$$f_j(x_1+h_1, \dots, x_n+h_n) = f_j(x_1,\dots,x_n) + \sum_{i=1}^{n} a_{ji} h_i + \|h\| \, \varepsilon(h)$$
$$\forall j \in \{1 \dots p\}$$

i_0 fixé $\quad h_i = 0 \quad i \neq i_0$

$$\frac{f_j(x_1, x_2, \dots, x_{i_0}+h_{i_0}, \dots, x_n) - f_j(x_1,\dots,x_n)}{h_{i_0}} = a_{ji_0} + \varepsilon(h_{i_0})$$

rappel : $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \qquad x \in \mathbb{R}^n$

- f_j dérivable en x / x_i $\forall i, j$ $\not\Longrightarrow$ f dérivable en x
- $\exists V$ voisinage de x

  $\left.\begin{matrix} f_j \text{ dériv. en } y / x_i \quad \forall y \in V \quad \forall i,j \\ \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(y) \text{ continue au pt } x \end{matrix}\right\} \Rightarrow f$ dérivable en x

3) $f : E\times F \to G$ $\qquad E, F, G$ e.v.n

$\to E\times F$ est aussi evn, par exemple $\|(x,y)\|_{E\times F} = \sup(\|x\|, \|y\|)$

$a, b \in E\times F$

f dérivable en (a,b)

$g_1 : E \to G$ $\qquad g_2 : F \to G$

$x \mapsto f(x,b)$ $\qquad y \mapsto f(a,y)$

Alors g_1 (et g_2) sont dérivables en a (et b)

et $\underbrace{Dg_1(a)}_{\mathcal{L}(E,G)} \underset{E}{h} = \underset{\mathcal{L}(E\times F,G)}{Df(a,b)} \underset{E\times F}{(h,0)}$

$\underset{\mathcal{L}(F,G)}{Dg_2(b)} \underset{F}{h} = \underset{\mathcal{L}(E\times F,G)}{Df(a,b)} \underset{E\times F}{(0,h)}$

Notation : $Dg_1(a) = D_x f(a,b) = D_1 f(a,b)$

$Dg_2(a) = D_y f(a,b) = D_2 f(a,b)$

démonstration

f dérivable en (a,b)

$f(a+h, b+k) = f(a,b) + Df(a,b)(h,k) + \|(h,k)\| \underbrace{\varepsilon(h,k)}_{\to 0}$

$(h,k) \to 0$ ds $E\times F$

$f(a+h, b) = f(a,b) + Df(a,b)(h,0) + \|h\|_E\, \varepsilon(h)$

car $\|(h,0)\|_{E\times F} = \|h\|_E$

$g_1(a+h) = g_1(a) +$ lin cont de $E\to G$ $+ \|h\| * \varepsilon(h)$

g_1 est donc dérivable en a $\qquad Dg_1(a)h = Df(a,b)(h,0)$

directionnelle :

evn $f : E \to F$ $a \in E$ $x \in E \setminus \{0\}$

$= f(a+tx)$ $t \in \mathbb{R}_+$

$\mathbb{R}_+ \longrightarrow F$

que f est dérivable en a dans la direction x de dérivée $f'_x(a)$
est dérivable (à droite) en 0 et $\varphi'(0) = f'_x(a)$

d $\dfrac{f(a+tx) - f(a)}{t} \longrightarrow f'_x(a)$ qd $t \to 0^+$

ion

> E, F evn $f : E \to F$, $a \in E$
> f dérivable en a
>
> Alors $\forall x \in E \setminus \{0\}$ f est dérivable en a dans la direction x
> et $\boxed{\underbrace{f'_x(a)}_{\in F} = \underbrace{\underbrace{Df(a)}_{\in \mathcal{L}(E,F)}\underbrace{(x)}_{\in E}}_{\in F}}$

ation :
dérivable en a

$f(a+h) = f(a) + Df(a)h + \|h\| \, \varepsilon(h)$

$x \in E \setminus \{0\}$ $t \in \mathbb{R}^+$

$(a+tx) = f(a) + Df(a)(tx) + t\|x\| \, \varepsilon(tx)$
$= f(a) + t\,Df(a)(x) + t\,\varepsilon(t)$

$\dfrac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = Df(a)(x) + \varepsilon(t)$ $\varphi(t) = f(a+tx)$

φ dérivable à droite en 0 et $\varphi'(0^+) = Df(a)(x)$

$) = \|x\|$ $a = 0$ $x \in E \setminus \{0\}$ $\varphi(t) = f(a+tx) = \|a+tx\| = \|tx\| = |t| \, \|x\|$

$t \in \mathbb{R}_+$ $\dfrac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \|x\| = f'_x(0)$ mais ⚠ $Df(0)$ n'existe pas !
(→ TD ex1 p3)

Définition **Gâteaux. Dérivée**

E, F evn $f : E \to F$ $a \in E$

f est G-dérivable en a si
1) f dérivable en a dans la direction x, $\forall x \in E \setminus \{0\}$
2) $\exists T \in \mathcal{L}(E,F)$ tq $f'_x(a) = T(x)$

T est notée $T = D_G f(a)$

N.B. : 1) f dérivable en a $\Rightarrow$ f G-dérivable en a et $D_G f(a) = Df(a)$
2) f G-dérivable en a $\not\Rightarrow$ f dérivable en a (cf T.D.)

Théorème

E, F e.v.n, $f : E \to F$, $a \in E$, on suppose $\exists \varepsilon > 0$ tq :

1) f est G dérivable $\forall y \in B(a, \varepsilon)$
2) $y \mapsto D_G f(y)$ est continue $B(a, \varepsilon) \to \mathcal{L}(E, F)$

Alors f est dérivable en a (et même en y $\forall y \in B(a, \varepsilon)$)
et $D_G f(a) = Df(a)$

Théorème (dérivation de fonctions composées)

E, F, G e.v.n
$f : E \to F$
$g : F \to G$
$a \in E$ f dérivable en a
g —— $f(a)$

Alors $g \circ f$ est dérivable en a et $\underbrace{D(g \circ f)(a)}_{\in \mathcal{L}(E,G)} = \underbrace{Dg(f(a))}_{\in \mathcal{L}(F,G)} \circ \underbrace{Df(a)}_{\in \mathcal{L}(E,F)}$

héorème des accroissements finis

$a, b \in \mathbb{R}$ $\quad a<b$
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue
f dérivable en x $\quad \forall x \in]a,b[$
Alors $\exists c \in]a,b[$, $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\left(\text{ou } f(b)-f(a) = f'(c)(b-a) \right)$

généralisation :

n $a, b \in E$, $a \neq b$ $\quad [a,b] = \{ a + t(b-a) , t \in [0,1] \}$
$]a,b[= \{ \text{———} , t \in]0,1[\}$

: $E \to \mathbb{R}$ continue en tout point de $[a,b]$
dérivable ——— $]a,b[$
alors $\exists c \in]a,b[$, $f(b) - f(a) = \underbrace{Df(c)}_{\in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})} \underbrace{(b-a)}_{\in E} \in \mathbb{R}$

stration :

$E \to \mathbb{R}$ cont $[a,b]$ dériv $]a,b[$
$t) = f(a + t(b-a))$ $\quad \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

continue en tout point de $[0,1]$
dériv. ——— $]0,1[$ $\quad \varphi'(t) = Df(a+t(b-a))(b-a)$

th. des acc. finis donne $\exists \bar{t} \in]0,1[$ tq
$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\bar{t})\ (1-0)$
$f(b) - f(a) = Df(\underbrace{a + \bar{t}\ (b-a)}_{c})(b-a)$

on pose $c = a + \bar{t}(b-a) \in]a,b[$

Exemple :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tq f cont sur $[a,b]$

f dériv. $]a,b[$; $f(b) - f(a) \neq Df(c)\,(b-a)$

$\forall c \in]a,b[$

$a = 0$

$b = 2\pi$ $\quad f(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

$$Df(c) = \begin{pmatrix} \cos c \\ -\sin c \end{pmatrix}$$

$$f(2\pi) - f(0) = \begin{pmatrix} \sin 2\pi - \sin 0 \\ \cos 2\pi - \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Df(c)\,(b-a) = \begin{pmatrix} \cos c \\ -\sin c \end{pmatrix} 2\pi = \begin{pmatrix} 2\pi \cos c \\ -2\pi \sin c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Théorème des Acc. Finis

E, F e.v.n $\quad a, b \in E \quad a \neq b$

$f : E \to F$ continue en tout point de $[a,b]$

dérivable ———— $]a,b[$

Alors $\|f(b) - f(a)\|_F \leq \left(\sup_{c \in]a,b[} \|Df(c)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \right) \|b-a\|_E$

Rappel $T \in \mathcal{L}(E,F) \quad \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\substack{x \in E \\ x - \{0\}}} \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}$

démonstration ($\to$ TD)

Théorème des fonctions implicites

…ion $f : E\times F \to G$ $\quad c \in G$

…on : $f(x,y) = c$ définit-elle implicitement y en fonction de x ?

…ion idéale : $\forall x \in E \quad \exists!\, y \in F,\ f(x,y) = c$

dans ce cas y est entièrement déterminé par x.

exemple : $E = F = G = \mathbb{R}$

1) $f(x,y) = x - y \qquad c = 0$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists!\, y \in \mathbb{R} \ /\ f(x,y) = 0$

2) $f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad c = 1$

$x \in \mathbb{R}$ — 1er cas : $|x| > 1$ pas de y

2e cas : $|x| < 1$ 2 sol.

3e cas : $|x| = 1$ 1 sol.

…ème (Fonctions implicites)

…, G e.v.n. $\quad F, G$ complets

…$E\times F \xrightarrow[\text{continue}]{} G$, $c \in G$. $(a,b) \in E\times F \quad f(a,b) = c$

…: 1) • $y \mapsto f(x,y)$, $F \to G$ dérivable $\forall x, \forall y$

• $(x,y) \longmapsto D_y f(x,y)$, $E\times F \to \mathcal{L}(F,G)$ continue

2) $D_y f(a,b)$ bijective, continue, d'inverse continue $\left(D_y f(a,b) \in \mathrm{Isom}_{(F,G)}\right)$

…ors $\exists \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in B(a,\varepsilon),\ \exists!\, y \in B(b,\delta)$ tq $f(x,y) = c$

(ce y est noté $y = \phi(x)$)

$$\phi : B_E(a,\varepsilon) \longrightarrow B_F(b,\delta)$$
$$x \longmapsto \phi(x) \qquad\qquad f(x,\phi(x)) = c$$

• Si de plus f est différentiable
alors ϕ est dérivable en a

$$\underbrace{D\phi(a)}_{\in \mathcal{L}(E,F)} = -\underbrace{\left(D_y f(a,b)\right)^{-1}}_{\in \mathcal{L}(G,F)} \circ \underbrace{\left(D_x f(a,b)\right)}_{\in \mathcal{L}(E,G)}$$

Remarque : comment retrouver $D\phi(a)$:

$$\varphi(x) = f(x,\phi(x)) = c \qquad \forall x \in B(a,\varepsilon)$$

Si ϕ est dérivable, alors φ est dérivable et

$$D\varphi(a) = D_x f(a,b) + D_y f(a,b) \circ D\phi(a) = 0$$

$$\Rightarrow D\phi(a) = -\left(D_y f(a,b)\right)^{-1} \circ D_x f(a,b)$$

démonstration du th :

Rappel : th. du point fixe.

| X esp. mét. complet
| $g : X \to X$ strict. contractante c.à.d $\exists k < 1$ tq
| $d(g(x), g(y)) \leq k\, d(x,y) \quad \forall x,y \in X$
| alors $\exists ! x \in X$ tq $g(x) = x$

On a : $f : E \times F \to G$ continue, dérivable$/y \in F$, $y \to D_y f(x,y)$ continue
$D_y f(a,b)$ biject., d'inverse continue.

on pose $\forall x, \forall y$ $h(x,y) = -\underbrace{\left(D_y f(a,b)\right)^{-1}}_{\in \mathcal{L}(G,F)} \big(\underbrace{f(x,y) - c}_{\in G}\big) + \underbrace{y}_{\in F}$

$h : E \times F \to F$

$f(x,y) = c \Leftrightarrow h(x,y) = y$

$\cdot \in E$, $\underline{\underline{x \text{ fixé}}}$

$) = c \Leftrightarrow h(x,y) = y \Leftrightarrow g(y) = y$ avec $g(y) = h(x,y)$

$\underline{y) = c \Leftrightarrow y \text{ point fixe de } g}$

va montrer $\exists \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tq $\underline{\text{si}}$ $x \in B(a,\varepsilon)$ alors $g : \bar{B}(b,\eta) \to \bar{B}(b,\eta)$
et g est strictement contractante, et même $\|g(y_1) - g(y_2)\|_F \leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|_F$

: th. du point fixe donnera $\forall x \in B(a,\varepsilon)$ $\exists!\, y \in \bar{B}(b,\eta)$ tq $g(y) = y$
c.à.d tq $f(x,y) = c$

va donc chercher $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$.

$) = -\left(D_y f(a,b)\right)^{-1} \left(f(x,y) - c\right) + y$

mme f dérivable/y g est dérivable/y

$) \Rightarrow \underbrace{D_y h(x,y)}_{\in \mathcal{L}(F,F)} = -\underbrace{\left(D_y f(a,b)\right)^{-1} \left(D_y f(x,y)\right)}_{\in \mathcal{L}(F,F)} + Id$

$y) \mapsto D_y h(x,y)$ $\underline{\text{continue}}$
$\times F \to \mathcal{L}(F,F)$
$D_y h(a,b) = 0$

cont. de $D_y f(x,y)$
proche de (a,b)

xiste donc $\varepsilon_1 > 0$, $\eta_1 > 0$
$x \in B(a,\varepsilon_1)$
$y \in \bar{B}(b,\eta_1)$. $\Rightarrow \|D_y h(x,y)\|_{\mathcal{L}(F,F)} \leq \frac{1}{2}$

$x \in B(a,\varepsilon_1)$
$g(y) = h(x,y)$ $y \in \bar{B}(b,\eta_1)$

$y_1, y_2 \in \overline{B}(b, \eta_1)$

$\| g(y_1) - g(y_2) \|_F = \| h(x, y_1) - h(x, y_2) \|_F$

$$\leq \sup_{c \in]y_1, y_2[} \underbrace{\| D_y h(x, c) \|_{\mathcal{L}(F,F)}}_{\leq 1/2} \| y_1 - y_2 \|_F$$

(th. des A.F) $\quad]y_1, y_2[\subset \overline{B}(b, \eta_1)$

on a donc $\| g(y_1) - g(y_2) \|_F \leq \frac{1}{2} \| y_1 - y_2 \|_F \quad \forall y_1, y_2 \in \overline{B}(b, \eta_1)$
$\forall x \in B(a, \varepsilon_1)$

g contractante $k = 1/2$ (donc strict. contractante)
$\overline{B}(b, \eta_1)$ e.m. complet

reste à voir : $g : \overline{B}(b, \eta_1) \to \overline{B}(b, \eta_1)$?

a-t-on $g(y) \in \overline{B}(b, \eta_1) \quad \forall y \in \overline{B}(b, \eta_1)$?

$g(y) = h(x, y) = -\left(D_y f(a,b) \right)^{-1} \left(f(x,y) - c \right) + y$

$g(b) = -\left(D_y f(a,b) \right)^{-1} \left(f(x,b) - c \right) + b$

$\exists \varepsilon_2 > 0$ tq $x \in B(a, \varepsilon_2) \quad g(b) \in B(b, \frac{\eta_1}{2})$

$x \in B(a, \varepsilon) \quad \varepsilon = \inf(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$
$\to \| g(y_1) - g(y_2) \|_F \leq \frac{1}{2} \| y_1 - y_2 \|_F \quad \forall y_1, y_2 \in \overline{B}(b, \eta_1)$
$\to g(b) \in B(b, \frac{\eta_1}{2})$

$\| g(y_1) - g(b) \| \leq \frac{1}{2} \| y_1 - b \| \leq \frac{\eta_1}{2} \quad y_1 \in \overline{B}(b, \eta_1)$

$\| g(y_1) - b \| \leq \underbrace{\| g(y_1) - g(b) \|}_{\eta_1/2} + \underbrace{\| g(b) - b \|}_{\eta_1/2} < \eta_1$

$(g(y) \in B(b, \eta_1)$
boule ouverte.

$g(y) \subset \overline{B}(b, \eta_1) \quad \forall y \in \overline{B}(b, \eta_1)$

né : $\begin{cases} \varepsilon = \inf(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ \eta = \eta_1 \end{cases}$

$\forall x \in B(a, \varepsilon) \quad g : \overline{B}(b, \eta) \to B(b, \eta) \subset \overline{B}(b, \eta)$

$\|g(y_1) - g(y_2)\| \leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\| \quad \forall y_1, y_2 \in \overline{B}(b, \eta_1)$

th. du pt. fixe on obtient

$\in B(a, \varepsilon) \quad \exists ! \, y \in \overline{B}(b, \eta), \quad g(y) = y$

a même $\forall x \in B(a, \varepsilon)$

$\exists ! \, y \in B(b, \eta), \quad g(y) = y$

d $\forall x \in B(a, \varepsilon) \quad \exists ! \, y \in B(b, \eta) \quad tq \quad f(x, y) = c$

y est noté $y = \phi(x)$

$f(x, \phi(x)) = c \quad \forall x \in B(a, \varepsilon)$

$h(x, \phi(x)) = \phi(x) \quad \forall x \in B(a, \varepsilon)$

<u>s maintenant la continuité de ϕ</u>

$\in B(a, \varepsilon)$

$= h(x_1, \phi(x_1))$

$) = h(x_2, \phi(x_2))$

$\|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| = \| h(x_1, \phi(x_1)) - h(x_2, \phi(x_2))\|$

$\leq \underbrace{\| h(x_1, \phi(x_1)) - h(x_1, \phi(x_2))\|}_{\leq \frac{1}{2} \|\phi(x_1) - \phi(x_2)\|} + \| h(x_1, \phi(x_2)) - h(x_2, \phi(x_2))\|$

$- \phi(x_2)\|_F \leq 2 \| h(x_1, \phi(x_2)) - h(x_2, \phi(x_2))\|_F$

fixé

$\forall\, \delta>0,\ \exists\, \alpha>0,\ \|x_1-x_2\| \leq \alpha \Rightarrow \|h(x_1, \varphi(x_2)) - h(x_2, \varphi(x_2))\| \leq \delta$

(continuité de h, 1^re variable)

$\|x_1-x_2\| \leq \alpha \Rightarrow \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| \leq 2\delta$

Ceci montre la continuité de φ en tout point de $B(a, \varepsilon)$

<u>dérivabilité de φ</u> :

- diff. , on pose $T = -\left(D_y f(a,b)\right)^{-1} \circ D_x f(a,b) \in \mathcal{L}(E,F)$

on montre $\varphi(a+h) = \varphi(a) + T(h) + h\,\varepsilon(h)$ (admis)

<u>N.B.</u>

| $f \in C^k$ $k \geq 1$
| et si φ existe
<u>Alors</u> φ est C^k

(admis)

<u>Définition</u> $f : E \to F$

1) $f \in C^1(E,F)$ si f <u>dérivable $\forall x \in E$</u>
et | $x \to Df(x)$
| $E \to \mathcal{L}(E,F)$ est <u>continue</u>

2) Par récurrence on définit $f \in C^k$

$\left(D^2 f(x) = D(x \to Df(x))(x) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E,F))\right)$

3) $f : E \to F$ $f \in C^2$
$x \in E$ $D^2 f(x) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E,F))$
$y \in E$ $D^2 f(x, y) \in \mathcal{L}(E,F)$
$z \in E$ $(D^2 f(x, y))(z) \in F$

$(y, z) \longmapsto ((D^2 f(x))(y))(z)$
$E \times E \longrightarrow F$

est bilinéaire continue de $E \times E \to F$

général on confond T et $D^2 f(x)$

$D^2 f(x)$ est une applic. bilinéaire continue de $E \times E \to F$

2• $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$
$D^2 f(x)$ = appl. bil. cont. de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$
cette application est représentée dans la base canonique de $\mathbb{R}^N$ par le HESSIEN de f qui est une matrice $\mathbb{R}^{N,N}$
$H(x) \in \mathbb{R}^{N,N}$.

On peut montrer $(H(x))_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ i,j de 1 à N

• $Df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{1,N} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_N}(x)\right)$

$$\operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x) = \left(Df(x)\right)^t = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

$x \in \mathbb{R}^N$
$y \in \mathbb{R}^N$
$Df(x)(y) = (\operatorname{grad} f(x) / y)_{\mathbb{R}^N} = \operatorname{grad} f(x) \cdot y$

$x \cdot y = (x/y)_{\mathbb{R}^N} = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$

Définition

E Hilbert

$f : E \to \mathbb{R}$ C^1

$x \in E$ $Df(x) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E'$

on note $\operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x)$ le vecteur de E tq

$Df(x)(y) = (\nabla f(x) \mid y)$ $\operatorname{grad} f(x) \in E$

$\nabla f(x)$ existe d'après le th. de Riesz.

OPTIMISATION SANS CONTRAINTES

...ltats d'existence, d'unicité et condition nécessaire d'optimalité

...finitions

e.v.n . $f : E \to \mathbb{R}$

... est un minimum global (strict) pour f si

$$f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in E$$
$$(<) \qquad\qquad (x \neq a)$$

a est un minimum local (strict) pour f si

$$\exists \varepsilon > 0 \; ; \forall x \in B(a, \varepsilon) \Rightarrow f(a) \leq f(x)$$
$$(x \neq a) \qquad\qquad (<)$$

a point critique de f si f est dérivable en a et $Df(a) = 0$

...ndition nécessaire d'optimalité

...e

e.v.n . $f : E \to \mathbb{R}$

E f différentiable en a

$\varepsilon > 0 \; ; \; f(a) \leq f(x) \; , \; \forall x \in B(a, \varepsilon) \Rightarrow Df(a) = 0$

...ation :

... min a

$\leq f(x) \qquad \forall x \in B(a, \varepsilon)$

Soit $h \in E \setminus \{0\}$ $\quad t \in [0,1]$

$$f\left(a + t\varepsilon \frac{h}{\|h\|}\right) \geq f(a)$$

$$\frac{f\left(a + t\varepsilon \frac{h}{\|h\|}\right) - f(a)}{t} \geq 0 \qquad \forall t \in]0,1]$$

$$t \to 0 \qquad Df(a)\left(\frac{\varepsilon h}{\|h\|}\right) = f'_{\frac{\varepsilon h}{\|h\|}}(a) \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad Df(a)(h) \geq 0 \qquad \underline{\forall h} \in E \setminus \{0\}$$

de même $\quad -Df(a)(h) \geq 0 \qquad \forall h \in E \setminus \{0\}$

$$\Rightarrow \quad Df(a)(h) = 0 \qquad \forall h \in E \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow \quad Df(a) = 0$$

<u>Remarques</u> :

1) $Df(a) = 0 \quad \not\Rightarrow \quad \exists \varepsilon > 0 \quad f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in B(a, \varepsilon)$

2) $f \in C^2 \quad Df(a) = 0 \qquad D^2f(a)(h,h) > 0 \quad \forall h \in E \setminus \{0\}$

$$\Rightarrow \quad \exists \varepsilon > 0 \quad f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in B(a, \varepsilon)$$

$Df(a) = \quad \Leftarrow$

$D^2 f(a)(h,h) \geq 0 \quad \forall h \in E \setminus \{0\}$ [illegible]

3) $E = \mathbb{R}$, $\quad a = 0 \qquad f(x) = x^3$

<u>exemple</u> : $E = \mathbb{R}^N$, $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x) = \frac{1}{2} Ax \cdot x - b \cdot x$
scalaire

$A \in M^{N,N}$, $\quad b \in \mathbb{R}^N$

A symétrique

f dérivable ? $Df(x)$?

$$f(x+h) = \frac{1}{2}(Ax + Ah \,|\, x+h) - (b \,|\, x+h)$$
$$= \frac{1}{2}(Ax|x) - (b|x) + \underbrace{\frac{1}{2}(Ax|h) + \frac{1}{2}(Ah|x)}_{\text{égaux car } A \text{ symétrique}} - (b|h) + \frac{1}{2}(Ah|h)$$
$$= f(x) + (Ax|h) - (b|h) + \frac{1}{2}(Ah|h)$$

$\Rightarrow |(Ah|h)| \leq \|Ah\|_2 \|h\|_2$

$\| \|_2$ = norme euclidienne

$\| \|_2$ = norme induite sur $\mathbb{R}^{N,N}$ par $\| \|_2$ sur $\mathbb{R}^N$

$$\leq \underbrace{\|A\|_2 \|h\|_2^2}$$
$$\| \|h\| \, \varepsilon(h)$$

ce ne sont pas forcément les mêmes

$$(Ah|h) = \|h\| \, \varepsilon(h)$$

f dérivable en x et $Df(x)(h) = (Ax - b \,|\, h)$

$$\text{grad} f(x) = Ax - b \in \mathbb{R}^N$$

$f'(x) = (Ax-b)^t \in \mathbb{R}^{1,N}$

grad $f(x) = Ax - b$

peut-on minimiser f sur $\mathbb{R}^N$? $(f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R})$

symétrique

les v.p. de A sont donc toutes réelles.

$\inf_{x \in \mathbb{R}^N} f(x)$?

1er cas : $\exists \lambda$ v.p. de A, $\underline{\lambda < 0}$

$\exists e \neq 0 \quad Ae = \lambda e$

$x = \alpha e \quad f(\alpha e) \to -\infty$ qd $\alpha \to \infty$ car :

$$f(\alpha e) = \alpha^2 \frac{1}{2} \lambda (e|e) - \alpha (b|e)$$

polynôme en α $\to$ le terme de plus haut degré l'emporte

$\Rightarrow \inf f(x) = -\infty$

2ème cas : toutes les v.p. de A sont ≥ 0

① 0 est v.p. de A

$b \in \mathrm{Im}\, A$ / $b \notin \mathrm{Im}\, A$ cf. T.D.

② A sdp A est donc inversible (car 0 non v.p.) (rappel : A inversible $\Leftrightarrow$ 0 non v.p.)

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax\,|\,x) - (b|x)$$

$\exists\, \alpha > 0$ (α plus petite valeur propre de A) tq

$(Ax|x) \geq \alpha \|x\|_2^2$ (coercivité)

$$\left(\alpha = \inf\{(Ax/x),\ \|x\| = 1\}\right)$$

$$f(x) \geq \frac{\alpha}{2}\|x\|_2^2 - \|b\|_2\|x\|_2 \geq \frac{\alpha}{2}\left(\|x\|^2 - \frac{\|b\|^2}{\alpha}\|x\|\right)$$

$$\geq \frac{\alpha}{2}\left(\|x\| - \frac{\|b\|}{\alpha}\right)^2 - \frac{\alpha}{2}\frac{\|b\|^2}{\alpha^2}$$

$$\geq -\frac{\alpha}{2}\frac{\|b\|^2}{\alpha^2}$$

$\Rightarrow \inf_{x \in \mathbb{R}^N} f(x) > -\infty$

de plus $f(x) \to \infty$ qd $\|x\| \to \infty$

$\exists R > 0 \quad \|x\| > R \Rightarrow f(x) > \inf_{y \in \mathbb{R}^N} f(y)$

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^N} f(x) = \inf_{x \in \bar{B}(0,R)} f(x)$$

il existe donc $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ tq $f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$

(on a même $\bar{x} \in \bar{B}(0,R)$)

$\bar{x}$ est unique, car si $f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$ on a

nécessairement $\underline{\nabla f(\bar{x}) = 0}$ c.a.d $A\bar{x} = b$ c.a.d $\bar{x} = A^{-1}b$

A sdp $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ $b \in \mathbb{R}^N$ $f(x) = \frac{1}{2}(Ax|x) - (b|x)$

Chercher $\bar{x}$ tq $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ $f(\bar{x}) \leq f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^N$ $\iff$ résoudre $A\bar{x} = b$

Résultats d'existence et d'unicité en dimension finie

...me (existence)

H.N. $\dim E < \infty$ $(E = \mathbb{R}^N)$. f tel que :
$f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continue
) $f(x) \to +\infty$ qd $\|x\| \to +\infty$
Alors $\exists \bar{x} \in \mathbb{R}^N$, $f(\bar{x}) \leq f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^N$

: On peut remplacer 2) par l'hypothèse plus faible :

2 bis) $\exists a \in \mathbb{R}^N$, $\exists R > 0$; $\|x\| > R \Rightarrow f(x) > f(a)$

...nstration :

$\inf_{\in E} f(x)$ $\dim E < +\infty$

$(x_n)_n \subset E$, $f(x_n) \to \alpha$ qd $n \to +\infty$

$(x_n)_n$ est borné car $(f(x_n))_n$ est bornée supérieurement et $f(x) \to +\infty$ qd $\|x\| \to +\infty$

$(\exists R > 0$ $\|x\| > R \Rightarrow f(x) > \beta)$

$\dim E < \infty$, $(x_n)_n$ borné

il existe une sous suite, encore notée $(x_n)_n$ tq $x_n \to \bar{x}$ dans E qd $n \to +\infty$

$f(x_n) \to f(\bar{x})$ car f est continue

on a donc $\alpha = f(\bar{x}) = \inf_{y \in \mathbb{R}^N} f(y)$

Théorème (unicité)

E e.v. (E de dimension finie ou infinie) $f : E \to \mathbb{R}$ strictement convexe. Alors il existe au plus un $\bar{x} \in E$ tq $f(\bar{x}) \leq f(x)$ $\forall x \in E$

démonstration :

$f(\bar{x}_1) \leq f(x)$ $\forall x \in E$

$f(\bar{x}_2) \leq f(x)$ $\forall x \in E$

$\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$

$$f\left(\frac{1}{2}\bar{x}_1 + \frac{1}{2}\bar{x}_2\right) < \frac{1}{2} f(\bar{x}_1) + \frac{1}{2} f(\bar{x}_2) = \inf_{y \in E} f(y)$$

impossible, on a donc $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$

N.B. :

$E = \mathbb{R}^N$

$A \in \mathbb{R}^{N,N}$, $b \in \mathbb{R}^N$

$f(x) = \frac{1}{2}(Ax/x) - (b/x)$

A sdp $\Rightarrow f$ strictement convexe (à faire)

4) Résultat d'existence et d'unicité en dimension infinie.

Le th. d'unicité a été déjà vu.

existence : borné $\not\Rightarrow$ relativement compact en dim infinie.

ition :

tion $(x_n)_n \subset E$

$\to x$ faiblement dans E si $T(x_n) \to T(x)$ $\forall T \in E'$

1) $x_n \to x$ dans $E \Rightarrow x_n \to x$ faiblement dans E — (trivial)

2) (Banach Steinhaus) $x_n \to x$ faiblement dans E alors $(x_n)_n$ est bornée (difficile) *

ion

Hilbert
$(x_n)_n \subset E$, $x \in E$
$x_n \to x$ faiblement dans $E \Leftrightarrow (y|x_n) \to (y|x)$ $\forall y \in E$

nation
$x \to (y|x)$ est continue $\forall y \in E$
Riesz $T \in E'$, $\exists ! y \in E$, $T(x) = (y|x)$ $\forall x \in E$

1) dim $E < +\infty$:
$x_n \to x$ faiblement dans $E \Leftrightarrow x_n \to x$ dans E

2) E Hilbert, dim $E = \infty$
alors $\exists (x_n)_n$ tq $\left| \begin{array}{l} \|x_n\| = 1 \\ x_n \to 0 \text{ faiblement dans } E \end{array} \right.$ *

3) E Hilbert
$x_n \to x$ dans $E \Leftrightarrow \begin{cases} x_n \to x \text{ faiblement dans } E \\ \|x_n\| \to \|x\| \end{cases}$ *

4) E Banach
$x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans E
alors $\|x\| \leq \liminf\limits_{n \to +\infty} \|x_n\|$

Théorème

E Hilbert
$(x_n)_n$ suite bornée de E

Alors il existe une sous suite $(x_{n_k})_k$ et il existe $x \in E$ tq
$x_{n_k} \rightharpoonup x$ faiblement dans E.

démonstration :
On suppose E séparable, c.à.d $\exists A \subset E$ A dénombrable et $\bar{A} = E$
$A = (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ borné dans E $\qquad \|x_n\| \leq M \ \forall n$
On veut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_k$ et $x \in E$ tq $(y|x_{n_k}) \to (y|x)$
$\forall y \in E$

étape 1 : $|(x_n|y_1)| \leq \|x_n\|\|y_1\| \leq M\|y_1\|$
1ère extraction : $(x_{\varphi_1(n)}|y_1) \to \ell_1$ dans $\mathbb{R}$ (φ_1 inj de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$)
$|(x_{\varphi_1(n)}|y_2)| \leq M\|y_2\|$
2ème ext. : $(x_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}|y_2) \to \ell_2$
Par récurrence on construit une suite d'injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ tq
$(x_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_i(n)}|y_i) \to \ell_i \qquad n \to +\infty$

$x_1 \quad x_2 \ \dots \ x_n \ \dots$
$x_{\varphi_1(1)} \quad x_{\varphi_1(2)} \ \dots$
$x_{\varphi_1 \circ \varphi_2(1)} \ \dots$

diagonale $\left(x_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \varphi_n(n)}\right)_n$

$\left(x_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \dots \circ \varphi_n(n)} \mid y_i\right) \to l_i \quad n \to +\infty \quad \underline{\forall i}$

t: on a construit une sous suite $(x_{n_k})_k$ $\quad n_k = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k(k)$

tq $(x_{n_k} \mid y_i) \to l_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$
$k \to +\infty$

<u>ape</u>

$\in E$

veut montrer que $(x_{n_k} \mid y)$ converge dans $\mathbb{R}$.

va utiliser la densité de A dans E

sons $x_{n_k} = z_k$

on va montrer que $(z_k \mid y)$ est de Cauchy

$$(z_k \mid y) - (z_{k'} \mid y) = (z_k \mid y) - (z_k \mid y_i) + (z_k \mid y_i) - (z_{k'} \mid y_i) + (z_{k'} \mid y_i) - (z_{k'} \mid y)$$

$$|(z_k \mid y) - (z_{k'} \mid y)| \leq 2M \|y - y_i\| + |(z_k - z_{k'} \mid y_i)|$$

soit $\varepsilon > 0$ $\exists i \in \mathbb{N}$ tq $\|y - y_i\| \leq \varepsilon$ $\quad (\text{car } \bar{A} = E)$

existe n_0, $k, k' \geq n_0 \Rightarrow |(z_k - z_{k'} \mid y_i)| \leq \varepsilon$

a donc $k, k' \geq n_0 \Rightarrow |(z_k \mid y) - (z_{k'} \mid y)| \leq (2M+1)\,\varepsilon$

$(z_k \mid y)_k$ est donc de Cauchy dans $\mathbb{R}$

$(z_k \mid y) \to f(y) \quad \forall y \in E$

Etape 3

- f est linéaire comme limite d'application linéaire
- f est continue car $|(z_k|y)| \leq M\|y\|$

$$|f(y)| \leq M\|y\|$$

d'après Riesz il existe $x \in E$ tq $f(y) = (x|y) \quad \forall y \in E$

$(z_k|y) \to (x|y) \quad \forall y \in E$

$z_k \to x$ faiblement.

E un espace de Banach *

définir $J : E \longrightarrow E''$

$x \longmapsto J_x$ où $x \in E$, $J_x(T) = T(x)$ $\forall T \in E'$

$E' \to \mathbb{R}$ est linéaire

$(T) | \leq \|T\|_{E'} \|x\|_E \Rightarrow J_x$ continue

$\Rightarrow J_x \in E''$

$$\Rightarrow \|J_x\|_{E''} = \sup_{\substack{T \in E' \\ T \neq 0}} \frac{|J_x(T)|}{\|T\|_{E'}} = \sup_{\substack{T \in E' \\ T \neq 0}} \frac{|T(x)| \leq \|T\| \|x\|}{\|T\|_{E'}}$$

$\Rightarrow \|J_x\|_{E''} \leq \|x\|$

montrer (cf analyse fonctionnelle) que $\exists T \in E' / \|T\|_{E'} = 1$ et $T(x) = \|x\|$ | à faire

$\Rightarrow \|J_x\|_{E''} \geq \|x\|$

donc $\|J_x\|_{E''} = \|x\|_E$

$J : E \longrightarrow E''$

$x \longmapsto J_x$ est linéaire , car T linéaire et conserve la norme.

J est une isométrie de E dans $J(E) \subset E''$

isométrie = linéaire
- conserve la norme
- bijective

ition

> espace de Banach **réflexif** si $J(E) = E''$

(cq. : isométrie entre E et E'')

> espace de Hilbert est toujours un Banach réflexif

(cf. licence)

2) $\boxed{L^p_{\mathbb{R}}(X,T,m) \quad m \text{ finie et } 1<p<\infty \quad \text{est un Banach réflexif}}$
(cf. licence)

3) $\boxed{L^1_{\mathbb{R}}(X,T,m) \text{ et } L^\infty_{\mathbb{R}}(X,T,m) \quad \text{sont non réflexifs}}$

Définition

Soit E un espace de Banach réel
alors $E' = \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ est encore un espace de Banach.
Soient $(T_n)_n \subset E'$ et $T \in E'$

On dit que $T_n \longrightarrow T$ dans E' faible $*$ si $T_n(x) \to T(x)$ $\forall x \in E$

N.B. : Définitions //

1) Soit E un espace de Banach. $E' = \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$
Soient $(T_n)_n \subset E'$ et $T \in E'$
① $T_n \to T$ dans E' si $\|T_n - T\|_{E'} \longrightarrow 0$ qd $n \to +\infty$
② $T_n \to T$ dans E'. faible si $u(T_n) \longrightarrow u(T)$ qd $n \to +\infty$ $\forall u \in E''$
③ $T_n \to T$ dans E'. faible $*$ si $T_n(x) \longrightarrow T(x)$ qd $n \to +\infty$ $\forall x \in E$

2) Comparaison :

$T_n \to T$ dans E' $\overset{(\text{déjà vu})}{\Longrightarrow}$ $T_n \to T$ dans E' faible
$\Downarrow$ en prenant $u = Jx$
$T_n \to T$ dans E' faible $*$

donc $\boxed{T_n \to T \text{ dans } E'\text{-faible} * \iff u(T_n) \to u(T) \quad \forall u \in J(E) \subset E''}$

3) $\boxed{\text{Si } E \text{ est réflexif, cv faible sur } E' = \text{cv faible} * \text{ sur } E'}$

(car $J(E) = E''$)

$\boxed{\text{E réflexif} \iff E' \text{ réflexif}}$

E non réflexif

$\exists (T_n)_n \subset E' \; / \; T_n \to T$ dans E'-faible$*$ et $T_n \not\to T$ dans E'-faible

analyse fonctionnelle, topo E-faible $= \sigma(E, E')$

topo E'-faible $= \sigma(E', E'')$

topo E'-faible$*$ $= \sigma(E', J(E))$

(parfois noté juste $\sigma(E', E)$)

analyse fonctionnelle, on définira la topologie faible

esp. de Banach, $\dim E = \infty$

① topo. faible $\neq$ topo "forte"

$\exists O \subset E$ ouvert "fort" / O non ouvert "faible"

② $E = \ell^1$ (suite abs. cv, muni de $\|.\|_1$)

Alors $(x_n)_n \subset \ell^1$, $x \in \ell^1$

$x_n \to x$ dans $\ell^1 \iff x_n \to x$ dans ℓ^1 faible

(et pourtant les ouverts ne sont pas les m̂ !)

E Banach (réflexif)

$(x_n) \subset E$. $x \in E$

m̂ si E non réflexif

$x_n \to x$ ds E-faible $\iff J_{x_n} \to J_x$ dans E'-faible$*$

$\Updownarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$

$T(x_n) \to T(x) \; \forall T \in E'$ $\qquad J_{x_n}(T) \to J_x(T) \quad \forall T \in E$

$\Updownarrow$

$T(x_n) \to T(x)$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Soit } E \text{ un Banach} \\ \text{Soient } (T_n)_n \subset E' \text{ et } T \in E' \\ \text{Alors } T_n \to T \text{ dans } E'\text{-faible}* \Rightarrow T_n \text{ borné}\end{array}}$$

$*$!!

(admis)

Théorème

> Soient E un esp. de Banach séparable
> $(T_n)_n \subset E'$ / $(T_n)_n$ borné
>
> Alors $\exists (T_{n_k})_k$ sous-suite de T_n et $T \in E'$ / $T_{n_k} \to T$ dans E' faible *

(généralisation du th. précédent)

Rappel : Soit $(T_n)_n$ une suite de E'
On appelle sous-suite une famille $(T_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ avec
$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective et, en particulier $\varphi(n) \to \infty$ qd $n \to \infty$

Démonstration du théorème

* $(T_n)_n$ bornée $\Rightarrow \exists M \;/\; \|T_n\|_{E'} \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$
* E séparable si $\exists A \subset E$; $\overline{A} = E$ et $A = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Etape 1 :

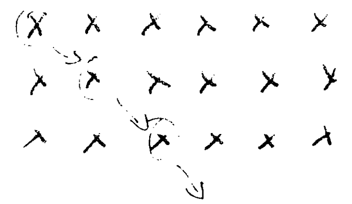
① $\exists \varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ inj tq : $T_{\varphi_1(n)}(y_0) \to f_0$ qd $n \to \infty$ dans $\mathbb{R}$
en effet on a $|T_n(y_0)|$ borné dans $\mathbb{R}$
donc (Bolzano-Weierstrass) : on peut extraire 1 ss-suite cv.

② $|T_{\varphi_1(n)}(y_1)| \leq M \|y_1\|$
$\Rightarrow \exists \varphi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ inj / $T_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}(y_1) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_1$ dans $\mathbb{R}$

$\Rightarrow T_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}(y_0) \longrightarrow f_0$ qd $n \to \infty$ dans $\mathbb{R}$

③ Par récurrence on montre que :
$\exists (\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}^*} / T_{\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_{k+1}}(y_k) \to f_k$ qd $n \to \infty$ dans $\mathbb{R}$

:



$\psi(n) = \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n(n)$

$(y_k) \longrightarrow f_k$ qd $n \to \infty$ $\quad \forall k \in \mathbb{N}$

effet $(T_{\psi(n)}(y_k))_n$ est extraite de $(T_{\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_{k+1}(n)}(y_k))_n$

partir de $n = k+1$

b :

$(T_{\psi(n)}(y))_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ $\quad \forall y \in E$

soit $y \in E$, soit $\varepsilon > 0$

n_0 ; $\forall n, m \geq n_0$, $|T_{\psi(n)}(y) - T_{\psi(m)}(y)| \leq \varepsilon$

soit $i \in \mathbb{N}$

$$|T_{\psi(n)}(y) - T_{\psi(m)}(y)| \leq |T_{\psi(n)}(y) - T_{\psi(n)}(y_i)| + |T_{\psi(n)}(y_i) - T_{\psi(m)}(y_i)| + |T_{\psi(m)}(y_i) - T_{\psi(m)}(y)|$$

$$\leq 2M\|y - y_i\| + |T_{\psi(n)}(y_i) - T_{\psi(m)}(y_i)|$$

soit $i \in \mathbb{N}$ de manière à avoir $2M\|y - y_i\| \leq \varepsilon$

(possible car $\bar{A} = E$)

$(T_{\psi(n)}(y_i))_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$

$\exists n_0$, $n, m \geq n_0 \Rightarrow |T_{\psi(n)}(y_i) - T_{\psi(m)}(y_i)| \leq \varepsilon$

$n, m \geq n_0 \Rightarrow |T_{\psi(n)}(y) - T_{\psi(m)}(y)| \leq 2\varepsilon$

$\Rightarrow (T_{\psi(n)}(y))_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ complet

$\Rightarrow T_{\psi(n)}(y) \longrightarrow f(y)$ qd $n \to \infty$ $\quad \forall y \in E$

Etape 4 :

* f fin. com $T\varphi(n)$ $\forall n$, $\forall n$
* $|T\varphi(n)(y)| \leq M \|y\|$ $\forall n, \forall y \in E$

$|f(y)| \leq M\|y\|$ $\forall y \in E$

$\Rightarrow f \in E'$

$\Rightarrow T\varphi(n) \longrightarrow f$ E'- faible *

Théorème

> Soit E espace de Banach réflexif
>
> Soient $(x_n)_n \subset E$ et tq. $(x_n)_n$ borné
>
> Alors $\exists x \in E$ et $\exists (x_{n_k})_k$ sous suite de x_n tq.
>
> $x_{n_k} \longrightarrow x$ E-Faible.

*

démonstration :

On suppose E' séparable

Soit $(x_n)_n \subset E$ / x_n borné

On prend $(Jx_n)_n \subset E''$. J : injection canonique de $E \to E''$

on a $\|Jx_n\|_{E''} = \|x_n\|_E \Rightarrow (Jx_n)_n$ borné de E''

Th précédent $\Rightarrow \exists$ une ss. suite $(Jx_{n_k})_k$ et $\exists u \in E''$ tq $Jx_{n_k} \to u$ dans E'' faible *

c.à.d $J_{x_{n_k}}(T) \to u(T)$ $\forall T \in E$

$\Rightarrow T(x_{n_k}) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} u(T)$ $\forall T \in E'$

comme E est réflexif, on a $J(E) = E''$

$\Rightarrow \exists x \in E, u = Jx$

$\Rightarrow T(x_{n_k}) \to T(x)$ $\forall T \in E'$

c. $x_{n_k} \to x$ dans E-faible.

2

Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$
$(f_n)_n \subset L^\infty_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \lambda) = L^\infty$
xoe $(f_n)_n$ bornée

$\exists (f_{n_k})_k$ sous. suite de (f_n), $\exists f \in L^\infty$ tq.

$$\int_\Omega f_{n_k} \varphi \, dx \longrightarrow \int_\Omega f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \lambda)$$

que $f_{n_k} \to f$ dans L^∞ faible* car $L^1{}' \simeq L^\infty$)

abrév :
Le $L^p = L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \lambda)$
soit $g \in L^\infty$
on considère $T_g : \begin{cases} \varphi \longmapsto \int_\Omega \varphi(x) g(x) \, dx \\ L^1 \longrightarrow \mathbb{R} \end{cases}$

on a $|T_g(\varphi)| \leq \|g\|_\infty \|\varphi\|_1$
or T_g linéaire $\Rightarrow T_g \in (L^1)'$
on a donc $T : \begin{cases} L^\infty \to (L^1)' & \text{lin.} \\ g \mapsto T_g \end{cases}$

On peut montrer que T isom., soit $\|T_g\|_{(L^1)'} = \|g\|_\infty$
et T bij.

$\Rightarrow T$ isométrie de $L^\infty \to (L^1)'$
$L^\infty \simeq (L^1)'$

L^∞ bornée

$\subset (L^1)'$

$\|T_{f_n}\|_{(L^1)'} = \|f_n\|_\infty \leq M \quad \forall n$

$\Rightarrow (T_{f_n})_n$ bornée

Or L^1 est séparable (admis)

$\Rightarrow \exists (T_{f_{n_k}})_k$ ss. suite de (T_{f_n}) et $\exists S \in (L^1)'$ tq $T_{f_{n_k}} \to S$ dans $(L^1)'$ faible$*$

$\Rightarrow T_{f_{n_k}}(\varphi) \to S(\varphi), \quad \forall \varphi \in L^1$

or, par déf., $T_{f_{n_k}}(\varphi) = \int_\Omega f_{n_k}(x)\varphi(x)\,dx$

$S \in (L^1)' \Rightarrow \exists f \in L^\infty \,/\, S = T_f$

d'où $\int_\Omega f_{n_k}(x)\varphi(x)\,dx \longrightarrow \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in L^1$

$\Leftrightarrow T_{f_{n_k}} \longrightarrow T_f$ dans $(L^1)'$ faible$*$.

(à suivre)

$f(x) \to +\infty$ qd $\|x\| \to +\infty$
f continue.

si $\dim E < \infty$ on en déduit $\exists \bar{x} \in E$ $f(\bar{x}) \leq f(x)$ $\forall x \in E$

si $\dim E = \infty$

soit $(x_n)_n \subset E$

$f(x_n) \to \inf_E f$

comme $f(x) \to +\infty$ qd $\|x\| \to +\infty$ on a donc $(x_n)_n$ borné

Si E Banach réflexif il existe donc une ss-suite, encore notée $(x_n)_n$
et $x \in E$ $x_n \to x$ dans E faible.
a-t-on $f(x_n) \to f(x)$? on ne sait pas.

1er résultat (pas intéressant)

E Banach réflexif
$f : E \to \mathbb{R}$

1) $f(x) \to +\infty$ qd $\|x\| \to \infty$
2) f séquentiellement continue pour la topo. faible c.à.d
$x_n \to x$ E faible $\Rightarrow f(x_n) \to f(x)$ ds $\mathbb{R}$

Alors $\exists \bar{x} \in E$ $f(\bar{x}) \leq f(x)$ $\forall x \in E$

Dém : voir remarque précédente.

2ème résultat

Comme le 1er résultat en remplaçant 2) par
2bis) f séq. sci pour la topo faible c.à.d
$x_n \to x$ dans E faible $\Rightarrow f(x) \leq \liminf_{n \to \infty} f(x_n)$

$\liminf = \lim_{n \to +\infty} \left(\inf_{p \geq n} f(x_p) \right)$

dém du 2ème résultat.

$(x_n)_n$ suite minimisante $f(x_n) \to \operatorname{Inf}_E f$

$(x_n)_n$ est borné

On peut donc supposer que $x_n \to x$ E-faible

on a donc

$$\operatorname{Inf}_E f \leq f(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \operatorname{Inf}_E f$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \operatorname{Inf} f(x) \qquad (\text{et } f(x_n) \to f(x))$$

Question : Comment montrer que f est faiblement sci ?

Théorème

> E Banach
>
> $f : E \to \mathbb{R}$ continue, convexe
>
> à faire
>
> alors f est séquentielle sci pour la topologie faible
>
> c.à.d $x_n \to x$ dans E-faible $\Rightarrow f(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} f(x_n)$

démonstration :

f continue et convexe

Soit $(x_n)_n \subset E$, soit $x \in E$

$x_n \to x$ ds E faible

On veut montrer que $f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n) = L$

On peut construire une sous-suite $(x_{n_k})_k$ tq.

$$f(x_{n_k}) \to L \qquad k\to+\infty$$

x_{n_k} $\begin{cases} y_k \to x \text{ dans } E\text{-faible} \\ f(y_k) \to L \end{cases}$

: (Mazur, conséquence du thm Hahn-Banach)

$\to x$ E-faible alors :
$\in \mathbb{N}$, $\exists z_k$ combinaison convexe de $y_k, y_{k+1}, \dots, y_{2k}$
t.q. $z_k \longrightarrow x$ dans E (c.à.d $\|z_k - x\| \to 0$)

a donc $z_k = \sum_{i=0}^{k} t_{i,k}\, y_{k+i}$ $\quad t_{i,k} \geq 0 \ \forall i \in \{0,\dots,k\}$, $\sum_{i=0}^{k} t_{i,k} = 1$ $\quad \forall k \in \mathbb{N}$

bof !

met ici le lemme de Mazur.
donc $z_k \to x$ dans E
e f est continue on a donc $f(x) = \lim_{k\to+\infty} f(z_k)$

$z_k) = f\left(t_{0,k}\, y_k + t_{1,k}\, y_{k+1} + \dots + t_{k,k}\, y_{2k}\right)$

$z_k) \leq t_{0,k} f(y_k) + \dots + t_{k,k} f(y_{2k}) = \sum_{i=0}^{k} t_{i,k} f(y_{k+i})$

$\varepsilon > 0$, $\exists k_0$ tq $p \geq k_0 \Rightarrow f(y_p) \leq L + \varepsilon$
a donc pour $k \geq k_0$ $\quad f(z_k) \leq \sum_{i=0}^{k} t_{i,k} (L+\varepsilon) = \underline{L + \varepsilon}$

donc $f(x) = \lim_{k\to+\infty} f(z_k) \leq L + \varepsilon \quad \underline{\forall \varepsilon > 0}$

$$f(x) \leq L = \liminf_{n\to+\infty} f(x_n)$$

<u>ème</u> (<u>existence</u>) lim infinie

Banach réflexif (par ex. E Hilbert) $\cdot f : E \to \mathbb{R}$ <u>continue</u>, <u>convexe</u>
$x) \to +\infty$ qd $\|x\| \to +\infty$

lors $\exists \bar{x} \in E$, $f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in E$

démonstration

f cont. convexe, on a donc f seq. sci pour la topo faible
on est ramené au "2ème résultat"

Théorème (existence et unicité) (dim infinie)

E Banach réflexif, $f : E \to \mathbb{R}$ f continue, strictement convexe $f(x) \to +\infty$ qd $\|x\| \to +\infty$ Alors $\exists !\, \bar{x} \in E$, $f(\bar{x}) \leq f(x)$ $\forall x \in E$

Exemples

1) $E = H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$

Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega),\ D_i u \in L^2(\Omega)\ \forall i \in \{1, \dots, N\}\}$$

$$\|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^2}^2$$

$H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert
$H_0^1(\Omega)$ ——— (car sev fermé de $H^1(\Omega)$)

$$f(u) = \int_\Omega \left(|D_1 u(x)|^2 + |D_2 u(x)|^2\right) dx - \int_\Omega g(x) u(x)\, dx$$

$$= \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - \int_\Omega g(x) u(x)\, dx \qquad g \in L^2(\Omega) \text{ donnée}$$

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ f(u) \leq f(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

...trict convexe, continue (exercice)

...$(u) \to +\infty$ qd $\|u\|_{H^1} \to \infty$ (inégalité de poincaré)

donc $\exists! \, u \in H_0^1(\Omega)$, $f(u) \leq f(v)$ $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{1,p}}$ $\quad 1 \leq p \leq \infty$

$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), D_i u \in L^p(\Omega), i \in \{1, \dots, N\}\}$

$$f(u) = \int_\Omega \varphi(\nabla u(x))\,dx - \int_\Omega g(x)\,u(x)\,dx$$

$\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continue, $|\varphi(\xi)| \leq C|\xi|^p + C$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$

$g \in L^{p'}(\Omega)$ $\quad p' = \frac{p}{p-1}$

φ strict. convexe

$f(u) \to +\infty$ qd $\|u\| \to \infty$

...a f continue, strict. convexe.

...i $1 < p < \infty$ on peut montrer que $W_0^{1,p}$ est un Banach réflexif

$$\left(\|u\|_{W_0^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^p}\right)$$

...e th. donne $\exists! \, u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tq $f(u) \leq f(v)$ $\forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$\underline{p = 1}$. Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$

$$\tilde{f}(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + \sum_{i=1}^N |D_i u(x)|^2}\,dx$$

...$\in W^{1,1}(\Omega)$ fixé

$f(u) = \tilde{f}(u + u_0)$, $\underline{u \in W_0^{1,1}}$

f strict. convexe, continue. $f : W_0^{1,1} \longrightarrow \mathbb{R}$
$f(u) \longrightarrow \infty$ qd $\|u\|_{W_0^{1,1}} \longrightarrow +\infty$

il peut ne pas exister du $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ tq $f(u) \leq f(v)$ $\forall v \in W_0^{1,1}(\Omega)$

Caractérisation de la convexité :

rappel : $f : E \to \mathbb{R}$ E evn

1) f convexe si $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ $\forall x, y \in E$, $\forall t \in [0,1]$
2) f strict convexe si — — $<$ — — $x \neq y$, $t \in]0,1[$

Théorème (1ère caractérisation de la convexité)

> E evn
> $f : E \to \mathbb{R}$ dérivable
>
> alors 1) f convexe $\Longleftrightarrow$ $f(y) \geq f(x) + Df(x)(y-x)$ $\forall x, y \in E$
> 2) f strict. convexe $\Longleftrightarrow$ $f(y) > f(x) + Df(x)(y-x)$ $\forall x, y \in E$, $x \neq y$

fait

démonstration :

1) $(\Rightarrow)$ $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ $\forall x, y \in E$, $\forall t \in [0,1]$

Soit $x, y \in E$.
Soit $t \in]0,1]$

$f(x + t(y-x)) \leq tf(y) + (1-t)f(x)$

$f(x + t(y-x)) - f(x) \leq t(f(y) - f(x))$

$\to 0$ on obtient

$$f'_x\,(y-x) = Df(x)\,(y-x) \leq f(y) - f(x)$$

$f(y) \geq f(x) + Df(x)(y-x) \quad \forall x,y \in E$

on veut montrer $f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y) \quad \forall x,y \in E$
$\forall t \in [0,1]$

Soit $x,y \in E$, soit $t \in [0,1]$

$z = tx + (1-t)y$

$f(x) \geq f(z) + Df(z)\,(x-z) \quad = t f(z) + (Df(z)(x-y))(1-t)\, t$

$f(y) \geq f(z) + Df(z)\,(y-z) \quad = (1-t) f(z) + Df(z)\,(x-y)\,(-t)(1-t)$

car : $x - z = x - tx - (1-t)y = (1-t)(x-y)$

$y - z = y - tx - (1-t)y = -t(x-y)$

$$t f(x) + (1-t) f(y) \geq t f(z) + (1-t) f(z) = f(z)$$

$\Rightarrow)$ $x \neq y$ $t \in]0,1[$

$z = tx - (1-t)y$ $\underline{z \neq x,\ z \neq y}$

$f(x) > f(z) + Df(z)\,(x-z) \qquad \times t$

$f(y) > f(z) + Df(z)\,(y-z) \qquad \times (1-t)$

$$t f(x) + (1-t) f(y) > f(z)$$

$\Leftarrow)$ $x \neq y$

hyp $f(y) = f(x) + Df(x)\,(y-x)$

on va montrer que $f(x + t(y-x)) = f(x) + Df(x)\,(t(y-x)) \quad \forall t \in [0,1]$

$f(x + t(y-x)) < t f(y) + (1-t) f(x) \qquad t \in]0,1[$

$\leq t f(x) + t\, Df(x)(y-x) + (1-t) f(x)$

$$f(x+t(y-x)) < f(x) + Df(x)(t(y-x))$$
$$f(x+t(y-x)) \geq f(x) + Df(x)(t(y-x)) \qquad (\text{par } 1)$$

contradiction.

Théorème (2ème caractérisation)

> E evn. $f : E \to \mathbb{R}$
> f 2 fois continuement différentiable ($f \in C^2$)
> $D^2 f(x) \in \mathcal{L}(E \times E, \mathbb{R})$ (bilinéaire continue de $E \times E \to \mathbb{R}$)
>
> 1) f convexe $\Longleftrightarrow D^2 f(x)(y, y) \geq 0 \quad \forall x \in E \quad \forall y \in E$
>
> 2) f strictement convexe $\Longleftarrow D^2 f(x)(y,y) > 0 \quad \forall x \in E \quad \forall y \in E \setminus \{0\}$
> $\not\Longrightarrow$

. démonstration (exercice)

. contre exemple à 2. $\Rightarrow$: $E = \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^4$
$f''(x) = 12x^2$

NB :

1) $\left.\begin{array}{l}\varphi \text{ convexe} \\ f \text{ convexe}\end{array}\right\} \not\Longrightarrow f \circ \varphi$ convexe

2) E evn. $\varphi : E \to \mathbb{R}$ convexe
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et croissante $\Big\} \Rightarrow f \circ \varphi : E \to \mathbb{R}$ est convexe.

(Faire en exercice si f n'est pas croissante)

[A]lgorithme pour l'optimisation sans contraintes

$f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continue

[pro]pose $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$, $f(\bar{x}) \leq f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^N$

[che]rche $\bar{x}$.

[M]éthodes de gradient

[Définit]ion : Méthode de descente.

$[f :] \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continue, $x \in \mathbb{R}^N$, $w \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$

w est direction de descente en x si $\exists \rho_0 > 0$ t.q
$$f(x+tw) \leq f(x) \quad \forall t \in [0, \rho_0]$$

w est direction de descente stricte en x si $\exists \rho_0 > 0$ tq
$$f(x+tw) < f(x) \quad \forall t \in]0, \rho_0]$$

[2]) Méthode de descente pour chercher $\bar{x} \in \arg\min_{\mathbb{R}^N} f$ (c.à.d $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ $f(\bar{x}) \leq f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^N$)

C'est une méthode itérative dans laquelle $(x_n)_n$ est donnée par $\boxed{x_{n+1} = x_n + \rho_n w_n}$

$$\begin{cases} w_n \text{ dir. de descente (en } x_n) \\ \rho_n \geq 0 \end{cases}$$

Pour chaque n, il y a deux phases : 1) chercher w_n direct. de descente stricte

2) chercher ρ_n

[Propos]ition

$f \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^N$, $\nabla f(x) = \text{grad } f(x) \neq 0$ alors $w = -\nabla f(x)$ est une direction de descente stricte en x.

<u>démonstration</u>

$x \in \mathbb{R}^N$, $f \in C^1$, $\nabla f(x) \neq 0$ $\quad W = -\nabla f(x)$

$g(t) = f(x+tW)$, $t \in \mathbb{R}$

il faut montrer $\exists \rho_0 > 0$ $\quad 0 < t \leq \rho_0 \Rightarrow g(t) < g(0)$

on a $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $g'(t) = \underbrace{(\nabla f(x+tW) / W)}_{\text{p. scalaire}} = \nabla f(x+tW) \cdot W$

$\left(x \in \mathbb{R}^N, y \in \mathbb{R}^N \rightarrow \underbrace{x \cdot y}_{\mathbb{R}} = \underbrace{x^t y}_{\mathbb{R}} \quad \text{prod. scal}\right)$

$$g'(t) = \nabla f(x+tW) \cdot W = \nabla f(x+tW)^t W = \nabla f(x+tW) W \quad (\text{notation})$$

$t \in \mathbb{R}_+$, $\exists \theta \in [0,1]$ $\quad g(t) - g(0) = t g'(\theta t)$

$$g(t) - g(0) = t \nabla f(x+\theta t W) \cdot W = t\left(\nabla f(x+\theta t W)\right) \cdot \left(-\nabla f(x)\right)$$

$$g(t) - g(0) = \underbrace{-t|\nabla f(x)|^2}_{t\varepsilon^2} - t\left(\nabla f(x+\theta t W) - \nabla f(x)\right) \cdot \nabla f(x)$$

($|x|$ = norme euclidienne de x, $x \in \mathbb{R}^n$)

$$|\nabla f(x)|^2 = \varepsilon^2 > 0 \qquad |\nabla f(x)| = \varepsilon$$

$\exists \rho_0 > 0$, $|\nabla f(x+uW) - \nabla f(x)| < \varepsilon$ si $|u| < \rho_0$

(par continuité de ∇f)

$$g(t) - g(0) = -t\varepsilon^2 - t(R) = \underbrace{-t(\overset{>0}{\varepsilon^2} - \overset{>0}{R})}_{<0}, \ |R| < \varepsilon^2 \quad \text{si } |t| < \rho_0 \quad t \neq 0$$

$0 < t < \rho_0 \qquad g(t) - g(0) < 0$

$f(x+tW) < f(x)$ si $0 < t < \rho_0$

: $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$
$x \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

.) Si w est une direction de descente stricte alors $w \cdot \nabla f(x) \leq 0$

2) Si $w \cdot \nabla f(x) < 0$ alors w est une direction de descente stricte.

...tration

...1 $x \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$= f(x + tw)$

$) = \nabla f(x + tw) \cdot w$

$\in \mathbb{R}$ $\exists \theta \in]0,1[$ $\quad g(t) - g(0) = t g'(\theta t) = t \nabla f(x + \theta t w) \cdot w$

$= t(\nabla f(x) \cdot w) + t(\nabla f(x + \theta t w) - \nabla f(x)) \cdot w$

:

$$\frac{\ldots - g(0)}{t} = \nabla f(x) \cdot w + (\nabla f(x + \theta t w) - \nabla f(x)) \cdot w$$

$\Big\downarrow\, \stackrel{\shortparallel}{\varepsilon(t)}$ 0

dir. de descente (stricte)

$\exists \rho_0$, $0 < t < \rho_0 \Rightarrow g(t) \leq g(0)$ $\qquad \nabla f(x) \cdot w + \varepsilon(t) \leq 0$ $\quad 0 < t < \rho_0$

$\nabla f(x) \cdot w \leq 0$

$\nabla f(x) \cdot w < 0$

$\nabla f(x) \cdot w = \delta < 0$

$$\frac{g(t) - g(0)}{t} = \delta + \underbrace{(\nabla f(x + \theta_t t w) - \nabla f(x)) \cdot w}_{R(t)}$$

$\exists \rho_0 > 0$ tq $\quad 0 < t < \rho_0 \Rightarrow |R(t)| < |\delta|$

$\Rightarrow R(t) < -\delta$

$\Rightarrow \dfrac{g(t) - g(0)}{t} < \delta - \delta = 0 \quad \Rightarrow g(t) < g(0)$

Algorithme du gradient à pas fixe :

$f \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, on se donne $\rho > 0$

1) initialisation : on se donne $x_0 \in \mathbb{R}^N$
2) itération : $x_{n+1} = x_n - \rho \nabla f(x_n)$

NB : à chaque itération il faut calculer $\nabla f(x_n)$

Théorème

$f \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$
$f(x) \longrightarrow +\infty$ qd $\|x\| \to +\infty$
$(x_n)_n$ donné par algorithme du gradient fixe. on suppose $f(x_{n+1}) \leq f(x_n)$ $\forall n$

Alors $\exists \rho_0 > 0$ tq si $0 < \rho < \rho_0$ alors il existe une sous suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$
c'est le ρ de l'algo du grad à pas fixe.

et $x \in \mathbb{R}^N$ tq $\left| \begin{array}{l} x_{n_k} \longrightarrow x \quad \text{qd } k \to +\infty \\ \nabla f(x) = 0 \end{array} \right.$

- Si de plus f est convexe alors $x \in \arg\min_{\mathbb{R}^N} f$
- Si de plus f est strict. convexe alors $x = \arg\min_{\mathbb{R}^n} f$ et $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$

démonstration :

$f(x) \longrightarrow +\infty$ qd $\|x\| \longrightarrow \infty$
$x_0 \in \mathbb{R}^N$
$\exists R$ tq $\|x\| > R \Rightarrow f(x) > f(x_0)$

$K = \sup \{ \| D^2 f(x) \| , x \in \overline{B}(0, R) \}$

$f(x_{n+1}) \leqslant f(x_0) \quad \forall n \quad , \quad x_n \in \overline{B}(0,R)$

$\ldots_{n+1}) = f(x_n - \rho \nabla f(x_n))$

$= f(x_n - t\rho \nabla f(x_n))$.

$C^2 \quad g'(t) = -\nabla f(x_n - t\rho \nabla f(x_n)) \cdot \nabla f(x_n)\rho$

$w_n = -\nabla f(x_n) \qquad g''(t) = D^2 f(x_n + t\rho w_n) w_n \cdot w_n \rho^2$

$\in]0,1[\quad g(1) - g(0) = g'(0) + \frac{1}{2} g''(\theta)$

$g(R) - g(0) = R g'(0) + \frac{R^2}{2} g''(R\theta)$

$\ldots_{n+1}) - f(x_n) = -\rho w_n \cdot w_n + \frac{1}{2} D^2 f(\underbrace{x_n + \theta\rho w_n}_{\in [x_n, x_{n+1}] \subset \overline{B}(0,R)}) w_n \cdot w_n \rho^2$

$\| \text{———} \| \leqslant K$

$f(x_{n+1}) - f(x_n) = -\rho \|w_n\|^2 + R_n$

$|R_n| \leqslant \frac{1}{2} K \|w_n\|^2 \rho^2$

$= \frac{1}{K} \quad 0 < \rho < \rho_0$ on a donc $|R_n| < \frac{1}{2} \rho \|w_n\|^2$

$f(x_{n+1}) \leqslant f(x_n)$

$(f(x_n))_n$ est décroissante.

$(f(x_n))_n$ est minorée $\quad \left(f(x_n) \geqslant \inf_{\mathbb{R}^N} f = \inf_{\overline{B}(0,R)} f > -\infty \right)$

$(f(x_n))_n$ est convergente

$f(x_n) \to l \qquad f(x_{n+1}) - f(x_n) \to l - l = 0$

$R_n \leq \frac{1}{2}\rho\|W_n\|^2 \qquad -R_n \geq -\frac{1}{2}\rho\|W_n\|^2$

on a donc $\quad -\rho\|W_n\|^2 + R_n \to 0 \qquad \rho\|W_n\|^2 - R_n \to 0$

$$\rho\|W_n\|^2 - R_n \geq \rho\|W_n\|^2 - \frac{1}{2}\rho\|W_n\|^2 = \frac{1}{2}\rho\|W_n\|^2$$

on a donc $\underline{\underline{W_n \to 0}}$ qd $n \to +\infty$

$$\underline{\nabla f(x_n) \to 0 \quad \text{qd } n \to +\infty}$$

résumé : $\begin{cases} (x_n)_n \subset \overline{B}(0,R) \\ \nabla f(x_n) \to 0 \end{cases}$

Il existe donc une sous-suite et x tq $x_{n_k} \to x$

on a donc $\underbrace{\nabla f(x_{n_k})}_{\downarrow \atop 0} \to \nabla f(x)$ et donc $\underline{\nabla f(x) = 0}$

- Si de plus f est convexe,

  $\nabla f(x) = 0 \Rightarrow x \in \arg\min f$

  en effet soit $\bar{x} \in \arg\min f$ ($\bar{x}$ existe)

  on suppose $x \notin \arg\min f$, on montre alors $\nabla f(x) \neq 0$

  $f(x) > f(\bar{x})$

  comme f convexe on a $f(\bar{x}) \geq f(x) + Df(x)(\bar{x} - x)$

  $f(\bar{x}) \geq f(x) + \nabla f(x) \cdot (\bar{x} - x)$

  $Df(x)(\bar{x} - x) \leq f(\bar{x}) - f(x) < 0$

  $Df(x)(\bar{x} - x) < 0$ et donc $Df(x) \neq 0$

- Si de plus f est strictement convexe,

  alors $\exists ! \bar{x} \in \mathbb{R}^N$, $f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$

  d'où $\bar{x} = \arg\min_{\mathbb{R}^N} f$

...tre alors $x_n \to \bar{x}$, en effet si $x_n \not\to \bar{x}$
...iste une ss-suite (x_{n_k}) et $\varepsilon > 0$ tq $|x_{n_k} - \bar{x}| \geq \varepsilon$

$(x_{n_k})_k$ est bornée, on peut extraire une ss-suite convergente ;
c.à.d $\exists\ (x_{n_{k_p}})_p$ et x, $x_{n_{k_p}} \to x$

...uis $\underbrace{\nabla f(x_{n_{k_p}})}_{\downarrow\ 0} \to \nabla f(x)$

on a donc $\nabla f(x) = 0$ d'où $x = \bar{x}$
en contradiction avec $|x_{n_k} - \bar{x}| \geq \varepsilon$
on a bien montré $x_n \to \bar{x} = \operatorname{argmin} f$

Ce théorème est faible car on a supposé $f(x_{n+1}) \leq f(x_n)\ \forall n$

difficultés de l'algorithme, choix de ρ.

Convergence "lente".

...de du gradient à pas optimal (steepest descent)

...$C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. on cherche $\bar{x} \in \operatorname{argmin}_{\mathbb{R}^N} f$

...alisation : $x_0 \in \mathbb{R}^N$
...tion : x_n connu
$\to w_n = -\nabla f(x_n)$
$\to \rho_n \geq 0$ tq $f(x_n + \rho_n w_n) \leq f(x_n + \rho w_n)$, $\forall \rho \geq 0$
minimise la fonction $\varphi_n(\rho) = f(x_n + \rho w_n)$; $\varphi_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$
$\to x_{n+1} = x_n + \rho_n w_n$

A chaque itération
1) Calcul de $\nabla f(x_n)$
2) un pb unidimensionnel de minimisation

N.B. :

1) $W_n = -\nabla f(x_n)$

1er cas : $\nabla f(x_n) = 0$ l'algorithme s'arrête
$x_k = x_n \quad \forall k \geq n$

2ème cas : $\nabla f(x_n) \neq 0$ W_n est alors une direction de descente stricte.
et donc si ρ_n existe alors $\rho_n > 0$.
$x_{n+1} \neq x_n$ / $f(x_{n+1}) < f(x_n)$

2) Si $f(x) \to +\infty$ qd $\|x\| \to +\infty$, alors $\exists \rho_n \geq 0$
tq $f(x_n + \rho_n W_n) \leq f(x_n + \rho W_n) \quad \forall \rho \geq 0$

$\rho = 0 \quad f(x_n) \geq f(x_{n+1})$

en effet, $\varphi_n(\rho) = f(x_n + \rho W_n)$,
on a $\varphi_n(\rho) \to +\infty$ qd $\rho \to \infty$
(si $W_n \neq 0$)

$\exists \rho_1, \ \rho > \rho_1 \Rightarrow \varphi_n(\rho) > \varphi_n(0)$

$$\inf_{\rho \in \mathbb{R}^+} \varphi_n(\rho) = \inf_{\rho \in [0,\rho_1]} \varphi_n(\rho)$$

$\exists$ donc $\rho_n \in [0, \rho_1]$, $\varphi_n(\rho_n) \leq \varphi_n(\rho) \quad \forall \rho \geq 0$
$\rho_n > 0$ car W_n est une direction de descente stricte.

Proposition

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$
$(x_n)_n$ t.q. $x_{n+1} = x_n + \rho_n W_n$
$W_n = -\nabla f(x_n)$, $\rho_n \geq 0$ tq :
$f(x_n + \rho_n W_n) \leq f(x_n + \rho W_n) \quad \forall \rho \geq 0$

Alors $\nabla f(x_n) \cdot \nabla f(x_{n+1}) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(c.à.d. $\nabla f(x_n) \perp \nabla f(x_{n+1})$)

..ration :

$\cdot\ x_n + \rho_n w_n$

n : $w_n = 0$

on a donc $\nabla f(x_n) = 0$

$\nabla f(x_{n+1}) = 0$

$\nabla f(x_n) \cdot \nabla f(x_{n+1}) = 0$

s : $w_n \neq 0$

alors w_n est une direction de descente stricte.

on a donc $\rho_n > 0$

$\varphi_n(\rho) = f(x_n + \rho w_n)$

$\varphi_n(\rho_n) \leq \varphi_n(\rho) \quad \forall \rho \geq 0$

et donc $\forall \rho \in]\rho_n - \varepsilon, \rho_n + \varepsilon[$

$(\varepsilon - \rho_n > 0)$

on a donc $\varphi_n'(\rho_n) = 0 \qquad \varphi_n'(\rho) = \nabla f(x_n + \rho w_n) \cdot w_n$

$0 = \varphi_n'(\rho_n) = \nabla f(x_{n+1}) \cdot (-\nabla f(x_n))$

On a $\nabla f(x_n) \perp \nabla f(x_{n+1})$

l'algorithme : Comment determiner ρ_n ?

simple : Cas d'une fonctionnelle quadratique.

$$f(x) = \frac{1}{2} Ax \cdot x - b \cdot x = \frac{1}{2}(Ax/x) - (b/x) = \frac{1}{2} x^t A x - b^t x$$

$\mathbb{R}^{N,N}$ A s.d.p.

$\mathbb{R}^N$

a $f(x) \longrightarrow +\infty$ qd $\|x\| \to +\infty$ $\left(f(x) \geq \alpha |x|^2 - |b||x| \right.$

$\left. \alpha = + \text{ petite v.p. de } A > 0 \right)$

$) = Ax - b$

donne $) \ -\nabla f(x_n) = b - Ax_n$

il existe $\rho_n \geq 0$, $f(x_n + \rho_n w_n) \leq f(x_n + \rho w_n)$ $\forall \rho \geq 0$

Si $w_n \neq 0$ alors $\rho_n > 0$

On sait ρ_n doit être t.q.

$$\nabla f(x_n) \cdot \nabla f(x_{n+1}) = 0$$

c.à.d
$$(b - Ax_n) \cdot (b - Ax_{n+1}) = 0$$
$$(b - Ax_n) \cdot (b - A(x_n + \rho_n w_n)) = 0$$
$$(b - Ax_n) \cdot (b - Ax_n) + (b - Ax_n) \cdot (-\rho_n A w_n) = 0$$
$$w_n \cdot w_n - \rho_n w_n \cdot A w_n = 0$$

$$\boxed{\rho_n = \frac{w_n \cdot w_n}{w_n \cdot A w_n}} \quad \text{si } w_n \neq 0$$

<u>Algorithme du gradient à pas optimal pour minimiser une fonctionnelle quadratique</u> (i.e. résoudre $Ax = b$)

$$\boxed{\begin{array}{l} \to x_{n+1} = x_n + \rho_n w_n \\ w_n = b - Ax_n \quad , \quad \rho_n = \dfrac{w_n \cdot w_n}{w_n \cdot A w_n} \end{array}}$$

<u>Théorème</u> (convergence de l'algo. du gradient à pas optimal)

$f \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$

∇f localement lipschitzienne (c.à.d $\forall R > 0$, $\exists M > 0$ $\|x\| \leq R$, $\|y\| \leq R \Rightarrow \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq M\|x - y\|$)

$f(x) \to +\infty$ qd $\|x\| \to +\infty$

$x_0 \in \mathbb{R}^N$

<u>Alors</u> 1) il existe $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^N$ t.q. $x_{n+1} = x_n + \rho_n w_n$, $w_n = -\nabla f(x_n)$

$\rho_n \geq 0$

$f(x_n + \rho_n w_n) \leq f(x_n + \rho w_n)$, $\forall \rho \geq 0$

2) il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ et $x \in \mathbb{R}^N$ t.q.

$$x_{n_k} \to x \text{ qd } k \to +\infty$$

$$\nabla f(x) = 0$$

. De plus si f est convexe on a $x \in \underset{\mathbb{R}^N}{\arg\min} f$

3) Si f est strictement convexe
on a $x_n \to \bar{x} = \underset{\mathbb{R}^N}{\arg\min} f$

<u>nation</u> (cf. T.D.)
: montrer que $\nabla f(x_n) \to 0$
$(x_n)_n$ bornée car $f(x_n) \searrow$

<u>vénient de cet algorithme</u> :
p de $\underline{\rho_n}$

<u>le</u> : identification de paramètre
lement en milieu poreux (mesure de la pression)
→ loi de conservation
→ loi de Darcy.

$$\Big) \to \quad -\operatorname{div}\big(K(x)\,\operatorname{grad} p(x)\big) = 0 \quad \forall x \in \Omega$$
$$K(x)\,\operatorname{grad} p(x) \cdot n(x) = g(x) \quad \forall x \in \partial\Omega$$

aramètre à déterminer : $K(x)$ (perméabilité du milieu)
g connue
. connaît des mesures de p : $p^{(m)}$
K donné, on peut calculer (par une méthode d'approximation) une solution approchée de (E), $\underline{p_K}$

$$f(K) = \int_\Omega \left(p_K(x) - p^{(m)}(x)\right)^2 dx \qquad K \in A = \{K : \Omega \to \mathbb{R},\ \alpha \le K \le \beta\}$$

α, β données

On cherche $\bar{K} \in A$ tq $f(\bar{K}) \leq f(K)$ $\forall K \in A$

Méthode du gradient à pas variable :

On veut éviter de calculer $\rho_n \geq 0$ tq. $f(x_n + \rho_n w_n) \leq f(x_n + \rho w_n)$ $\forall \rho \geq 0$

$x_{n+1} = x_n + \rho_n w_n$

avec

1) $w_n = -\nabla f(x_n)$

2) ρ_n tq. $f(x_{n+1}) \leq f(x_n)$ (c.à.d tq $f(x_n + \rho_n w_n) \leq f(x_n)$)

$\rho_n > 0$ si $w_n \neq 0$

3) $\nabla f(x_n) \longrightarrow 0$

conséquence de 1), 2), 3) :

On suppose que $f(x) \to +\infty$ qd $\|x\| \to +\infty$

alors 2) donne $(x_n)_n$ est bornée

il existe donc $(x_{n_k})_k$ tq. $x_{n_k} \to x$ qd $k \to +\infty$

on a donc par 3) $\nabla f(x) = 0$

en particulier si f est strict. convexe, on peut montrer $x_n \to \bar{x} = \operatorname{argmin} f$

Techniques pour choisir ρ_n :

On cherche ρ_n "approximation" du ρ_n optimal

1ère idée : Majoration parabolique

$\exists M > 0$ $\|H(x)\| \leq M$ $\forall x$ (H = Hessien de f)

$$\varphi_n(\rho) = f(x_n + \rho w_n) \leq \underbrace{f(x_n) + \rho \nabla f(x_n) \cdot w_n + M\rho^2 w_n \cdot w_n}_{\tilde{\varphi}_n(\rho)}$$

$$\tilde{\varphi}_n(\rho) = f(x_n) - \rho\|w_n\|^2 + M\rho^2\|w_n\|^2$$

$$\min_{\rho\in\mathbb{R}^+} \tilde{\varphi}_n(\rho) = \tilde{\varphi}_n(\tilde{\rho}_n)$$

$$-\|w_n\|^2 + 2M\rho\|w_n\|^2 = 0 \qquad \rho = \frac{1}{2M}$$

$$\tilde{\rho}_n = \frac{1}{2M}$$

<u>NB</u> : La méthode marche aussi si w_n est une direction de descente stricte

$$\tilde{\rho}_n = \frac{-w_n \cdot \nabla f(x_n)}{(w_n \cdot w_n)\,2M} > 0$$

$$f(x_{n+1}) = \varphi_n(\tilde{\rho}_n) \leq \tilde{\varphi}_n(\tilde{\rho}_n) \leq \tilde{\varphi}_n(0) = \varphi_n(0) = f(x_n)$$

<u>2ème idée</u> : <u>Recherche séquentielle</u> :

w_n direct. de desc. stricte (par ex, $w_n = -\nabla f(x_n)$)

on cherche une approximation de ρ_n optimal dans la direction w_n

$\varphi_n(\rho) = f(x_n + \rho w_n)$

on se donne $\alpha > 0$

calcul de $\varphi_n(0)$, $\varphi_n(\alpha)$, puis $\varphi_n(2\alpha)$ ou $\varphi_n(\frac{\alpha}{2})$

puis 4α ou $\frac{3\alpha}{2}$ ou ...

si φ est convexe on obtient un encadrement aussi précis que l'on veut de ρ_n (<u>Mais</u> avec trop de calculs)

<u>3ème idée</u> : <u>Section d'or</u>

$f(x) \to +\infty$ qd $\|x\| \to +\infty$

f strict. convexe

on construit une suite d'intervalle $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tq.

1) $I_{k+1} \subset I_k$

2) long$(I_{k+1}) = \alpha$ long(I_k) $(\alpha < 1)$

3) $\rho_{optimal} \in I_k \ \forall k$

4) une seule évaluation de f pour chaque k.

x_n, w_n connu

w_n direction de descente stricte

$\varphi(\rho) = f(x_n + \rho w_n)$

- On suppose connu $I_0 = [\alpha_0, \beta_0]$ t.q. $\rho_n \in [\alpha_0, \beta_0]$
- On suppose $I_k = [\alpha_k, \beta_k]$ connu, on construit $I_{k+1} = [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]$

On se donne $\bar{\alpha}_{k+1}, \bar{\beta}_{k+1}$

$$\alpha_k < \bar{\alpha}_{k+1} < \bar{\beta}_{k+1} < \beta_k$$

On calcule $\varphi(\bar{\alpha}_{k+1})$ et $\varphi(\bar{\beta}_{k+1})$ $\quad (\varphi(\rho) = f(x_n + \rho w_n))$

On a donc deux évaluations de f

φ convexe, $\varphi(\rho_n) \leq \varphi(\rho)$ $\forall k \geq 0$

donc φ décroissante sur $[0, \rho_n]$, croissante sur $[\rho_n, +\infty[$

- 2 cas :

1er cas : $\varphi(\bar{\alpha}_{k+1}) \geq \varphi(\bar{\beta}_{k+1})$

$\rho_n \in [\bar{\alpha}_{k+1}; \beta_k] \longrightarrow \alpha_{k+1} = \bar{\alpha}_{k+1}$, $\beta_{k+1} = \beta_k$

2ème cas : $\varphi(\bar{\alpha}_{k+1}) < \varphi(\bar{\beta}_{k+1})$

$\rho_n \in [\alpha_k, \bar{\beta}_{k+1}] \longrightarrow \alpha_{k+1} = \alpha_k$, $\beta_{k+1} = \bar{\beta}_{k+1}$

On a bien $\rho_n \in I_{k+1}$

$$|I_{k+1}| = \beta_{k+1} - \alpha_{k+1} = \begin{cases} \beta_k - \bar{\alpha}_{k+1} \\ \bar{\beta}_{k+1} - \alpha_k \end{cases} = \alpha(\beta_k - \alpha_k) = \alpha |I_k|$$

$$\left| \begin{array}{l} \bar{\alpha}_{k+1} = \beta_k - \alpha(\beta_k - \alpha_k) \\ \bar{\beta}_{k+1} = \alpha_k + \alpha(\beta_k - \alpha_k) \end{array} \right.$$

Comme on veut $\alpha_{k+1} < \bar{\alpha}_{k+1} < \bar{\beta}_{k+1} < \beta_k$

$\bar{\beta}_{k+1} > \bar{\alpha}_{k+1}$

$$\alpha_k + \alpha(\beta_k - \alpha_k) > \beta_k - \alpha(\beta_k - \alpha_k)$$

$$2\alpha(\beta_k - \alpha_k) > (\beta_k - \alpha_k) \quad \Rightarrow \quad \alpha > \frac{1}{2}$$

Résumé : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

① on pose $\bar{\alpha}_{k+1} = \beta_k - \alpha(\beta_k - \alpha_k)$
$\qquad \bar{\beta}_{k+1} = \alpha_k + \alpha(\beta_k - \alpha_k)$

② on calcule $\varphi(\bar{\alpha}_{k+1})$ et $\varphi(\bar{\beta}_{k+1})$ et on en déduit $I_{k+1} = \begin{cases} [\alpha_k, \bar{\beta}_{k+1}] \\ [\bar{\alpha}_{k+1}, \beta_k] \end{cases}$

Peut-on choisir α pour que $\bar{\alpha}_{k+2} = \bar{\alpha}_{k+1}$ (1) ou $\bar{\beta}_{k+2} = \bar{\alpha}_{k+1}$ (2)

$I_{k+1} = [\alpha_k, \bar{\beta}_{k+1}]$ $\alpha_{k+1} = \alpha_k$ $\beta_{k+1} = \bar{\beta}_{k+1}$

→ la solution (1) est impossible (exercice)

→ essayons la sol. (2)

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_{k+2} &= \alpha_{k+1} + \alpha(\beta_{k+1} - \alpha_{k+1}) \\ &= \alpha_{k+1} + \alpha^2(\beta_k - \alpha_k) \\ &= \alpha_k + \alpha^2(\beta_k - \alpha_k) \end{aligned}$$

$$\bar{\alpha}_{k+1} = \beta_k - \alpha(\beta_k - \alpha_k)$$

peut-on avoir $\alpha_k + \alpha^2(\beta_k - \alpha_k) = \beta_k - \alpha(\beta_k - \alpha_k)$

$$(\beta_k - \alpha_k)\alpha^2 + (\beta_k - \alpha_k)\alpha - (\beta_k - \alpha_k) = 0$$

$$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

on doit avoir $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

$\alpha_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} > \frac{1}{2} \iff \sqrt{5} > 2 \iff 5 > 4$ ok.

$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < 1 \iff -1+\sqrt{5} < 2 \iff 5 < 9$ ok.

avec ce choix de α $\left(\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ on a $\bar{\alpha}_{k+1} = \bar{\beta}_{k+2}$ dans le cas

$I_{k+1} = [\alpha_k, \bar{\beta}_{k+1}]$

de même on a $\bar{\beta}_{k+1} = \bar{\alpha}_{k+2}$ dans le cas $I_{k+1} = [\bar{\alpha}_{k+1}, \beta_k]$

On a alors une seule évaluation de f pour chaque $k \in \mathbb{N}$.

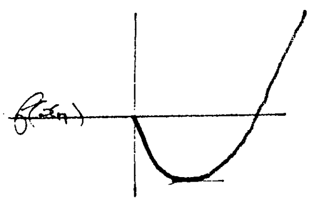
Pb : On cherche ρ_n par une méthode itérative (par exemple la méthode précédente) quand s'arrête-t-on ?

__Règle de Wolfe :__

Hyp : $f(x) \to +\infty$ qd $\|x\| \to +\infty$
W_n direction de descente strict*e*, plus précisément $\nabla f(x_n) \cdot W_n < 0$
(cond. suff. pour que W_n soit une direct de desc. stricte (ddS))

On se donne $0 < m_1 < m_2 < 1$

$$\varphi(\rho) = f(x_n + \rho W_n)$$
$$\varphi'(\rho) = \nabla f(x_n + \rho W_n) \cdot W_n$$
$$\varphi'(0) = \nabla f(x_n) \cdot W_n < 0$$
$$\varphi(\rho) \to \infty \text{ qd } \rho \to \infty$$



On accepte ρ_n si $\rho_n > 0$ vérifie 2 conditions :

1) $\varphi(\rho_n) < \varphi(0) + m_1 \rho_n \varphi'(0)$ (1)

(1) est vérifié pour ρ_n petit
(1) n'est pas vérifié pour ρ_n grand

2) $\varphi'(\rho_n) > m_2 \varphi'(0)$ (2)

(2) est faux pour ρ_n petit ($\varphi'(0) < 0$ et $0 < m_2 < 1$)
il est impossible que $\varphi'(\rho) \leq m_2 \varphi'(0)$ $\forall \rho$
(sinon φ est décroissante)
(2) est vérifié au moins pour certains ρ_n grand.

pb : $x_0, \dots, x_n, x_{n+1} \dots$

Comment l'algorithme s'arrête-t-il ?

Test d'arrêt : $\| x_{n+1} - x_n \|$ petit

$\| \nabla f(x_n) \|$ petit

2°) Méthode de gradient conjugué

a) Gradient conjugué pour une fonctionnelle quadratique :

$x \in \mathbb{R}^N$

$f(x) = \frac{1}{2} Ax \cdot x - b \cdot x \qquad A \in \mathbb{R}^{n,n} \qquad A$ sdp $\qquad b \in \mathbb{R}^n$

Rappel $f(x) \to +\infty$ qd $\|x\| \to \infty$

f est convexe

$\exists! \bar{x}$, $f(\bar{x}) \leq f(x) \; \forall x \in \mathbb{R}^n$, $A\bar{x} = b$ $\quad (\Leftrightarrow \nabla f(\bar{x}) = 0)$

Définitions

1) $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0 \quad y \neq 0$

x et y sont A-conjugués si $Ax \cdot y = 0$

(i.e. $x \perp y$ pour le produit scalaire induit par A

$(x, y) \mapsto Ax \cdot y$)

2) $x_0, \dots, x_{p-1} \in \mathbb{R}^n$ sont p directions A-conjuguées

si $x_i \neq 0 \; \forall i$ et $Ax_i \cdot x_j = 0 \; \forall i \neq j$

N.B : A sdp $\Rightarrow Ax \cdot x > 0 \quad \forall x \neq 0$

Proposition

$(x_0, \dots, x_{p-1})$ p directions A-conjuguées (de $\mathbb{R}^N$)

Alors 1) $(x_0, \dots, x_{p-1})$ est une famille libre

2) si $p = N$, $(x_0, \dots, x_{p-1})$ est une base de $\mathbb{R}^N$

démonstration :

1) $\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i x_i = 0 \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$

$j \in \{0, \dots, p-1\}$

$$Ax_j \cdot \left(\sum \lambda_i x_i \right) = 0$$

$$\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i \, (Ax_j \cdot x_i) = 0$$

$$\lambda_j \underbrace{(Ax_j \cdot x_j)}_{\neq 0} = 0$$

$\neq 0$ car $x_i \neq 0$ et A sdp

on a donc $\lambda_j = 0$

2) $p = N$

$(x_0, \dots, x_{N-1})$ est une base de $\mathbb{R}^N$

Proposition Méthode de directions conjuguées

A sdp, $b \in \mathbb{R}^N$ $\quad f(x) = \frac{1}{2} Ax \cdot x - b \cdot x$

$w_0, \dots, w_{N-1}$ $\quad$ N directions A-conjuguées

x_0 qq.

$x_{n+1} = x_n + \rho_n w_n$ $\quad$ ρ_n optimal dans la direction w_n

w_n d.d.s en x_n $\quad \forall n = \{0, \dots, N-1\}$

Alors $x_N = \bar{x} = \operatorname{argmin} f$

Rappel : $\rho_n > 0$ (car w_n est une d.d.s)

$\varphi(\rho) = f(x_n + \rho w_n)$

$\varphi'(\rho_n) = 0 = \nabla f(x_n + \rho_n w_n) \cdot w_n = \nabla f(x_{n+1}) \cdot w_n$

on a donc $(Ax_{n+1} - b) \cdot w_n = 0 \quad \forall n \in \{0, \dots, N-1\}$

On va montrer (par récurrence) que $n \in \{0, \dots, N-1\}$
$(Ax_{n+1} - b) \cdot w_k = 0 \quad \forall k \in \{0, \dots, n\} \quad (*)$

<u>Conclusion</u> : en prenant $(*)$ pour $n = N-1$
$(Ax_N - b) \cdot w_k = 0 \quad \forall k \in \{0, \dots, N-1\}$
et donc $Ax_N - b = 0$ car $(w_0, \dots, w_{N-1})$ est une base de $\mathbb{R}^N$
et donc $x_N = \overline{x}$

$(*)$ est vrai pour $n = 0$
$(Ax_1 - b) \cdot w_0 = 0$ (cf. rappel)

Hyp. rec. : $(*)$ vrai pour $i \in \{0, \dots, n-1\}$
$(Ax_{i+1} - b) \cdot w_k = 0 \quad i = \{0, \dots, n-1\}$
$k \in \{0, \dots, i\}$

On veut montrer $(Ax_{n+1} - b) \cdot w_k = 0 \quad k \in \{0, \dots, n\}$

① <u>$k = n$</u> $\quad (Ax_{n+1} - b) \cdot w_n = 0$ (cf. rappel)

② $k \in \{0, \dots, n-1\}$

$x_{n+1} = x_n + \rho_n w_n$
$x_{n+1} = x_{n-1} + \rho_{n-1} w_{n-1} + \rho_n w_n$
$x_{n+1} = x_k + \sum_{i=k}^{n} \rho_i w_i \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}$

$$Ax_{n+1} = Ax_k + \sum_{i=k}^{n} \rho_i A w_i, \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}$$

$k \in \{0, \dots, n-1\}$

$$(Ax_{n+1} - b) \cdot w_k = \left(Ax_{k+1} - b + \sum_{i=k+1}^{n} \rho_i A w_i\right) \cdot w_k$$
$$= \underbrace{(Ax_{k+1} - b) \cdot w_k}_{=0 \text{ (cf. rappel)}} + \sum_{i=k+1}^{n} \rho_i \underbrace{A w_i \cdot w_k}_{=0}$$

$(Ax_{n+1} - b) \cdot w_k = 0 \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}$

<u>Conclusion</u> : $n = N-1$

$(Ax_n - b) \cdot w_k = 0 \quad \forall k \in \{0, \dots, N-1\}$

$Ax_N = b$

<u>Pb</u> : comment trouver $w_0, \dots, w_{N-1}$

<u>idée</u> : $w_0, \dots, w_{n-1}$ connus

$x_0, \dots, x_n$ connus

on <u>cherche w_n</u> :

$$w_n = \underbrace{b - Ax_n}_{\nabla f(x_n)} + \lambda_{n-1} w_{n-1} \qquad n \geq 1$$

λ_{n-1} t.q. w_n soit A-conjugué avec w_{n-1}

$$0 = w_n \cdot Aw_{n-1} = (b - Ax_n + \lambda_{n-1} w_{n-1}) \cdot Aw_{n-1}$$

$$\lambda_{n-1} = \frac{(b - Ax_n) \cdot Aw_{n-1}}{\underbrace{w_{n-1} \cdot Aw_{n-1}}_{\neq 0 \text{ car } w_{n-1} \neq 0}}$$

avec ce choix de λ_{n-1} on a bien <u>w_n A-conjugué avec w_{n-1}</u>

On peut montrer (admis) que w_n est <u>A-conjugué</u> avec w_k , $k = 0, \dots, n-1$

<u>Algorithme du Gradient Conjugué</u> (pour une fonctionnelle quadratique)

<u>initialisation</u> : x_0 qqe

$R_0 = b - Ax_0$, $\underline{w_0 = R_0}$

ρ_0 optimal dans la direction w_0

<u>calcul de ρ_0</u> : w_0 est une d.d.s. donc $\rho_0 > 0$

$$(\nabla f(x_0+\rho_0 W_0), W_0) = 0$$
$$(b - Ax_0 - \rho_0 AW_0 , W_0) = 0$$

$$\boxed{\rho_0 = \frac{(b-Ax_0)\cdot W_0}{AW_0 \cdot W_0} = \frac{R_0 \cdot W_0}{AW_0 \cdot W_0} = \frac{R_0 \cdot R_0}{AW_0 \cdot W_0}}$$

$$x_1 = x_0 + \rho_0 W_0$$

<u>itération</u> :

$x_0, \ldots, x_n$ connus

on cherche x_{n+1}

$R_n = b - Ax_n$

. Si $R_n = 0$ l'algo. s'arrête . $x_n = \bar{x}$

. Si $R_n \neq 0$ alors $\boxed{W_n = R_n + \lambda_{n-1} W_{n-1}}$

$$\boxed{\lambda_{n-1} = - \frac{R_n \cdot AW_{n-1}}{W_{n-1} \cdot AW_{n-1}}}$$

<u>$W_n \neq 0$ et W_n est un d.d.s :</u>

$$W_n \cdot (b - Ax_n) = W_n \cdot R_n$$
$$= R_n \cdot R_n + \lambda_{n-1} \underbrace{W_{n-1} R_n}_{=0}$$

car $W_{n-1} \cdot (b - Ax_n)$

$W_{n-1} \cdot \nabla f(x_n)$

$\underbrace{W_{n-1} \cdot \nabla f(x_{n-1} + \rho_{n-1} W_{n-1})}_{=0}$

car ρ_{n-1} <u>optimal</u> dans la direction W_{n-1}

$W_n \cdot \nabla f(x_n)$

$W_n (b - Ax_n) = \|R_n\|^2 > 0$

$W_n \neq 0$

W_n dds

il existe $\rho_n > 0$

ρ_n optimal dans la direction w_n

<u>calcul de ρ_n</u>

$$\nabla f(x_n + \rho_n w_n) \cdot w_n = 0$$

$$(b - Ax_n - A\rho_n w_n) \cdot w_n = 0$$

$$\boxed{\rho_n = \frac{(b - Ax_n) \cdot w_n}{Aw_n \cdot w_n}} \qquad \boxed{x_{n+1} = x_n + \rho_n w_n}$$

on a aussi : $\boxed{\rho_n = \dfrac{R_n \cdot R_n}{Aw_n \cdot w_n}}$

<u>Théorème</u>

$A \in \mathbb{R}^{N,N}$ s.d.p. $\qquad f(x) = \frac{1}{2}Ax \cdot x - bx$

$b \in \mathbb{R}^N$

x_0 qq, $x_0, x_1, \dots, x_N$ donné par l'algo. du <u>gradient conjugué</u>

<u>Alors</u> $\exists\, n \leq N$ tq $x_n = \bar{x} = \underset{\mathbb{R}^N}{\operatorname{argmin}} f$ (ou encore $A\bar{x} = b$)

<u>dém</u> (admis)

<u>N.B.</u> 1) à chaque itération $n \geq 1$

$\rightarrow R_n = b - Ax_n$

$\rightarrow \lambda_{n-1} = -\dfrac{R_n \cdot Aw_{n-1}}{w_{n-1} \cdot Aw_{n-1}} = \dfrac{R_n \cdot R_n}{R_{n-1} \cdot R_{n-1}}$ (admis, le vérifier)

$\rightarrow \rho_n = \dfrac{R_n \cdot R_n}{Aw_n \cdot w_n}$

$\rightarrow x_{n+1} = x_n + \rho_n w_n$

2) $x_N = \bar{x}$, $A\bar{x} = b$

Cholesky (A sdp) $A = LL^t$ descente / remontée) nbre d'opérations $\frac{N^3}{3}$

Gradient Conjugué : nbre opérations $\simeq N^3$

→ Le gradient conjugué, comme méthode directe pour résoudre $A\bar{x} = b$ est moins bon que Cholesky

Mais, on peut espérer que x_n est proche de $\bar{x}$ pour $n \ll N$

3) $\mathrm{Cond}(A) = \frac{\lambda_1}{\lambda_N} \geq 1$ λ_1 = + gde v.p.
(conditionnement) λ_N = + pte —

Si cond(A) est grand l'algo. du gradient conjugué se comporte mal, numériquement on a x_N très différent de $\bar{x}$

ⓑ Gradient conjugué préconditionné pour une fonctionnelle quadratique.

Idée du préconditionnement :

① $Ax = b$ A sdp $A \in \mathbb{R}^{N,N}$
$b \in \mathbb{R}^N$

$\mathrm{Cond}(A) \gg 1$

1ère idée : on remplace ① par ② $(\Pi A)X = \Pi b$ avec Π inversible

Π est "proche" de A^{-1}, ΠA est "proche" de Id

$\mathrm{cond}(\Pi A)$ "proche" de 1

A sdp, Π sdp $\not\Rightarrow$ ΠA sdp $\left((\Pi A)^t = A^t \Pi^t = A\Pi\right)$

2ème idée : A sdp, il existe L triangulaire inférieure tq $A = LL^t$ (L inversible

On se donne L "proche" de $\bar{L}$ et on remplace ① par

③ $\begin{cases} L^{-1}A(L^t)^{-1}y = L^{-1}b \\ L^t x = y \quad (\leftarrow \text{très simple à résoudre}) \end{cases}$

$L^{-1}A(L^t)^{-1}$ est sdp. $\quad (L^{-1}A(L^t)^{-1})^t = L^{-1}A(L^t)^{-1}$

$vp.(L^{-1}A(L^t)^{-1}) = vp(\underbrace{(LL^t)^{-1}}_{\text{"proche" de } A^{-1} \text{ car } L \text{ "proche" } \bar{L}}A) \simeq v.p.(Id)$

$\lambda \in vp(L^{-1}A(L^t)^{-1})$

$\exists z \neq 0 \quad L^{-1}A\underbrace{(L^t)^{-1}z}_{y} = \lambda z \qquad y = (L^t)^{-1}z$

$L^{-1}Ay = \lambda L^t(y)$

$(L^t)^{-1}L^{-1}Ay = \lambda y$

$(LL^t)^{-1}Ay = \lambda y \qquad \lambda \in vp(((LL^t)^{-1}A)^t$

$$\text{cond}(L^{-1}A(L^t)^{-1}) = \text{cond}((LL^t)^{-1}A)$$

Gradient conjugué préconditionné

1) chercher L "proche" de $\bar{L}$

2) appliquer le gradient conjugué pour résoudre ③

Le G.C. pour résoudre $L^{-1}A(L^t)^{-1}y = L^{-1}b$ est l'algorithme de G.C. pour minimiser $f(y) = \frac{1}{2}(L^{-1}A(L^t)^{-1})y\cdot y - L^{-1}b\cdot y$

G.C. pour trouver directement x

$$\tilde{R}_n = b - Ax_n, \quad LL^t S_n = \tilde{R}_n$$

$$\lambda_{n-1} = \frac{S_n \tilde{R}_n}{S_{n-1}\tilde{R}_{n-1}}, \quad \tilde{W}_n = S_n + \lambda_{n-1}\tilde{W}_{n-1}$$

$$\rho_n = \frac{S_n \tilde{R}_n}{A\tilde{W}_n \cdot \tilde{W}_n}, \quad x_{n+1} = x_n + \rho_n \tilde{W}_n$$

Méthodes pour trouver L "proche" de $\tilde{L}$

1) prendre L diagonale $\quad L = \begin{pmatrix} \diagdown & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$

2) L a les mêmes termes non nuls que A (Cholesky incomplet : on ne garde pour L que les termes non nuls pour A)

3) préconditionnement par SSOR.
4) factorisation de Cholesky incomplète de niveau 1 ou 2
   (2) = niveau 0)

© Gradient conjugué pour une fonctionnelle non quadratique :

$f \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$
$f(x) \to +\infty$ qd $\|x\| \to +\infty$
f strict. convexe
On sait $\exists ! \, \bar{x}$; $f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$

$$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})(h) + \frac{1}{2} D^2 f(\bar{x})(h,h) + \text{Reste}.$$

$\to W_n = -\nabla f(x_n) + \lambda_{n-1} W_{n-1}$
$\to \rho_n$ "optimal" dans la direction W_n

Choix possibles :
1) Fletcher-Reeves, $\boxed{\lambda_{n-1} = \dfrac{R_n . R_n}{R_{n-1} . R_{n-1}} \qquad R_n = \nabla f(x_n)}$

2) Polak-Ribière, $\boxed{\lambda_{n-1} = \dfrac{R_n . (R_n - R_{n-1})}{R_{n-1} . R_{n-1}}}$

NB : f quad. $\Rightarrow R_n . R_{n-1} = 0$ (admis)
Si f est quadra. on retrouve l'algo du gradient conjugué.

<u>Théorème de convergence pour polak . Rivière</u> (cf. T.D.)

suite ⟶

3°) Méthode de Newton et Quasi-Newton

a) Méthode de Newton pour $g(x) = 0$:

E e.v.n

$g : E \to E$, $E = \mathbb{R}^N$

On cherche $x \in E$; $g(x) = 0$

Méthode de Newton pour trouver $x \in E$; $g(x=0)$

initialisation : $x_0 \in E$	
itération : $g(x) = 0$, on va linéariser au voisinage de x_n	

$$g(x_n) + Dg(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0$$

$$Dg(x_n)(x_{n+1} - x_n) = - g(x_n)$$

à chaque itération :

1- Calcul de $Dg(x_n) \in \mathbb{R}^{N,N}$

2- Résolution d'un système linéaire

$$Dg(x_n)(x_{n+1} - x_n) = - g(x_n)$$

Avantage de Newton :

Si $x_n \to x$, avec x tq $g(x) = 0$

alors la convergence est quadratique , on a $\dfrac{\|x_{n+1} - x\|}{\|x_n - x\|^2} \longrightarrow C$

$$\|x_{n+1} - x\| \leq \gamma \|x_n - x\|^2$$

b) Méthode de Newton pour la minimisation de f :

$f \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$

on cherche $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$, $f(\bar{x}) \leq f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^N$

Rappel : cond. nécessaire d'optimalité, on sait $\bar{x} \in \operatorname{argmin} f \Rightarrow \nabla f(\bar{x}) = 0$

$g = \nabla f \quad g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$
on cherche $\bar{x}$ tq $\nabla f(\bar{x}) = 0$

Méthode de Newton pour minimiser f $\qquad g = \nabla f$

initialisation	: $x_0 \in \mathbb{R}^N$
itération	: $Dg(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -g(x_n)$
c.a.d	$H(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -\nabla f(x_n)$
	$Dg(x_n) = H(x_n) \in \mathbb{R}^{N,N}$ Hessien de f en x_n
	$D^2 f(x_n) = H(x_n)$

Avantage :
CV quadratique : $\|x_{n+1} - x\| \leq M \|x_n - x\|^2$
(Rappel : Algo du gradient :
$\|x_{n+1} - x\| \leq \beta \|x_n - x\|$
$\beta < 1$)

Inconvénients :
- Calcul de $H(x_n) = D^2 f(x_n)$
- Résolution d'un système linéaire

NB : Newton pour minimiser une fonct. quadra.
$A \in \mathbb{R}^{N,N}$
$b \in \mathbb{R}^N \qquad f(x) = \frac{1}{2} Ax.x - b.x \qquad A$ sdp.
$\nabla f(x) = Ax - b$
$H(x) = A$
Newton : initi. : $x_0 \in \mathbb{R}^N$
1ère itération : $A(x_1 - x_0) = b - Ax_0$
$Ax_1 = b$

NB : Newton comme une méthode de descente : || hors remarque

$H(x_n)(x_{n+1}-x_n) = -\nabla f(x_n)$

$x_{n+1} = x_n + (H(x_n))^{-1}(-\nabla f(x_n))$

f strictement convexe : $(f(\bar{x}) \leq f(x)\ \forall x \Leftrightarrow \nabla f(\bar{x}) = 0)$

(on suppose $H(x)$ sdp $\forall x$)

$H(x_n)$ sdp

on suppose $\nabla f(x_n) \neq 0$

alors $w_n = H(x_n)^{-1}(-\nabla f(x_n))$ est une direction de descente stricte en x_n

et donc Newton est une méthode de descente.

$x_{n+1} = x_n + \rho_n w_n$

$\begin{cases} w_n \text{ est une d.d.s. en } x_n \\ \rho_n = 1 \end{cases}$

démonstration de w_n dds :

Rappel : on a vu que $w_n \cdot \nabla f(x_n) < 0 \Rightarrow w_n$ est une dds en x_n

comme $H(x_n)$ est sdp on a :

$H(x_n)^{-1} = K_n$ est aussi sdp

$w_n = -K_n \nabla f(x_n)$

$w_n \cdot \nabla f(x_n) = -(K_n \nabla f(x_n)) \cdot \nabla f(x_n) < 0$

car K_n sdp

$\nabla f(x_n) \neq 0$

c) Méthode de quasi Newton :

Newton : $x_{n+1} = x_n + \rho_n w_n$

$\begin{cases} w_n = -(H(x_n))^{-1}(\nabla f(x_n)) \\ \rho_n = 1 \end{cases}$

- $1^{ère}$ idée de quasi-Newton :

$W_n = -(B_n)^{-1}(\nabla f(x_n))$

$\Rightarrow B_n$ "proche" de $H(x_n)$

sans calculer $H(x_n)$

$\to \rho_n$ + ou − optimal dans la direction W_n

condition suffisante pour que la méthode reste une méthode de descente :

B_n sdp $\Rightarrow W_n$ est une dds en x_n

Pb : Comment trouver B_n ?

- $2^{ème}$ idée de quasi-Newton :

x_n, x_{n+1} connus

$\nabla f(x_n)$, $\nabla f(x_{n+1})$ connus.

x_{n+1} "proche" de x_n

$\nabla f(x_{n+1}) - \nabla f(x_n) \simeq H(x_n)(x_{n+1}-x_n)$

ceci donne une information sur $H(x_n)$ dans la direction $x_{n+1}-x_n$

équation de quasi-Newton : $\boxed{\nabla f(x_{n+1}) - \nabla f(x_n) = B_{n+1}(x_{n+1}-x_n)}$

(Q.N.)

dans la suite, on prendra B_{n+1} satisfaisant (Q.N.)

(B_{n+1} servira pour trouver x_{n+2})

(Q.N.) donne une information sur B_{n+1} dans 1 direction

que faire pour obtenir B_{n+1} partout ?

Algo. de Broyden :

B_n connu : x_n, x_{n+1} connus $\left(x_{n+1} = x_n + \rho_n \underbrace{(B_n)^{-1}(-\nabla f(x_n))}_{W_n}\right)$

$(B_n(x_{n+1}-x_n) = -\rho_n \nabla f(x_n))$

B_{n+1} satisfait

1) (Q.N.)

2) $B_{n+1} = B_n$ sur $(\underbrace{x_{n+1} - x_n}_{\in \mathbb{R}^N})^\perp$ = S.e.V. de $\mathbb{R}^N$ de dimN.

$B_{n+1} = B_n$

$S_n = (x_{n+1} - x_n)$

$y_n = \nabla f(x_{n+1}) - \nabla f(x_n)$

$B_{n+1} S_n = y_n$

$B_{n+1} S = B_n S$ si $S . S_n = 0$

(B) $$B_{n+1} = B_n + \frac{\overbrace{(y_n - B_n S_n)}^{\mathbb{R}^{N,1}} \overbrace{S_n^t}^{\mathbb{R}^{1,N}}}{S_n . S_n} = B_n + \frac{\overbrace{(y_n - B_n S_n) S_n^t}^{\in \mathbb{R}^{N,N}}}{\underbrace{S_n^t S_n}_{\in \mathbb{R}}}$$

$$B_{n+1} S_n = B_n S_n + \frac{(y_n - B_n S_n) S_n^t S_n}{S_n^t S_n} = y_n$$

$$B_{n+1} S = B_n S + \frac{(y_n - B_n S_n) S_n^t S_n}{S_n^t S_n} = B_n S \quad \text{si} \quad \underbrace{S \perp S_n}_{S_n^t S = 0}$$

<u>Algo. de Broydon :</u>

<u>initialisation</u> : x_0 qq $B_0 = Id$, $W_0 = - B_0 (\nabla f(x_0))$

ρ_0 optimal dans W_0

$x_1 = x_0 + \rho_0 W_0$

<u>itération</u> : x_0 — x_{n+1} connus

B_0 — B_n connues

calcul de B_{n+1} avec (B)

$(B_n, S_n = x_{n+1} - x_n, y_n = \nabla f(x_{n+1}) - \nabla f(x_n))$

$W_{n+1} = - (B_{n+1})^{-1} (\nabla f(x_{n+1}))$

$x_{n+2} = x_{n+1} + \rho_{n+1} W_{n+1}$

ρ_{n+1} optimal dans la direction W_{n+1}

Avantages :

→ $\bar{B}_n$ "proche" de $H(x_n)$

→ pas de calcul de $H(x_n)$

(calcul de ∇f)

Inconvénients :

B_n s.d.p. $\not\Rightarrow$ B_{n+1} sdp

W_{n+1} n'est pas nécessairement une direction de descente.
Plus précisément, B_n sym. $\not\Rightarrow$ B_{n+1} symétrique.

- 3ème idée : conserver la sym. de B_n

n fixé, B_n connu, s_n, y_n connus

Trouver B_{n+1}

$C_n = \{ B \in \mathbb{R}^{N,N} \text{ tq } B s_n = y_n,\ B \text{ sym.} \}$

On munit $\mathbb{R}^{N,N}$ d'une norme $\|\cdot\|$

B_{n+1} t.q. $\begin{cases} B_{n+1} \text{ tq } \|B_{n+1} - B_n\| \leq \|B - B_n\| \quad \forall B \in C_n \\ B_{n+1} \in C_n \end{cases}$ déf. de la projection de B_n sur C_n (→ licence)

$J_n(B) = \|B - B_n\|$, $B_{n+1} \in \underset{C_n}{\operatorname{argmin}}\, J_n$

Si on prend une norme induite par un produit scalaire

$B_{n+1} = \underbrace{P_{C_n}}_{\text{projection sur un convexe fermé (→ cours licence)}} B_n$ donc B_{n+1} existe et est unique si C_n est fermé

Ce qui est toujours vrai

donc B_{n+1} existe et est unique.

Il y a plusieurs choix possibles pour la norme sur $\mathbb{R}^{N,N}$.

Algo. de B.F.G.S. (correspondant à un choix "astucieux" de la norme sur $\mathbb{R}^N$)

B_n, y_n, δ_n <u>connus</u>

$$B_{n+1} = B_n + \frac{\overbrace{y_n y_n^t}^{\in \mathbb{R}^{N,N}}}{\underbrace{\delta_n^t y_n}_{\in \mathbb{R}}} - \frac{\overbrace{\overset{\mathbb{R}^{N,N}}{B_n}\ \overset{N,1}{y_n}\ \overset{1,N}{y_n^t}\ \overset{N,N}{B_n}}^{\in \mathbb{R}^{N,N}}}{\underbrace{\delta_n^t}_{\in \mathbb{R}^{1,N}} \underbrace{B_n \delta_n}_{\mathbb{R}^{N,1}}} \in \mathbb{R} \qquad \text{(BFGS)}$$

NB : 1) B_n sym. $\Rightarrow B_{n+1}$ sym.

$(y_n y_n^t)^t = y_n y_n^t$

$$(B_n y_n y_n^t B_n)^t = B_n^t y_n y_n^t B_n^t = B_n y_n y_n^t B_n$$

2) On peut montrer, en supposant B_n sdp et $\delta_n \neq 0$

on a $y_n \neq 0$

B_{n+1} sdp

(en particulier B_{n+1} est bien défini, c.à.d $\underbrace{\delta_n^t y_n \neq 0}_{\text{facile}}$

et $\underbrace{\delta_n^t B_n \delta_n \neq 0}_{\text{évidents}}$)

$$\delta_n^t y_n = (x_{n+1} - x_n / \nabla f(x_{n+1}) - \nabla f(\ldots$$

$$= -\Big(\rho_n \underbrace{B_n^{-1}(\nabla f(x_n))}_{w_n} \Big/ \nabla f(x_{n+1}) - \nabla f(\ldots$$

$$= \underbrace{\rho_n}_{\neq 0} \underbrace{\left(B_n^{-1} \nabla f(x_n) / \nabla f(x_n)\right)}_{\neq 0} > 0$$

<u>Algo. de BFGS</u>

<u>initi.</u> x_0 qq, $B_0 = Id$, $w_0 = -B_0^{-1}(\nabla f(x_0))$

ρ_0 optimal dans la direct. w_0, $x_1 = x_0 + \rho_0 w_0$

<u>itéra.</u> $x_0, \ldots x_{n+1}$ connus

$B_0, \ldots, B_n$ —

calcul $\delta_n = x_{n+1} - x_n$
$y_n = \nabla f(x_{n+1}) - \nabla f(x_n)$

B_n, y_n, δ_n connus
On calcule B_{n+1} par (BFGS)
ρ_{n+1} optimal dans la direction $W_{n+1} = -(B_{n+1})^{-1}(\nabla f(x_{n+1}))$
$x_{n+2} = x_{n+1} + \rho_{n+1} W_{n+1}$

NB : $x_{n+2} - x_{n+1} = -\rho_{n+1} B_{n+1}^{-1}(\nabla f(x_{n+1}))$

$B_{n+1}(W_{n+1}) = -\nabla f(x_{n+1})$ résolution d'un syst. linéaire

$x_{n+2} - x_{n+1} = \rho_{n+1} W_{n+1}$

Théorème (Powell, 1976)

$f \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$
$f(x) \to +\infty$ qd $\|x\| \to +\infty$
f strict. convexe
(on a donc $\exists! \bar{x}$, $f(\bar{x}) \leq f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^N$)
B_0 sdp (qq)
x_0 qq
On construit $(x_n)_n$ par l'algo. de BFGS avec ρ_n choisi de manière à respecter la règle de Wolfe.

Alors $x_n \to \bar{x}$ qd $n \to \infty$

Si 1) $H(\bar{x})$ sdp
2) $x \longmapsto H(x)$ est localement lipschitzienne
$\mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^{N,N}$

Alors la convergence est "superlinéaire"
(c.à.d $\dfrac{\|x_{n+1} - x\|}{\|x_n - x\|} \to 0$ qd $n \to \infty$

ceci est mieux que linéaire $\left(\frac{\|x_{n+1} - x\|}{\|x_n - x\|} \longrightarrow \beta > 0 \right)$

. mais moins que quadratique $\left(\frac{\|x_{n+1} - x\|}{\|x_n - x\|^2} \longrightarrow \beta \right)$

Dém (admis)

4) Méthodes directes

$f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ (continue)
on cherche $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$, $f(\bar{x}) \leq f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^N$

Algorithme sans calculer grad $f(x)$

deux solutions
1 - choisir w_n "a priori"
2 - choix stochastique de w_n

① Méthode de relaxation

$f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Pour passer de $x^{(n)}$ à $x^{(n+1)}$ on résout N problèmes de minimisation unidimensionnels

$$\to \quad f\left(x_1^{(n+1)}, \dots, x_{i-1}^{(n+1)}, x_i^{(n+1)}, x_{i+1}^{(n)}, \dots, x_N^{(n)}\right) \leq f\left(x_1^{(n+1)}, \dots, x_{i-1}^{(n+1)}, \theta, x_{i+1}^{(n)}, \dots, x_N^{(n)}\right)$$

$\forall \theta \in \mathbb{R}$

NB : • $f(x) = \frac{1}{2} Ax \cdot x - b \cdot x$ $\quad A \in \mathbb{R}^{N,N}$, $b \in \mathbb{R}^N$

A sdp , l'algo précédent est l'algorithme de Gauss . Seidel

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} \searrow & \\ & \end{bmatrix}}_{M} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{N} \qquad A = M - N$$

$M x^{(n+1)} = N x^{(n)} + b$ (exercice)

- l'algo précédent peut <u>ne pas converger</u>, même si f est strict. convexe et $f(x) \to +\infty$ qd $\|x\| \to \infty$.

<u>Théorème</u> (de convergence)

$f \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$
f strict. convexe et $f(x) \longrightarrow +\infty$ qd $\|x\| \longrightarrow +\infty$
(donc $\exists! \, \bar{x}$, $f(\bar{x}) \leq f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^N$)

On a alors $x^{(n)} \longrightarrow \bar{x}$ qd $n \to +\infty$
avec $x^{(n)}$ donné par l'algo. de relaxation

② <u>Algorithme de sur et sous-relaxation</u>

$w \in]0, 2[$ paramètre

itération : passage de $x^{(n)}$ à $x^{(n+1)}$

1) on calcule $\tilde{x}^{(n+1)}$ par l'algo. de relaxation
2) $x^{(n+1)} = x^{(n)} + w\left(\tilde{x}^{(n+1)} - x^{(n)}\right) = w\tilde{x}^{(n+1)} - (1-w)\, x^{(n)}$

$w = 1 \Rightarrow$ relaxation
$w > 1 \to$ sur relaxation
$w < 1 \to$ sous relaxation

NB : • la sur-relaxation $(w > 1)$ est utilisée lorsque f est une fonctionnelle quadratique (c.à.d pour résoudre $Ax = b$)
(ex : $w = 1,8$)
S.O.R (pour accélérer la CV)
variante : SSOR

- La sous relaxation est utilisée pour des pb fortement non linéaires (pour obtenir la convergence)

OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES

I Théorèmes d'existence, d'unicité, conditions d'optimalité

1°) Problème général

$f : E \to \mathbb{R}$ E Banach (ou simplement $f : K \to \mathbb{R}$)

$K \subset E$

On cherche $\bar{x} \in K$ tq. $f(\bar{x}) \leq f(x)$ $\forall x \in K$

Cas particuliers :

a) $g : E \to G$ G espace de Banach

$c \in G$

$K = \{x \in E, \ g(x) = c\}$ (contraintes "égalités")

(th. des multiplicateurs de Lagrange)

b) $g : E \to \mathbb{R}^p$ $g = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_p \end{bmatrix}$

$K = \{x \in E, \ g_i(x) \leq 0, \ \forall i \in \{1, \dots, p\}\}$ (contraintes inégalités)

(thm. de Kuhn-Tucker)

c) K convexe

Notations

$E = \mathbb{R}^N$ $\dim E < +\infty$

a) programmation linéaire :

$f(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i$ $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N$

$\alpha_1, \dots, \alpha_N$ sont données.

$K = \{x \in \mathbb{R}^N,\ g_i(x) \leq d_i,\ i \in \{1,\dots,p\}\}$

$d_1, \dots, d_p \in \mathbb{R}$ donnés $\qquad g_i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

$g_i(x) = \sum_{j=1}^{N} c_{ij} x_j \quad \forall i \in \{1,\dots,p\}$

$c_{ij} \in \mathbb{R}$ donné $\forall i \forall j \qquad g = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_p \end{bmatrix} \qquad g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^p$

il y a p contraintes linéaires de type "inégalité"

Méthode du "simplexe" (Dantzig $\simeq$ 1950)

b) <u>Programmation quadratique</u>

$A \in \mathbb{R}^{N,N},\ b \in \mathbb{R}^N$

$f(x) = \frac{1}{2} Ax.x - b.x$

$K = \{x \in \mathbb{R}^N;\ \sum_{j=1}^{N} c_{ij} x_j \leq d_i,\ \forall i \in \{1,\dots,n\}\}$

c_{ij}, d_i donnés.

c) <u>programmation convexe</u>

f convexe, K convexe

$g = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_p \end{bmatrix},\ K = \{x \in \mathbb{R}^N,\ g_i(x) \leq 0\ \forall i\}$

g_i convexes.

<u>Exemples</u> :

- Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$

  $E = H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega),\ D_i u \in L^2(\Omega),\ i \in \{1,\dots,N\}\}$

  définition de $D_i u$: $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\langle D_i u, \varphi \rangle = -\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx$

  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

NB : si $u \in C^1(\Omega)$

$\langle D_i u, \varphi \rangle = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi$

on dit que $D_i u \in L^2$ si $\exists f_i \in L^2$ tq $\langle D_i u, \varphi \rangle = \int_\Omega f_i \varphi \, dx$ $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

(NB : un tel f_i est unique
→ on confond $D_i u = f_i$)

$\boxed{C_c^\infty(\Omega) \subset H^1(\Omega)}$

$$\boxed{\|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_2^2 + \sum_{i=1}^{N} \|D_i u\|_2^2}$$

H^1 est un espace de Hilbert.

$H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{H^1}$, $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert

NB : $u \in H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$
alors $u = 0$ sur $\partial\Omega$

ex : $g \in L^2(\Omega)$

$$f(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega g.u \, dx$$

$K = \{ u \in H_0^1(\Omega), \ u \geq \psi \ \text{pp} \}$

$\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ donné

(à rattraper)

c) Problème des moindres carrés

On cherche $a \in K$

$K = \{a \in L^{\infty}_{\Omega}(\Omega) \; ; \; \alpha \leq a \leq \beta\}$

$\alpha, \beta > 0$ Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, $J(a) \leq J(b) \; \forall b \in K$

t.q. $J(a) \leq J(b) \quad \forall b \in K$

déf de J : $(E) \begin{cases} -\operatorname{div}(a \operatorname{grad} u) = f & \text{dans } \Omega \\ a \operatorname{grad} u \cdot n = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$

n = normale à $\partial\Omega$ extérieure à Ω

f et g donnés t.q. $\int_{\Omega} f \, dx + \int_{\partial\Omega} g \, d\sigma = 0$

On sait que si $a \in K$, (E) admet une et une seule solution u_a tq $\int_{\Omega} u_a \, dx = c$

On suppose connu (mesuré)

$u^{(m)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$J(a) = \int_{\Omega} (u^{(m)} - u_a)^2 \, d = c$

2°) Théorème d'existence et d'unicité

a) Théorèmes d'existence

Théorème (dim E < ∞)

E e.v.n. de dimension finie

$f : E \to \mathbb{R}$ continue

$K \subset E$

On suppose 1) $f(x) \to +\infty$ qd $\|x\| \to +\infty$
et K fermé

ou

2) K fermé borné, $K \neq \emptyset$

Alors il existe $\bar{x} \in K$; $f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in K$

$(\bar{x} \in \underset{K}{\operatorname{argmin}} f)$

démonstration

Soit $(x_n)_n \subset K$ tq $f(x_n) \to \inf_K f$

cas 1) : On montre $(x_n)_n$ borné (car $f(x) \to +\infty$ qd $\|x\| \to +\infty$)
on peut donc supposer, après extraction d'une ss-suite encore notée $(x_n)_n$
que $(x_n)_n$ cv, on a donc $x_n \to x$ qd $n \to +\infty$
K est fermé, on a donc $x \in K$
et donc $\begin{cases} f(x) = \inf_K f \\ x \in K \end{cases}$

cas 2) : On montre $(x_n)_n$ borné (car K borné), puis ĉ ds cas 1)

Théorème (dim $E = +\infty$)

E Banach réflexif (par ex. un Hilbert)
$f : E \to \mathbb{R}$ continue, convexe
on suppose :

1) $f(x) \to +\infty$ qd $\|x\| \to +\infty$
K fermé et convexe, non vide

ou

2) K fermé borné et convexe, non vide

alors $\exists \bar{x} \in K$, $f(\bar{x}) \leqslant f(x)$ $\forall x \in K$

Par rapport à dim $< \infty$ on a du rajouter des conditions de convexité et E réflexif

démonstration

Soit $(x_n)_n \subset K$; $f(x_n) \to \inf_K f$
On remarque que $(x_n)_n$ est borné
(immédiat dans le cas 2) car K est borné
(trivial — — 1) car $f(x) \to +\infty$ qd $\|x\| \to +\infty$
Comme E est réflexif, on peut supposer, après extraction d'une ss-suite

encore noté $(x_n)_n$, que $(x_n)_n$ converge faiblement.
c.a.d $x_n \to x$ dans E faible.
(i.e. $T(x_n) \to T(x)$ $\forall T \in E'$)

Pb : 1) $x \in K$?
2) $f(x) = \inf_K f$?

Lemme (Mazur) (cf. Analyse Fonct.)

$\exists (y_k)_k$ tq 1) $y_k \to x$ dans E (ie. $\|y_k - x\| \to 0$)
2) y_k est combinaison convexe de $\{x_i, i \geq k\}$
c.a.d $y_k = \sum_{i=0}^{N_k} \alpha_{k,i} x_{k+i}$
et $\alpha_{k,i} \geq 0$ et $\sum_{i=0}^{N_k} \alpha_{k,i} = 1$

Comme K est convexe et $(x_n)_n \subset K$ on a $y_n \in K$ $\forall n$
$y_n \to x$ qd $n \to +\infty$
et K fermé, on a donc $x \in K$

$$(*)\, f(y_k) = f\left(\sum_{i=0}^{N_k} \alpha_{k,i} x_{k+i}\right) \leqslant \sum_{i=0}^{N_k} \alpha_{k,i} f(x_{k+i}) \quad \text{car } f \text{ convexe.}$$

Comme $f(x_n) \to \inf_K f$ on en déduit que
$f(x) = \lim_k f(y_k) \leqslant \inf_K f$
car f continue

et donc, comme $x \in K$, $f(x) = \operatorname{Inf}_K f$

En effet, si $\inf_K f > -\infty$, comme $f(x_n) \to \operatorname{Inf}_K f = \alpha$
Soit $\varepsilon > 0$ $\exists$ n_0 tq $n \geq n_0 \Rightarrow f(x_n) \leqslant \alpha + \varepsilon$

Si $k \geq n_0$ on a donc par $(*)$ $f(y_k) \leqslant \sum_{i=0}^{N_k} \alpha_{k,i} (\alpha + \varepsilon) \leqslant \alpha + \varepsilon$

En faisant $k \to +\infty$ on a donc $f(x) \leq \alpha + \varepsilon$ $\quad \underline{\forall \varepsilon > 0}$
et donc $f(x) \leq \alpha = \inf_K f$

<u>NB</u> : Si $\inf_K f = -\infty$, un raisonnement semblable montre que $f(x) \leq A$ $\forall A \in \mathbb{R}$
et donc $f(x) = -\infty$, impossible.

<u>Rappel</u> : Le théorème précédent est <u>faux</u> si E est <u>non réflexif</u> (ex : $E = W^{1,1}(\Omega)$)
$f(u) = \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2}\, dx$ $\quad$ f est <u>continue convexe</u>

$K = \{u \in E,\ u|_{\partial\Omega} = g\}$ $\quad$ g <u>donné</u>
K convexe fermé
$f(u) \to +\infty$ qd $\|u\| \to \infty$
on peut trouver Ω et g tq $\nexists u \in K$, $f(u) \leq f(v)$ $\forall v \in K$
(vu en TD)

Bien

<u>NB</u> : 1) Le caractère réflexif de E est utilisé pour extraire de $(x_n)_n$ une sous-suite <u>faiblement convergente</u>
(Le lemme de Mazur est vrai dans <u>tous les Banach</u>)

2) Que faire si <u>K est non convexe</u> ?
E Banach réflexif, $f : E \to \mathbb{R}$ continue, convexe, $f(x) \to +\infty$ qd $\|x\| \to +\infty$
$K = \{u \in E,\ g(u) = c\}$
$c \in \mathbb{R}$ <u>donné</u> et $g \in C(E, \mathbb{R})$

K est fermé (car g est continue)
K est <u>non convexe</u> (sauf si $g(u) = T(u) + b$ $\quad T \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$)
Le th. précédent ne marche donc pas.

Soit $(u_n)_n \subset K$, $f(u_n) \to \inf_K f$
$(u_n)_n$ est borné (car $f(u) \to +\infty$ qd $\|u\| \to +\infty$)

On peut supposer que $u_n \to u$ dans E faible
on a (comme dans le th.) $f(u) \leq \inf_K f$

il reste à montrer $u \in K$ (les "u_n" construits dans le th. ne sont pas forcément dans K)

On peut conclure si g est séquentiellement continue pour la topologie faible de E, (c.à.d $u_n \to u$ ds E faible $\Rightarrow g(u_n) \to g(u)$)
En effet $u_n \in K$ donc $g(u_n) = c \ \forall n$
$u_n \to u$ dans E faible
et donc $g(u_n) \to g(u)$
on a donc $g(u) = c$, donc $u \in K$

Théorème

> E Banach réflexif
> $f : E \to \mathbb{R}$ continue, convexe
> $f(u) \to +\infty$ qd $\|u\| \to +\infty$
> $g : E \to \mathbb{R}$ continue, $c \in \mathbb{R}$, $K = \{u \in E,\ g(u) = c\}$
>
> On suppose g séquentiellement continue pour la topologie faible de E
>
> Alors $\exists \bar{u} \in K$, $f(\bar{u}) \leq f(u) \quad \forall u \in K$

démonstration
(vu ds la remarque précédente)

Exemple : $E = H_0^1(\Omega)$
$g(u) = \int_\Omega u^2(x)\,dx$, alors on peut montrer (th. de Rellich) que

$u_n \to u$ dans H_0^1 faible $\Rightarrow u_n \to u$ dans L^2

et donc $u_n \rightharpoonup u$ H_0^1 faible $\Rightarrow g(u_n) \to g(u)$

g est donc séquentiellement continue pour la topologie faible.

$$f(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx$$

f continue convexe sur $H_0^1(\Omega)$

$f(u) \to +\infty$ qd $\|u\| \to \infty$

$\exists$ donc $\bar{u} \in K = \{v \in H_0^1, \|v\|_2 = 1\} = \{v \in H_0^1, g(v) = 1\}$

t.q. $f(\bar{u}) \leq f(u)$ $\forall u \in K$

Théorème (unicité)

> E evn
>
> $K \subset E$, K convexe
>
> $f : E \to \mathbb{R}$, continue et strictement convexe
>
> Alors $\exists$ au plus un $\bar{x} \in K$ tq $f(\bar{x}) \leq f(x)$ $\forall x \in K$

démonstration

$\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in K$ tq $f(\bar{x}_1) = f(\bar{x}_2) = \inf_K f$

$$f\left(\frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{2}\right) < \frac{1}{2} f(\bar{x}_1) + \frac{1}{2} f(\bar{x}_2) = \inf_K f$$

$\in K$ ← Pourquoi ?

Si $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$

impossible (car $f(\bar{x}) < \inf_K f \leq f(\bar{x})$)

3°) Condition d'optimalité, K convexe

Théorème

> E evn, $f : E \to \mathbb{R}$ continue
> $K \subset E$ K convexe
>
> On suppose $\exists \bar{x} \in K$, $f(\bar{x}) \leq f(x)$ $\forall x \in K$
> et f différentiable en $\bar{x}$
>
> Alors $Df(\bar{x})(x - \bar{x}) \geq 0$ $\forall x \in K$

démonstration

K convexe, f diff. en $\bar{x}$.

$$f(y) = f(\bar{x}) + Df(\bar{x})(y - \bar{x}) + \|y - \bar{x}\| \, \varepsilon(y - \bar{x})$$

Soit $x \in K$ (fixé)

$y = \bar{x} + t(x - \bar{x})$, $t \in]0, 1[$

$y = t\underbrace{x}_{\in K} + (1-t)\underbrace{\bar{x}}_{\in K} \in K$, $f(y) \geq f(\bar{x})$

$$f(\bar{x}) \leq f(\bar{x}) + Df(\bar{x})\big(t(x - \bar{x})\big) + t\|x - \bar{x}\| \, \varepsilon\big(t(x - \bar{x})\big)$$

$$0 \leq t \, Df(\bar{x})(x - \bar{x}) + t\|x - \bar{x}\| \, \varepsilon(t)$$

qd $t \to 0$ on en déduit :

$$Df(\bar{x})(x - \bar{x}) \geq 0 \quad \forall x \in K$$

NB :

1) si f est Gateaux. dérivable, le th. est encore vrai, c.à.d :

$$D_G f(\bar{x})(x - \bar{x}) \geq 0 \quad \forall x \in K$$

Si f admet seulement des dérivées directionnelles

on a $f'_{(x-\bar{x})}(\bar{x}) \geq 0$ $\forall x \in K$

2) Le th. est encore vrai si on remplace $f(\bar{x}) \leq f(x)$ $\forall x \in K$
par $\exists \varepsilon > 0$ tq $f(\bar{x}) \leq f(x)$ $\forall x \in K \cap B(\bar{x}, \varepsilon)$

3) <u>Si</u> $\bar{x} \in \overset{\circ}{K}$, f diffé. en $\bar{x}$
$f(\bar{x}) \leq f(x)$ $\forall x \in K$
$\bar{x} \in K$

<u>Alors</u> $Df(\bar{x}) = 0$

<u>démonstration</u> :

$\exists \epsilon > 0, B(\bar{x}, \epsilon) \subset K$ (car $\bar{x} \in \overset{\circ}{K}$)
Soit $y \in E, y \neq 0$, $\bar{x} + t\frac{y}{\|y\|} \in K$ si $t \in]0, \epsilon[$
$f(\bar{x} + t\frac{y}{\|y\|}) \geq f(\bar{x})$

$$\frac{1}{\|y\|} Df(\bar{x})(y) + \varepsilon(t) \geq 0 \qquad \forall t \in]0, \epsilon[$$

qd $t \to 0$ on en déduit $Df(\bar{x})(y) \geq 0$ $\forall y \in E$
En changeant y en $-y$ on a donc aussi
$-Df(\bar{x})(+y) \geq 0$
$Df(\bar{x})(y) = 0$ $\forall x \in E$
$Df(\bar{x}) = 0$

4) $g_i : E \to \mathbb{R}$ Convexes et continues $\forall i \in \{1, .., p\}$
$K = \{u \in E, g_i(u) \leq 0, \forall i \in \{1, .., p\}\}$
K est convexe (car g_i convexe)
f diff. en $\bar{x}$, $f(\bar{x}) \leq f(x)$ $\forall x \in K$
$\bar{x} \in K$

1er cas : $g_i(\bar{x}) < 0$ $\forall i \in \{1, .., p\}$
on a alors $\bar{x} \in \overset{\circ}{K}$ (exacte)
et donc $Df(\bar{x}) = 0$

$2^{ème}$ cas : $I = \{ i \in \{1, \dots, p\} \ / \ \underline{g_i(\bar{x}) = 0} \} \neq \emptyset$

Le th. précédent s'applique.

$$Df(\bar{x})(x - \bar{x}) \geq 0 \quad \forall x \in K$$

On montrera plus tard (Kuhn-Tucker sous des hypothèses convenables),
$\exists (\lambda_i)_{i \in I} \ / \ \underline{\lambda_i \geq 0 \ \forall i}$ et $Df(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i Dg_i(\bar{x}) = 0$

4°) Condition d'optimalité, contraintes égalités

Soient H et G 2 esp. de Banach (réel)

Soient $f : H \to \mathbb{R}$ continue

$g : H \to G$

$c \in G$

$K = \{ u \in H \ ; \ g(u) = c \}$

NB : K est non convexe (sauf si g est affine)

$$(1) \quad \begin{cases} \bar{u} \in K \\ f(\bar{u}) \leq f(u) \quad \forall u \in K \end{cases}$$

Multiplicateurs de Lagrange :

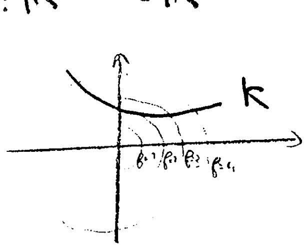
On va montrer que (ss des hyp. convenables) :

u sol. de (1) $\Rightarrow \exists \Lambda \in G' \ / \ Df(\bar{u}) + \Lambda \circ Dg(\bar{u}) = 0$

ex : $H = \mathbb{R}^2 \quad G = \mathbb{R}$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad c \in \mathbb{R} \qquad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

courbes de niveaux de f



$K = \{ u \in \mathbb{R}^2 \ ; \ g(u) = c \}$

$$\begin{cases} \bar{u} \in K \\ f(\bar{u}) \leq f(u) \quad \forall u \in K \end{cases}$$

Au point $\bar{u}$, les courbes de niveau de f et de g sont tangentes (en $\bar{u}$)

$\Rightarrow$ en $\bar{u}$, les normales aux courbes de niveau de f et g sont $//$.

<u>NB</u> : $g(u) = c$ $\qquad u \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto u(t) \end{cases}$

$g(u(t)) = c \quad \forall t$

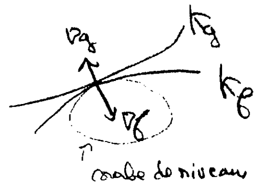
$\nabla g(u(t)) \cdot u'(t) = 0$ et $\overset{?}{u'(t) = \tan}$ à $\{g(u) = c\}$ (courbe de niveau

$\Rightarrow \nabla g(\bar{u}) \perp K$ en $\bar{u}$

de même $\nabla f(\bar{u}) \perp \{f = f(\bar{u})\}$

alors $\nabla f(\bar{u}) \, // \, \nabla g(\bar{u})$

$\Rightarrow$ si $\nabla g(\bar{u}) \neq 0$, $\exists \lambda \in \mathbb{R} \, / \, \nabla f(\bar{u}) = \lambda \nabla g(\bar{u})$



<u>Théorème</u> <u>Multiplicateurs de Lagrange</u>

Soient E e.v.n

F, G deux esp. de Banach

Soient $f : E \times F \to \mathbb{R}$ <u>continue</u>

et $g : E \times F \to G$ $\underline{\underline{\mathcal{C}^1}}$

Soient $c \in G$

$K = \{u \in E \times F \, ; \, g(u) = c\}$

Soit $\bar{u} \in K \, / \, f(\bar{u}) \leq f(u) \quad \forall u \in K$

(ou $\exists \varepsilon > 0 \, ; \, f(\bar{u}) \leq f(u) \quad \forall u \in K \cap B(\bar{u}, \varepsilon)$)

<u>Si</u> f est différentiable en $\bar{u}$

et $D_v g(\bar{u})$ $(\in \mathcal{L}(F,G))$ est bijective

<u>Alors</u> $\exists \Lambda \in G' \, / \, Df(\bar{u}) + \Lambda \circ Dg(\bar{u}) = 0$

<u>NB</u> : Comme F et G sont complets,

$D_y g(\bar{u})$ bijective $\Rightarrow$ $(D_y g(\bar{u}))^{-1} \in \mathcal{L}(G,F)$ (Th de Banach)

<u>Démonstration</u>

(on va appliquer le th. des fct implicites)

$\bar{u} \in K$ $f(\bar{u}) \leq f(u)$ $\forall u \in K \cap B(\bar{u}, \epsilon)$

on pose $\bar{u} = (\bar{x}, \bar{y})$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in E \times F$

$g(\bar{x}, \bar{y}) = c$ $K = \{(x,y) / g(x,y) = c\}$

On a $g \in C^1$ $D_y g(\bar{x}, \bar{y})$ lin. cont. inversible et d'inv. cont.

on applique le th. des fct. impl. :

$\exists \bar{\epsilon} > 0$, $\exists \rho > 0 / \forall x \in B(\bar{x}, \bar{\epsilon})$, $\exists ! \, y \in B(\bar{y}, \rho) / g(x,y) = c$

On note $\phi(x)$ cette valeur de y ($\phi : B_E(\bar{x}, \bar{\epsilon}) \to B_F(\bar{y}, \rho)$)

ϕ cont.

De plus, si g est différentiable en $(\bar{x}, \bar{y})$, ϕ est diff en $\bar{x}$ et

$D\phi(\bar{x}) = -(D_y g(\bar{x}, \bar{y}))^{-1} \circ D_x g(\bar{x}, \bar{y})$

$x \in B_E(\bar{x}, \bar{\epsilon})$

$\tilde{f}(x) = f(\underbrace{x, \phi(x)}_{\in K}) \geqslant f(\bar{x}, \bar{y})$ si $x \in B(\bar{x}, \eta)$, $\eta > 0$ de manière à ce que $(x, \phi(x)) \in B(\bar{u}, \epsilon)$

$\forall x \in B_E(\bar{x}, \eta)$, $\tilde{f}(x) \geq \tilde{f}(\bar{x})$ (donne le minim. loc. sans contrainte)

Comme f est diff en $\bar{u}$, on a $\tilde{f}$ diff en $\bar{x}$

et la cond. nécessaire d'optimalité <u>sans</u> contrainte donne $D\tilde{f}(\bar{x}) = 0$

$\tilde{f}(x) = f(x, \phi(x))$

$D\tilde{f}(\bar{x}) = D_x f(\bar{x}, \bar{y}) + D_y f(\bar{x}, \bar{y}) \circ D\phi(\bar{x}) = 0$

$$D_x f(\bar{u}) + \underbrace{(\underbrace{-D_y f(\bar{u})}_{\in \mathcal{L}(F,\mathbb{R})} \circ \underbrace{(D_y g(\bar{u}))^{-1}}_{\in \mathcal{L}(G,F)})}_{\Lambda \in \mathcal{L}(G,\mathbb{R}) = G'} \circ D_x g(\bar{u}) = 0$$

On a donc $D_x f(\bar{u}) + \Lambda \circ D_x g(\bar{u}) = 0$

$$D_y f(\bar{u}) + \left(- D_y f(\bar{u}) \circ \underbrace{(D_y g(\bar{u}))^{-1} \circ D_y g(\bar{u})}_{id}\right) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} D_x f(\bar{u}) + \Lambda \circ D_x g(\bar{u}) = 0 \\ D_y f(\bar{u}) + \Lambda \circ D_y g(\bar{u}) = 0 \end{array}\right\} Df(\bar{u}) + \Lambda \circ Dg(\bar{u}) = 0$$

cqfd.

---

* Cas particulier :
  dim $G < \infty$: $G = \mathbb{R}^p$ $(p \geq 1)$
  on prend les m̂ hyp que dans le $\mathbb{R}$.

NB : $D_y g(\bar{u})$ bij. de F dans $\mathbb{R}^p \Rightarrow \dim F = p$

$$\exists \Lambda \in (\mathbb{R}^p)' \simeq (\mathbb{R}')^p \text{ tq } Df(\bar{u}) + \Lambda \circ Dg(\bar{u}) = 0$$

on a $g(\bar{u}) = \begin{pmatrix} g_1(\bar{u}) \\ \vdots \\ g_p(\bar{u}) \end{pmatrix} \Rightarrow Dg(\bar{u})(v) = \begin{pmatrix} Dg_1(\bar{u})v \\ \vdots \\ Dg_p(\bar{u})v \end{pmatrix}$ $\quad g : E\times F \to \mathbb{R}^p$, $Dg(\bar{u}) \in \mathcal{L}(E\times F$

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \subset \mathbb{R} \text{ tq } \Lambda \circ Dg(\bar{u})(v) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Dg_i(\bar{u})(v)$$

d'où le th. en dimension finie :

$$\boxed{\text{avec les hyp. du th précédent on a : } \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R} \,/\, Df(\bar{u}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Dg_i(\bar{u}) = 0}$$

Inconvénient :
il faut écrire $H = E \times F$

Corollaire

Soient H evn et $G = \mathbb{R}^p$ $(p \geq 1)$
Soient $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ continue
et $g : H \longrightarrow \mathbb{R}^p$. $g = (g_1, \dots, g_p)^t$, $g \in \mathcal{C}^1$
Soient $c \in G$ et $K = \{u \in H \,;\, g(u) = c\}$
Soit $\bar{u} \in K$ tq $\exists \varepsilon > 0$; $f(\bar{u}) \leq f(u)$ $\forall u \in K \cap B(\bar{u}, \varepsilon)$
On suppose f différentiable en $\bar{u}$
et $\operatorname{Im} Dg(\bar{u}) = \mathbb{R}^p$ $\quad (Dg(\bar{u}) \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R}^p))$

Alors $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \subset \mathbb{R}$ tq $\boxed{Df(\bar{u}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Dg_i(\bar{u}) = 0}$

démonstration

On se ramène au th. précédent, c.à.d on va décomposer H en $E \times F$.
$\operatorname{Im} Dg(\bar{u}) = \mathbb{R}^p$
$Dg(\bar{u}) \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R}^p)$
$\Rightarrow \exists F$ s.e.v. de H tq $Dg(\bar{u})|_F$ bij. de F sur $\mathbb{R}^p$
$(\Rightarrow \dim F = p)$

Construction de F :

Soit $\{e_1, \dots, e_p\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$
Soit $u_i \in H$ tq $Dg(\bar{u})(u_i) = e_i$ $\quad (\exists u_i$ car $\operatorname{Im} Dg(\bar{u}) = \mathbb{R}^p)$
On pose $F = $ e.v. $(u_1, \dots, u_p)$
engendré par

$\{u_1, \dots, u_p\}$ sont linéairement indépendants
$\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i\right)$

On a donc $\dim F = p$
et $Dg(\bar{u})$ surjection linéaire de F $(\dim F = p)$ dans $\mathbb{R}^p$
$\Rightarrow Dg(\bar{u})$ est une bijection de F ds $\mathbb{R}^p$

Soit E un supplémentaire algébrique de F

$\Rightarrow H = E \oplus F$

On définit $\bar{f}$ et $\bar{g}$ sur $E \times F$ par :

$$\bar{f}(x,y) = f(x+y) \quad \forall (x,y) \in E \times F$$
$$\bar{g}(x,y) = g(x+y)$$

Alors $D_x \bar{f}(x,y)(z) = Df(x+y)(z) \quad \forall z \in E$

$D_y \bar{f}(x,y)(z) = Dg(x+y)(z) \quad \forall z \in F$

de m. $D_y \bar{g}(x,y)(z) = Dg(x+y)(z) \quad \forall z \in F$

$$\bar{u} \in H \quad \begin{cases} f(\bar{u}) \leq f(u) & \forall u \in K = \{u \in H ;\, g(u) = c\} \\ \bar{u} \in K \end{cases}$$

On pose $\bar{K} = \{(x,y) \in E \times F \;;\; g(x+y) = c\}$

$\Rightarrow \bar{K} = \{(x,y) \in E \times F \;;\; \bar{g}(x,y) = c\}$

On pose $\bar{u} = \bar{x} + \bar{y} \quad \bar{x} \in E,\ \bar{y} \in F$

$\Rightarrow \bar{f}(\bar{x},\bar{y}) = f(\bar{u}) \leq f(u) \leq \bar{f}(x,y) \quad \forall (x,y) \in \bar{K} \quad (u = x+y \in K)$

$D_y g(\bar{x},\bar{y})$ inversible.

$D_y \bar{g}(\bar{x},\bar{y})(z) = Dg(\bar{u})(z), \quad z \in \underline{F}$

$D_y \bar{g}(\bar{x},\bar{y})$ est linéaire surjectif de F ds $\mathbb{R}^p$ et donc inversible.

Le th. précédent s'applique donc et donne :

$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \subset \mathbb{R}$ tq $D\bar{f}(\bar{x},\bar{y}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i D\bar{g}_i(\bar{x},\bar{y}) = 0$

$\Rightarrow \underbrace{D\bar{f}(\bar{x},\bar{y})(z)} + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i D\bar{g}_i(\bar{x},\bar{y})(z) = 0 \quad \forall z \in E$

$Df(\bar{u})(z) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Dg_i(\bar{u})(z_1) = 0 \quad \forall z_1 \in E$

de m. : $Df(\bar{u})(z_2) + \sum_{i=1}^{p} Dg_i(\bar{u})(z_2) = 0 \quad \forall z_2 \in F$

on a donc :

$$Df(\bar u)(z_1+z_2) + \sum \lambda_i Dg_i(\bar u)(z_1+z_2) = 0 \quad \forall (z_1, z_2) \in E\times F$$
$$\Rightarrow Df(\bar u) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Dg_i(\bar u) = 0$$

Cas particulier :

$H = \mathbb{R}^N \quad G = \mathbb{R}^p$

$f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ cont. $\quad g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^p \quad \mathcal{C}^1 \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_p \end{pmatrix}$

$c \in \mathbb{R}^p \quad K = \{u \in \mathbb{R}^N \,/\, g(u) = c\}$

On applique le corollaire

Soit $\bar u \in K$, $\exists \varepsilon > 0$; $f(\bar u) \leq f(u) \quad \forall u \in K \cap B(\bar u, \varepsilon)$

$\Im m\, \underbrace{Dg(\bar u)}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^p) \simeq \mathbb{R}^{p,N}} = \mathbb{R}^p$

c.à.d $\operatorname{rg} Dg(\bar u) = p$ (en particulier $p \leq N$) ← Nb de contraintes

Alors $\exists \lambda_1, \dots \lambda_p$ tq $Df(\bar u) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Dg_i(\bar u) = 0$

c.à.d $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar u) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\bar u) \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}$ (N relations)

Utilisation pratique :

$f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \quad g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^p \quad (p \leq N) \quad c \in \mathbb{R}^p \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}$ bien

On cherche $\bar u \in \mathbb{R}^N$, $\bar u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$ tq (1) $\begin{cases} \bar u \in K \\ f(\bar u) \leq f(u) \quad \forall u \in K \end{cases}$

On remplace (1) par : (2) $\begin{cases} g_i(\bar u) = c_i \quad i = 1, \dots, p & (p \text{ rel.}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar u) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\bar u) = 0 & (N \text{ rel.}) \end{cases}$ (alors une sol de (1) est sol de (2))

On a remplacé un pb de minimisation par un syst. de $(N+p)$ équ. avec $(N+p)$ inconnues

Rappel : H evn $\quad G = \mathbb{R}^p, \; c \in \mathbb{R}^p$

$f \in \mathcal{C}(H, \mathbb{R}), \quad g \in \mathcal{C}^1(H, \mathbb{R}^p) \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_p \end{pmatrix}$

$K = \{u \in H \,/\, g(u) = c\}$

Le th dit que si $\bar u \in$ argmin$_K f$, f Diff en $\bar u$ et $\Im m(Dg(\bar u)) = \mathbb{R}^p$

alors $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R} \,/\, Df(\bar u) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Dg_i(\bar u) = 0$

(existence des multiplicateurs de Lagrange.

• <u>Exemple 1</u> (Vibration d'un tambour) <u>bien</u>

Ω ouvert borné $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$
on cherche $\lambda \in \mathbb{R}$, u t.q. ① $\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$

Etape 1 : formulation faible de ② ② $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$

$$H^1(\Omega) = \{ u \in L^2(\Omega),\ D_i u \in L^2(\Omega)\ \ \forall i \in \{1,\dots,N\} \}$$

$$H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{H^1}, \quad \|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_2^2 + \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_2^2$$

$H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ sont des espaces de <u>Hilbert</u>

formulation faible de ②, $f \in L^2(\Omega)$:

③ $\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$

$$\nabla u(x) = \begin{bmatrix} D_1 u(x) \\ \vdots \\ D_N u(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

<u>NB</u> (admis) :

1) Si u est solution "classique" de ②, c.à.d si $u \in C(\bar\Omega, \mathbb{R}) \cap C^2(\Omega,$
et $-\Delta u(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega$
$u(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega$
(avec $f \in C(\bar\Omega, \mathbb{R})$)
alors u est solution de ③

2) Si u est solution de ③

et si $\begin{cases} u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}) \\ f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}) \end{cases}$

alors u est solution "classique" de ②

3) si $f \in L^2(\Omega)$ (en particulier $\forall f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$)

$\exists !\, u$ solution de ③

mais il existe $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ tq ② n'admet pas de solution "classique"

Etape 2

On cherche donc $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \neq 0$ tq

$$④ \begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega \lambda u(x) v(x)\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

(④ est la formulation "faible" de ①)

$H = H_0^1(\Omega)$ (Hilbert)

$f(u) = \frac{1}{2} \int |\nabla u(x)|^2 dx$

$g(u) = \int_\Omega u^2(x)\, dx$

$c = 1 \quad K = \{u \in H \,;\, g(u) = c\} = \{u \in H_0^1(\Omega),\ \|u\|_2 = 1\}$

on peut montrer (cf T.D.) que

$f, g \in C^1(H, \mathbb{R})$ et $Df(u)(v) = \int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x)\, dx \quad \forall u, v \in H$

$Dg(u)(v) = \int u(x) v(x)\, dx$

on va montrer

→ 1. $\exists \bar{u} \in \operatorname{argmin}_K f$

→ 2. $\operatorname{Im}(Dg(\bar{u})) = \mathbb{R}$

si 1 et 2 sont vérifiées, le th. de Lagrange s'applique

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $Df(\bar{u}) - \lambda Dg(\bar{u}) = 0$

c.à.d $\begin{cases} \int_\Omega \nabla \bar{u}(x) \nabla v(x)\, dx = \lambda \int_\Omega \bar{u}(x) v(x)\, dx & \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ \bar{u} \in H_0^1(\Omega), \ \bar{u} \neq 0 \ (\text{car } \bar{u} \in K) \end{cases}$

on a donc trouvé $\lambda \in \mathbb{R}$ tq (1) ait une solution faible (non nulle)

Il reste à vérifier 1 et 2

Étape 3 : vérification de 1

$(\exists \bar{u} \in \operatorname{argmin} f ?)$ $\quad \alpha = \operatorname{Inf}\{f(u), u \in K\}$

Soit $(u_n)_n \subset K$ tq $f(u_n) \to \alpha$

$\begin{cases} \frac{1}{2} \int |\nabla u_n(x)|^2 dx \longrightarrow \alpha \\ u_n \in H_0^1(\Omega), \ \int_\Omega u_n^2(x)\, dx = 1 \end{cases}$

on a donc $(u_n)_n$ bornée dans $H_0^1(\Omega)$

on peut donc extraire une sous-suite, encore notée $(u_n)_n$ tq. $u_n \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$ faible

(voir théorème p.28 ou p.36)

En particulier on en déduit $\int |\nabla u(x)|^2 dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n(x)|^2 dx$

et donc $f(u) \leq \alpha$

En effet, $D_i u_n \to D_i u$ dans L^2 faible, c.à.d

$$\int_\Omega D_i u_n \varphi \to \int_\Omega D_i u \varphi \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega)$$

en particulier avec $\varphi = D_i u$ on obtient

$$\|D_i u\|_2^2 = \int_\Omega |D_i u|^2 = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\int_\Omega D_i u \, D_i u_n}_{\leq \|D_i u\|_2 \|D_i u_n\|_2} \leq \liminf \|D_i u\|_2 \|D_i u_n\|_2$$

on a donc $\|D_i u\|_2 \leq \liminf_{n\to+\infty} \|D_i u_n\|_2$)

Pb : $\underline{u \in K}$?

$K = \{ v \in H_0^1(\Omega) \, , \, \underline{\underline{\int v^2 = 1}} \}$

$u_n \rightharpoonup u$ H_0^1 faible

on a donc $u_n \rightharpoonup u$ $\underline{L^2 \text{ faible}}$, $\|u\|_2 \leq \liminf_{n\to+\infty} \|u_n\|_2 = 1$

<u>Lemme</u> (<u>Rellich</u>)

> Soit $(u_n)_n \subset H_0^1$ <u>borné</u>, alors il <u>existe une sous-suite</u>, encore notée $(u_n)_n$, tq $u_n \to u$ $\underline{\underline{L^2}}$ (fort, $\|u_n - u\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$)

<u>corollaire</u>

$$\boxed{u_n \rightharpoonup u \;\; H_0^1 \text{ faible} \Rightarrow u_n \to u \;\; L^2}$$

En appliquant le corollaire on a donc $u_n \to u$ dans L^2

c.à.d $\|u_n - u\|_2 \to 0$

on a donc $\underbrace{\|u_n\|_2}_{= 1} \to \|u\|_2$

donc $\|u\|_2 = 1$, et donc $\underline{u \in K}$

$u \in K$
$f(u) \leq \alpha$, d'où $\underline{f(u) = \alpha}$

$u \in \arg\min_K f$

NB : $u \neq 0$ (car $u \in K$, donc $\|u\|_2 = 1 \neq 0$)
On peut s'arranger pour avoir $u \geq 0$
il suffit de remarquer que $f(|u|) = f(u)$
$g(|u|) = g(u)$

Étape 4 :
Soit $u \in \arg\min_K f$. a-t-on $\mathrm{Im}\,(Dg(u)) = \mathbb{R}$?

$g : H \to \mathbb{R}$
$Dg(u) \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R}) = H'$
$Dg(u)(v) = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx$

On remarque que $Dg(u)(u) = \int_\Omega u^2(x)\,dx \neq 0$, on a $\mathrm{Im}\,(Dg(u)) \neq \{0\}$
et donc $\underline{\mathrm{Im}\,(Dg(u)) = \mathbb{R}}$

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tq. $Df(u) = \lambda Dg(u)$
c.à.d : $\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \int_\Omega \nabla u(x)\, \nabla v(x)\, dx = \lambda \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx \end{cases}$

En prenant $v = u$, on a donc $2\alpha = 2 f(u) = \lambda$ $\qquad \underline{\lambda = 2\alpha}$
$\alpha = \inf_{v \in K} f(v)$

$vp = \{ \lambda \in \mathbb{R},\ \exists u \neq 0$ sol. faible de (I) $\}$

alors $\underline{2\alpha = \inf vp}$

Soit λ = vp
Alors $\exists u \in H_0^1$, $u \neq 0$

tq $\int \nabla u(x) \nabla v(x)\, dx = \lambda \int u(x) v(x)\, dx$

en prenant $v = u$ on a donc $2 f(u) = \lambda \int u^2$

en prenant $v = \frac{u}{\|u\|_2} \in H_0^1$ on a $\|v\|_2 = 1$ $2f(v) = \lambda$

donc $\underline{v \in K}$ et $2f(v) = \lambda$ $\frac{\lambda}{2} = f(v) \geq \alpha$ $\boxed{\lambda \geq 2\alpha}$

NB : $\underline{\lambda = 2\alpha > 0}$

$$\begin{cases} u \neq 0, \ u \in H_0^1 \\ \int \nabla u(x) \nabla v(x)\, dx = \lambda \int u(x) v(x)\, dx \quad \forall v \in H_0^1 \end{cases}$$

$$\int \nabla u(x) \nabla u(x)\, dx = \lambda \int u^2(x)\, dx = \lambda$$

on a donc $\underline{\lambda \geq 0}$ et $\underline{\lambda \neq 0}$ (sinon $\int |\nabla u(x)|^2 dx = 0$ et donc $\nabla u(x) = 0$ pp
et donc $\underline{u = 0 \text{ pp}}$)

- $2\alpha = \lambda_1 > 0$ 1ère vp de $-\Delta$ avec cond de Dirichlet.

autres v.p. ?

récurrence : $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont construites

$u_1, \dots, u_n$ associés à $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$u_i \in H_0^1(\Omega)$, $u_i \neq 0$, $\underline{u_i \in K}$

$$\int_\Omega \nabla u_i(x) \nabla v(x)\, dx = \lambda_i \int_\Omega u_i(x) v(x)\, dx \quad \forall v \in H_0^1$$

$K_n = \{ v \in H_0^1(\Omega),\ \|v\|_2 = 1,\ \int_\Omega v u_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \}$

$\boxed{\lambda_{n+1} = \frac{1}{2} \inf_{K_n} f}$ et $u_{n+1} \in K_n$, $f(u_{n+1}) = \inf_{K_n} f$

bien

- exemple 2

Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ $1 < p$

On cherche u solution de (S) $\begin{cases} -\Delta u = u^p & \text{dans } \Omega \\ u \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$

on pose $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$

Etape 1 : formulation faible de (S)

NB :

$\hookrightarrow$ signifie : $H_0^1 \subset L^q$ $\exists c / \|u\|_q \leq c\|u\|_{H^1}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \text{pour tout } q \quad \underline{1 \leq q \leq \frac{2N}{N-2}} \quad \underline{\text{si } N > 2} \\ \bullet\ H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \underline{1 \leq q < \infty} \quad \underline{\text{si } N = 2} \end{array}}$$

On cherche u tq

$$(S) \begin{cases} \int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x) = \int_\Omega u^p(x)\, v(x)\, dx & \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

(ceci a un sens car on remarque que $u^p v \in L^1$ si $u \in H_0^1(\Omega)$ $u \geq 0$ et $v \in H_0^1(\Omega)$)

Etape 2

$H = H_0^1(\Omega)$

$f(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u(x)|^2 dx$ $\qquad g(u) = \int |u(x)|^{p+1} dx$

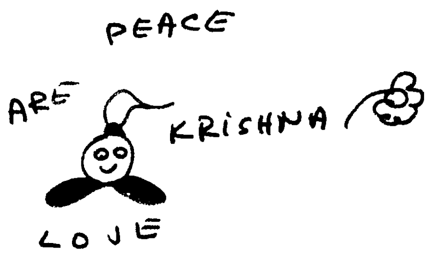
NB : $p < \frac{N+2}{N-2} \Rightarrow p+1 < \frac{2N}{N-2}$

On peut montrer $f \in C^1(H, \mathbb{R})$
$g \in C^1(H, \mathbb{R})$ $\qquad Dg(u)(v) = \int_\Omega u|u|^{p-1} v\, dx$

Remarque : $u \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Im}\, Dg(u) = \mathbb{R}}$

REMARQUES :

SUITE →



Étape 3 : $\exists\, u \in \operatorname{argmin}_K f$. pour cela l'hyp $p < \frac{2N}{N-2}$ est importante

Étape 4 : $u \in \operatorname{argmin}_K f$

on a $\operatorname{Im} Dg(u) = \mathbb{R}$ (car $u \neq 0$)

il existe donc λ tq $Df(u) = \lambda\, Dg(u)$

On peut supposer $u \geq 0$ (sinon on remplace u par $|u|$)

$$\begin{cases} \int \nabla u(x) \nabla v(x)\, dx = \lambda \int u^p(x)\, v(x)\, dx \quad \forall v \in H_0^1 \\ v \in K = \{u \in H_0^1,\ \int |u|^{p+1} = 1\} \end{cases}$$

on montre $\lambda > 0$.

On pose $v = \theta u$, avec $\theta > 0$ convenable

v est solution faible de (5)

- **Exemple 3** (dim finie) oui

$H = \mathbb{R}^N$, $G = \mathbb{R}$

$A \in \mathbb{R}^{N,N}$ (A sdp) , $b \in \mathbb{R}^N$, $c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}^N$

$f(u) = \frac{1}{2} Au \cdot u - b \cdot u$

$g(u) = d \cdot u$

$K = \{u \in \mathbb{R}^N,\ g(u) = c\}$

On cherche $\begin{cases} \bar{u} \in K \\ f(\bar{u}) \leq f(u) \quad \forall u \in K \end{cases}$

(si A sdp, $\bar{u}$ existe, f coercive)

Caractérisation de $\bar{u}$

$f \in C^1(H, \mathbb{R})$ et

$Df(u)(v) = (Au - b) \cdot v \Rightarrow \operatorname{grad} f(u) = Au - b$

$g \in C^1(H, \mathbb{R})$

$Dg(u)(v) = d \cdot v$

$\operatorname{grad} g(u) = d$

et $\operatorname{Im}(Dg(u)) = \mathbb{R}$

On peut donc appliquer le th. des multiplicateurs de Lagrange.

Soit $\bar{u} \in \operatorname{argmin}_K f$, le th. de Lagrange s'applique

$\exists$ donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $Df(\bar{u}) + \lambda Dg(\bar{u}) = 0$

$\operatorname{grad} f(\bar{u}) + \lambda \operatorname{grad} g(\bar{u}) = 0$

$A\bar{u} - b + \lambda d = 0$

caractérisation de $\bar{u}$

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $\begin{cases} A\bar{u} + \lambda d = b \\ d \cdot \bar{u} = c \end{cases}$

c.à.d

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} A & d \\ \hline {}^t d & \end{array}\right]}_{N+1} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}$$

$N+1$ inconnues, $\bar{u} \in \mathbb{R}^N$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$N+1$ éq.

NB (D) : $\exists f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ de classe C^1

$\exists g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^p$

$\exists c \in \mathbb{R}^p$ $K = \{u \in \mathbb{R}^N, g(u) = c\}$ $(\operatorname{Im}(Dg(\bar{u})) \neq \mathbb{R}^p)$

$\exists \bar{u} \in \operatorname{argmin}_K f$ tq $\nexists \lambda_1, \dots \lambda_p$ tq $Df(\bar{u}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Dg_i(\bar{u}) = 0$

5°) Intermède algébrique

Rappel : E, F e.v. sur $\mathbb{R}$
$T : E \to F$ linéaire

alors $\boxed{\dim \operatorname{Im}(T) = \operatorname{codim} \operatorname{Ker}(T)}$

$(\operatorname{Im}(T) \subset F, \ \operatorname{Ker}(T) \subset E)$

notation : $\operatorname{Ker}(T) = N(T)$, $\operatorname{Im}(T) = R(T)$

démonstration

$\operatorname{Im}(T) = G$ s.e.v de F

$(e_i)_{i \in I}$ base (algébrique) de $\operatorname{Im}(T)$

$\forall i \in I, \ \exists f_i \in E \ / \ T(f_i) = e_i$

soit $H = $ e.v.$\{f_i, i \in I\}$

On va montrer

① $(f_i)_{i \in I}$ est une famille libre [on a donc $\dim H = \dim G$]
② $H \oplus \operatorname{Ker}(T) = E$ [et donc $\operatorname{codim} \operatorname{Ker}(T) = \dim H$]

$\dim(\operatorname{Im}(T)) = \operatorname{codim}(\operatorname{Ker}(T))$

montrons ① :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i f_i = 0 \quad (\operatorname{card}\{i \in I, \lambda_i \neq 0\} < \infty)$$

on a donc $T\left(\sum_{i \in I} \lambda_i f_i\right) = 0 \iff \sum_i \lambda_i T(f_i) = 0 \iff \sum_i \lambda_i e_i = 0$

on a donc $\lambda_i = 0 \ \forall i$

on a donc $(f_i)_{i \in I}$ est libre

montrons ②

- montrons $E = H + \operatorname{Ker} T$

Soit $x \in E$. on a donc $T(x) \in \operatorname{Im}(T) = G$.

Il existe $(\lambda_i)_{i\in I}$, $T(x) = \sum \lambda_i e_i = \sum \lambda_i T(f_i) = T\left(\sum_{i\in I} \lambda_i f_i\right)$

$x - \sum_{i\in I} \lambda_i f_i \in \ker T$

$$x = \underbrace{x - \sum \lambda_i f_i}_{\in \ker T} + \underbrace{\sum \lambda_i f_i}_{\in H}$$

$x \in H + \ker(T)$ $\quad E = H + \ker T$

- on va montrer que $H \cap \ker T = \{0\}$

$x \in H \cap \ker T$, on a $x = \sum_{i \in I} \lambda_i f_i$

$0 = T(x) = \sum \lambda_i T(f_i) = \sum \lambda_i e_i$

on a donc $\lambda_i = 0 \quad \forall i \in I$

et donc $\underline{x = 0}$

$\ker T \cap H = \{0\}$

conclusion : $\left.\begin{array}{l} \ker T \cap H = \{0\} \\ E = H + \ker T \end{array}\right\} \to$ on a donc $E = H \oplus \ker T$

d'où $\operatorname{codim} \ker T = \dim H = \operatorname{card} I = \operatorname{card} \sigma = \dim(\operatorname{Im}(T))$

Lemme A_1

E e.v. sur $\mathbb{R}$

$T_1, \dots, T_p : E \to \mathbb{R}$ linéaires

$S : E \to \mathbb{R}$ linéaire

$$\left(\ker S \supset \bigcap_{i=1}^{p} \ker T_i\right) \iff \left(\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R} \text{ tq } S = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i T_i\right.$$

<u>démonstration</u>

$T_i : E \to \mathbb{R}$ linéaire $i \in \{1, \dots, p\}$
$S : E \to \mathbb{R}$ linéaire

($\Leftarrow$) trivial
($\Rightarrow$) $\underline{\bigcap_{i=1}^{p} \ker T_i \subset \ker S}$

on définit $T : E \to \mathbb{R}^p$ par $T(x) = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ \vdots \\ T_p(x) \end{bmatrix}$, $x \in E$

$$\ker T = \{x \in E,\ T(x) = 0\} = \{x \in E,\ T_i(x) = 0 \ \forall i \in \{1, \dots, p\}\}$$
$$= \bigcap_{i=1}^{p} \ker T_i$$

$\underline{\ker T \subset \ker S}$

$\operatorname{codim}(\ker T) = \dim(\operatorname{Im}(T))$
$E = G \oplus \ker T$ (G est un supplé. alg. de $\ker T$)
$\dim G = \operatorname{codim}(\ker T) = \dim(\operatorname{Im} T)$
$T_{|_G} : G \to \operatorname{Im}(T)$

$T_{|_G}$ linéaire, injectif (car $y \in \operatorname{Im}(T)$, $\exists x \in E$, $T(x) = y$,
$x = x_1 + x_2$, $x_1 \in G$, $x_2 \in \ker T$
$T(x) = T(x_1) = y$ donc $y \in \operatorname{Im}(T_{|_G})$)

$\dim G = \dim(\operatorname{Im}(T))$
$T_{|_G}$ est donc bijective de G sur $\operatorname{Im}(T)$

$(T_{|_G})^{-1} : \operatorname{Im}(T) \to G$

on a $\underline{S - S \circ (T_{|_G})^{-1} \circ T = 0}$

c.à.d

(*) $S(x) - S\circ(T_{|G})^{-1}\circ T(x) = 0 \quad \forall x \in E$

on effet $E = G \oplus \ker T$

1er cas : $x \in \ker T$. on a $T(x)=0$ et aussi $S(x)=0$ (car $\ker S \supset \ker T$)

(*) est donc vérifié

2ème cas : $x \in G$

$T(x) = T_{|G}(x)$. $(T_{|G})^{-1}(T(x)) = x$. (*) est donc vérifiée

3ème cas : $x \in E$, $x = x_1 + x_2$ $x_1 \in G$, $x_2 \in \ker T$
(*) est bien vérifié (par linéarité).

$S = \underbrace{S\circ(T_{|G})^{-1}}\circ T$

$\rightarrow S\circ(T_{|G})^{-1} : \mathrm{Im}(T) \rightarrow \mathbb{R}$

$\rightarrow \mathrm{Im}(T) \subset \mathbb{R}^p \quad (T : E \rightarrow \mathbb{R}^p)$
il existe H sev de $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^p = H \oplus \mathrm{Im}(T)$

$\Lambda : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire, par $\begin{cases} \Lambda(x) = 0 & x \in H \\ \Lambda(x) = S\circ(T_{|G})^{-1}(x) & x \in \mathrm{Im}(T) \end{cases}$

on a toujours $S = \Lambda\circ T$ $\rightarrow S(x) = \Lambda(T(x)) \quad x \in E$

il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tq $\Lambda(y) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i \quad \forall y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$

$S(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i T_i(x)$ $\left(\lambda_i = \Lambda\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}\right)$

Conséquence du Lemme A1 :

E e.v.n (sur $\mathbb{R}$)
$f : E \to \mathbb{R}$, $g_i : E \to \mathbb{R}$ $i \in \{1, .., p\}$
$x \in E$, f diff en x $(Df(x) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}))$
g_i diff en x , $i \in \{1, .., p\}$ $(Dg_i(x) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}))$

On applique le Lemme A1 avec $S = Df(x)$ $T_i = Dg_i(x)$.
On obtient :

$$\mathrm{Ker}\,(Df(x)) \supset \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}\,(Dg_i(x)) \iff \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \text{ tq } Df(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Dg_i(x).$$

$$\left(\iff \mathrm{Ker}\,(Df(x)) \supset \mathrm{Ker}\,(Dg(x)),\ g = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_p \end{bmatrix} \right)$$

Autre énoncé du th. de Lagrange :

E evn
$f : E \to \mathbb{R}$ continue
$g : E \to \mathbb{R}^p$ de classe C^1 , $c \in \mathbb{R}^p$, $K = \{x \in E,\ g(x) = c\}$
Si f est différentiable en $\bar{x}$
Alors

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x} \in K,\ f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in K \\ \mathrm{Im}\,(Dg(\bar{x})) = \mathbb{R}^p \end{array}\right) \Rightarrow \mathrm{Ker}\,(Df(\bar{x})) \supset \mathrm{Ker}\,(Dg(\bar{x})) = \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}\,(Dg_i(\bar{x}))$$

Lemme A2

E e.v. (sur $\mathbb{R}$)
$T_i : E \to \mathbb{R}$ linéaire $i \in \{1, .., p\}$
$S : E \to \mathbb{R}$ linéaire

$$\left(\forall x \in E,\ T_i(x) \geq 0\ \forall i \in \{1, .., p\} \Rightarrow S(x) \geq 0 \right) \iff \left(\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \geq 0 \text{ t.q } S(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i T_i(x) \right)$$

NB : $(T_i(x) \geq 0 \;\; \forall i \Rightarrow S(x) \geq 0) \Rightarrow \ker(S) \supset \bigcap_{i=1}^{p} \ker T_i$

en effet soit $x \in E$, $\underline{T_i(x) = 0}$ $\underline{\forall i}$

on a donc $T_i(x) \geq 0$ $\forall i$ et donc $S(x) \geq 0$

$T_i(-x) \geq 0$ $\forall i$ $\Rightarrow$ $S(-x) \geq 0$, d'où $\underline{S(x) = 0}$

On a bien montré $\bigcap_{i=1}^{p} \ker T_i \subset \ker S$

On a donc par le lemme A1

$(T_i(x) \geq 0 \;\; \forall i \Rightarrow S(x) \geq 0) \Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tq $S(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i T_i(x)$

<u>demonstration du lemme A2</u> :

($\Leftarrow$) trivial

($\Rightarrow$) hypothèse : $T_i(x) \geq 0 \;\; \forall i \Rightarrow S(x) \geq 0$

on veut montrer $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \geq 0$ tq $S(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i T_i(x)$ $\forall x$

(le lemme A1 donne seulement $\exists \lambda_1, \dots \lambda_p \in \mathbb{R}$ tq $S = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i T_i$

On reprend la dém. du lemme A1 :

$$T(x) = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ \vdots \\ T_p(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

$T : E \to \mathbb{R}^p$

notation : $y \in \mathbb{R}^p$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}$, $y \geq 0$ si $y_i \geq 0$ $\forall i$

on a $\forall x \in E$ $T(x) \geq 0 \Rightarrow S(x) \geq 0$

$E = G \oplus \ker T$

$T_{|G} : G \to \operatorname{Im}(T)$ linéaire, surjectif donc bijectif

$(T_{|G})^{-1} : \operatorname{Im}(T) \to G$

On a toujours $S = \underbrace{S \circ \left(T_{|G}\right)^{-1}}_{U} \circ T$

$U = S \circ \left(T_{|G}\right)^{-1}$

$\to U : Im(T) \to \mathbb{R}$

$Im(T) \subset \mathbb{R}^p$

<u>ppté de U</u> : $\left.\begin{array}{l} y \geq 0 \\ y \in Im(T) \end{array}\right) \Rightarrow U(y) \geq 0$

En effet, soit $y \in Im(T)$, on a donc : $\exists x \in G$, $y = T(x)$

$y \geq 0$ signifie $T(x) \geq 0$ et donc par hypothèse $S(x) \geq 0$ et $U(y) = S \circ \underbrace{\left(T_{|G}\right)^{-1}(y)}_{x}$

$= S(x) \geq 0$

on a bien $\left.\begin{array}{l} y \in Im(T) \\ y \geq 0 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{U(y) \geq 0}$

On en déduit (cf lemme A3) qu'il existe $\Lambda : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ tq :

1) $\Lambda = U$ sur $Im(T)$

2) $y \geq 0$, $y \in \mathbb{R}^p \Rightarrow \Lambda(y) \geq 0$

on a alors $(S = U \circ T)$ $\quad S = \Lambda \circ T = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i T_i$

avec $\lambda_i = \Lambda \underbrace{\left[e_i\right]}_{\geq 0} \geq 0 \qquad e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i^{\text{ème}}$ place

on a donc $\underline{\lambda_i \geq 0 \ \forall i}$.

il reste à faire le <u>lemme A3</u>

Lemme A3

> Soit F s.e.v de $\mathbb{R}^p$
>
> $u : F \to \mathbb{R}$ linéaire tq $y \in F$, $y \geq 0 \Rightarrow u(y) \geq 0$
>
> $\forall y \in F \subset \mathbb{R}^p$
>
> Alors $\exists \Lambda : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ tq :
>
> 1. $\Lambda = u$ sur F
> 2. $y \in \mathbb{R}^p$, $y \geq 0 \Rightarrow \Lambda(y) \geq 0$

NB : On peut avoir : $\nexists\, y \in F$ $y \geq 0$ (sauf $y = 0$)
et le résultat reste vrai.

Idée de démonstration (détails en TD) :

Etape 1 : On montre qu'il suffit d'ajouter une dimension à F
c.à.d $\exists y \notin F$ et $\bar{u} : F \oplus \mathbb{R}y \to \mathbb{R}$
tq $\bar{u} = u$ sur F
$z \in F \oplus \mathbb{R}y$, $z \geq 0 \Rightarrow \bar{u}(z) \geq 0$.
(par récurrence, on prolonge u à tout $\mathbb{R}^p$)

Etape 2 : $(e_i)_{i \in \{1, \dots, p\}}$ base canonique de $\mathbb{R}^p$

$F \neq \mathbb{R}^p$ (seul cas intéressant!)

$\exists i \in \{1, \dots, p\}$, $e_i \notin F$

On peut donc supposer (en renumérotant) que $e_1 \notin F$

On pose alors $G = F \oplus \mathbb{R}e_1$

On cherche $\alpha \in \mathbb{R}$ tq

$\bar{u} : G \to \mathbb{R}$ définie par $\bar{u}(y + \lambda e_1) = u(y) + \lambda\alpha$
$(\forall y \in F, \lambda \in \mathbb{R})$ vérifie :

$(*)$ $y + \lambda e_1 \geq 0$, $y \in F$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow u(y) + \lambda\alpha \geq 0$

Il suffit de vérifier $(*)$ pour $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$

- $\lambda = 1$

  on veut $y \geq e_1 \Rightarrow U(y) \geq \alpha$

- $\lambda = -1$

  on veut $y \geq -e_1 \Rightarrow U(y) \geq -\alpha$

  c.à.d $y \leq e_1 \Rightarrow U(y) \leq \alpha$

finalement on cherche $\alpha \in \mathbb{R}$ tq

$$\sup_{\substack{y \in F \\ y \leq e_1}} U(y) = \alpha_m \leq \alpha \leq \alpha_M = \inf_{\substack{y \in F \\ y \geq e_1}} U(y)$$

$\underline{1^{er} \text{ cas}}$: $\{y \in F \,;\, y \geq e_1\} \neq \emptyset$
et $\{y \in F,\ y \leq e_1\} \neq \emptyset$ ($\leftarrow$ tjrs vrai)

facile, on a $\alpha_m \leq \alpha_M$ (hyp sur U)

$\underline{2^{e} \text{ cas}}$: $\{y \in F,\ y \geq e_1\} \underline{= \emptyset}$

il faut montrer $\underline{\alpha_m < \infty}$ (difficile)

<u>Rappel</u> : <u>Lemme A2</u>

E e.v. (sur $\mathbb{R}$)
$S : E \to \mathbb{R}$ linéaire
$T_i : E \to \mathbb{R}$ linéaire $i \in \{1, \dots, p\}$

alors :

$$\left(T_i(x) \geq 0 \ \forall i \in \{1, \dots, p\} \Rightarrow S(x) \geq 0 \right) \Leftrightarrow \left(\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}_+ ,\ S = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i T_i \right)$$

conséquence :

Kuhn-Tucker "algébrique"

E evn $f : E \to \mathbb{R}$ $g_i : E \to \mathbb{R}$ $\quad i \in \{1, .., p\}$ $x \in E$ $\quad f, g_i$ différentiables en x $\left(Dg_i(x)(y) \geq 0 \quad \forall i \in \{1, .. p\} \right) \Rightarrow Df(x)(y) \geq 0$ Alors $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \geq 0$ tq $Df(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Dg_i(x)$

6°) Condition necessaire d'optimalité, contrainte inégalité

E ev.n , $G = \mathbb{R}^p$

$f : E \to \mathbb{R}$, $g_i : E \to \mathbb{R}$ $\quad i = 1, .., p$

$g = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_p \end{bmatrix} : E \to \mathbb{R}^p$

$K = \{ x \in E , \ g_i(x) \leq 0 \ \ \forall i \in \{1, .., p\} \}$

(H)

on cherche $\bar{x}$ tq (1) $\begin{cases} \bar{x} \in K \\ f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in K \end{cases}$

NB : $g(x) = c \iff \begin{cases} g(x) \leq c \\ -g(x) \leq c \end{cases}$

donc un pb avec contrainte "égalité" peut être ramené à un pb avec contraintes "inégalités".

Théorème (existence et unicité en dim. finie)

- hypothèse (H)
- $E = \mathbb{R}^N$

① On suppose $\left|\begin{array}{l} f \text{ continue}, \ f(x) \to +\infty \text{ qd } \|x\| \to +\infty \\ g_i \text{ continue } \forall i \end{array}\right.$

alors $\exists \bar{x}$ solution de (1)

② On suppose $\left|\begin{array}{l} f \text{ continue} \\ g_i \text{ continue}, \ g_i(x) \to +\infty \text{ qd } \|x\| \to +\infty \ \forall i \end{array}\right.$

alors $\exists \bar{x}$ solution de (1)

③ on suppose $\left|\begin{array}{l} f \text{ convexe strictement} \\ g_i \text{ convexe } \forall i \end{array}\right.$

alors (1) admet au plus une solution

démonstration : (exercice) (facile)

1) K fermé (car g_i continue)
2) K fermé borné
3) K convexe

Théorème ($\exists !$ dim infinie)

- hypothèse (H)
- E Banach réflexif (ex : Hilbert)

① on suppose $\left|\begin{array}{l} f \text{ continue convexe}, \ f(x) \to +\infty \text{ qd } \|x\| \to +\infty \\ g_i \text{ continue convexe } \forall i \end{array}\right.$

alors $\exists \bar{x}$ solution de (1)

② on suppose $\left|\begin{array}{l} f \text{ continue } \underline{\text{convexe}} \\ g_i \text{ continue } \underline{\text{convexe}} \end{array}\right.$, $g_i(x) \to +\infty$ qd $\|x\| \to \infty$

<u>alors</u> $\exists \bar{x}$ solution de (1)

③ idem ③ du th. précédent.

<u>démonstration</u> : exercice.

<u>N.B.</u> hypothèse (H)

Soit $\bar{x}$ solution de (1)

f, g_i différentiables en $\bar{x}$

on applique le résultat du paragraphe 5°)

$I(\bar{x}) = \{ i \in \{1, \dots, p\},\ g_i(\bar{x}) = 0 \}$ (ensemble des contraintes <u>bloquantes</u> ou <u>saturées</u>.)

① $\underline{I(\bar{x}) = \emptyset}$, on a alors $\underline{g_i(\bar{x}) < 0}$ $\forall i \in \{1, \dots, p\}$

comme les g_i sont <u>continues</u>, il existe $\varepsilon > 0$ tq

$x \in B(\bar{x}, \varepsilon) \Rightarrow g_i(x) < 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}$

on a donc $B(\bar{x}, \varepsilon) \subset K$.

comme $\bar{x}$ est solution de (1) on a $f(\bar{x}) \leq f(x)$ $\underline{\forall x \in B(\bar{x}, \varepsilon)}$

on a donc (cf ch II) $\underline{\underline{Df(\bar{x}) = 0}}$

② $\underline{I(\bar{x}) \neq \emptyset}$

card $(I(\bar{x})) = q > 0$, $q \leq p$.

on suppose $y \in E$, $Dg_i(\bar{x})(y) \leqslant 0 \quad \forall i \in I(\bar{x}) \quad \Rightarrow \quad Df(\bar{x}) \geqslant 0$ (**)

alors on a $\exists (\lambda_i)_{i \in I(\bar{x})}$ tq $\lambda_i \geqslant 0 \quad \forall i \in I(\bar{x})$

$$(*) \qquad Df(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \, Dg_i(\bar{x}) = 0$$

<u>démonstration</u>

$$\begin{cases} S = Df(\bar{x}) \\ T_i = -Dg_i(\bar{x}) \qquad i \in I(\bar{x}) \qquad I(\bar{x}) = \{1, .., q\} \end{cases}$$

on a $T_i(y) \geqslant 0 \quad \forall i \in I(\bar{x}) \Rightarrow S(y) \geqslant 0$

on conclut (par 5°, avec q au lieu de p) $\exists (\lambda_i)_{i \in I(\bar{x})}$ tq $\lambda_i \geqslant 0 \quad \forall i \in I(\bar{x})$

$$S = \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i T_i$$

③

$(*) \Leftrightarrow \exists \lambda_1, .., \lambda_p \geqslant 0$ tq $Df(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \, Dg_i(\bar{x}) = 0$

$$\begin{pmatrix} \lambda_i = 0 & \text{si } g_i(\bar{x}) < 0 \\ \lambda_i \geqslant 0 & \text{si } g_i(\bar{x}) = 0 \end{pmatrix} \quad \forall i$$

④ a-t-on $\bar{x}$ solution de $(*) \Rightarrow (**)$?

<u>Théorème</u> (<u>Kuhn - Tucker</u>)

E e.v.n.

$f : E \to \mathbb{R}$ <u>continue</u>

$g_i : E \to \mathbb{R}$ de classe <u>$\mathcal{C}^1$</u> $\quad i \in \{1, .., p\}$

$$K = \{x \in E,\ g_i(x) \leq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}\}$$

Soit $\bar{x} \in K$ tq $f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in K$

f différentiable en $\bar{x}$

on suppose

① g_i affine $\forall i \in \{1, \dots, p\}$

ou

② g_i convexe $\forall i \in \{1, \dots, p\}$ et $\exists x_0 \in E$ tq $g_i(x_0) < 0 \quad \forall i \in I(\bar{x}) = \{j \in \{1, \dots, p\},\ g_j(\bar{x}) = 0\}$

ou

③ $(Dg_i(\bar{x}))_{i \in I(\bar{x})}$ est une famille libre.

Alors

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \geq 0 \text{ tq } \boxed{Df(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Dg_i(\bar{x}) = 0}$$

$$\left(\begin{array}{l} \lambda_i = 0 \text{ si } g_i(\bar{x}) < 0 \\ \lambda_i \geq 0 \text{ si } g_i(\bar{x}) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0$$

NB : 1) $I(\bar{x}) = \emptyset$. on a (sans ① ② ou ③) $Df(\bar{x}) = 0$
(conséq. du chap. II)

[illegible] 2) dans les cas ① et ② il suffit E evn (au lieu Banach)
g_i diff en $\bar{x}$ (au lieu de C^1)

3) pour montrer le th. on va montrer ① ou ② $\Rightarrow$ (**)
③ on passe par Lagrange.

démonstration du théorème : $I(\bar{x}) \neq \emptyset$

1er cas : g_i affines

$y \in E \quad g_i(\bar{x} + y) = g_i(\bar{x}) + Dg_i(\bar{x})(y)$

<u>2ème cas</u> : g_i convexe $\forall i \in \{1, \dots, p\}$ (il suffit $\forall i \in I(\bar{x})$)
$\exists x_0 \in E,\ g_i(x_0) < 0 \quad \forall i \in I(\bar{x})$

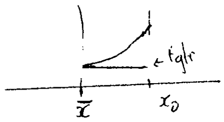
on veut montrer

$$\left\{ \begin{array}{l} y \in E \\ Dg_i(\bar{x})(y) \leq 0 \quad \forall i \in I(\bar{x}) \end{array} \right. \Rightarrow Df(\bar{x})(y) \geq 0$$

Soit $y \in E$ tq $Dg_i(\bar{x})(y) \leq 0 \quad \forall i \in I(\bar{x})$
on va montrer $\exists \eta > 0$ tq $0 \leq t < \eta \Rightarrow \bar{x} + ty \in K$.

- <u>Soit $i \in I(\bar{x})$</u>

$Dg_i(\bar{x})(y) \leq 0$



$$\overbrace{g_i(x_0)}^{<0} \geq \overbrace{g_i(\bar{x})}^{=0} + Dg_i(\bar{x})(x_0 - \bar{x})$$

(car g_i est convexe)

on a donc $\underline{Dg_i(\bar{x})(x_0 - \bar{x}) < 0}$

Soit $\varepsilon > 0$

$$\underbrace{Dg_i(\bar{x})\big(y + \varepsilon(x_0 - \bar{x})\big)}_{<0} = \overbrace{Dg_i(\bar{x})(y)}^{\leq 0} + \varepsilon \overbrace{Dg_i(\bar{x})(x_0 - \bar{x})}^{<0}$$

$$g_i\Big(\bar{x} + t\underbrace{\big(y + \varepsilon(x_0 - \bar{x})\big)}_{z}\Big) = g_i(\bar{x}) + t\underbrace{Dg_i(\bar{x})(z)}_{<0} + t\,\varepsilon(t)$$

il existe $\eta_i > 0$, $0 \leq t < \eta_i \Rightarrow |\varepsilon(t)| \leq |Dg_i(\bar{x})(z)|$

$0 \leq t < \eta_i \Rightarrow g_i(\bar{x} + tz) \leq 0$

$z = y + \varepsilon(x_0 - \bar{x})$ (y, ε fixés) on veut montrer (**) c.à.d

$$Dg_i(\bar{x})(y) \leq 0 \quad \forall i \in I(\bar{x}) \Rightarrow Df(\bar{x})(y) \geq 0$$

$y = \ldots \quad t \in \mathbb{R}_+^*$

$$g_i(\bar{x}+ty) = \underbrace{\underbrace{g_i(\bar{x})}_{=0} + t\underbrace{Dg_i(\bar{x})(y)}_{\leq 0}}_{\leq 0} \geq 0 \qquad i \in I(\bar{x})$$

car g_i affine

Si $Dg_i(\bar{x})(y) \leq 0 \quad \forall i \in I(\bar{x})$

- on a alors $g_i(\bar{x}+ty) \leq 0 \quad \forall t>0, \forall i \in I(\bar{x})$

- $i \notin I(\bar{x})$
  par continuité de g_i il existe $\eta_i > 0$; $0 \leq t \leq \eta_i \Rightarrow g_i(\bar{x}+ty) \leq 0$

  $\eta = \inf_{i \notin I(\bar{x})} \eta_i > 0 \quad$ (si $I(\bar{x}) \neq \{1,..,p\}$ sinon $\eta = \infty$)

  $0 \leq t < \eta \Rightarrow g_i(\bar{x}+ty) \leq 0 \quad \forall i \notin I(\bar{x})$

on a donc $0 \leq t < \eta \Rightarrow \underline{\bar{x}+ty \in K}$

et donc $f(\bar{x}+ty) \geq f(\bar{x}) \qquad \dfrac{f(\bar{x}+ty) - f(\bar{x})}{t} \geq 0$

qd $t \to 0$ on en déduit

$$Df(\bar{x})(y) \geq 0$$

on a bien montré (**), et donc (cf rmq précédente)

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_p \geq 0 \qquad Df(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Dg_i(\bar{x}) = 0$$

$$\lambda_i = 0 \quad \text{si } g_i(\bar{x}) < 0$$

- $i \in I(\bar{x})$

  comme dans le 1° cas

  $\exists \eta_i > 0$, $0 \leqslant t < \eta_i \Rightarrow g_i(\bar{x} + tz) \leqslant 0$

résumé : $\eta = \inf_{i \in \{1,\dots,p\}} \eta_i > 0$

$$0 \leqslant t < \eta \Rightarrow g_i(\bar{x} + tz) \leqslant 0$$
$$\Rightarrow \bar{x} + tz \in K$$
$$\Rightarrow f(\bar{x} + tz) \geqslant f(\bar{x})$$

$$0 < t < \eta \Rightarrow \frac{f(\bar{x} + tz) - f(\bar{x})}{t} \geqslant 0$$

en faisant $t \to 0$

$$Df(\bar{x})(z) \geqslant 0$$

$$Df(\bar{x})(y + \varepsilon(x_0 - \bar{x})) \geqslant 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

en faisant $\varepsilon \to 0$ on a donc $Df(\bar{x})(y) \geqslant 0$

on a bien montré (**) et donc $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \geqslant 0$; $Df(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Dg_i(\bar{x}) = 0$

$\lambda_i = 0$ si $g_i(\bar{x}) < 0$

3ème cas $\left(Dg_i(\bar{x})\right)_{i \in I(\bar{x})}$ est famille libre

on peut supposer $I(\bar{x}) \neq \emptyset$

$I(\bar{x}) = \{1, \dots, q\}$ $\quad (q \geqslant 1)$

il existe $\varepsilon > 0$ tq $x \in B(\bar{x}, \varepsilon) \Rightarrow g_i(x) < 0 \ \forall i \notin I(\bar{x})$

(car g_i continue et $g_i(\bar{x}) < 0$ si $i \notin I(\bar{x})$)

$\tilde{K} = \{x \in E,\ \underline{g_i(x) = 0},\ i \in I(\bar{x}) = \{1, \dots, q\}\}$

$x \in \tilde{K} \cap B(\bar{x}, \varepsilon) \Rightarrow x \in K$

$\bar{x} \in \tilde{K} \cap B(\bar{x}, \varepsilon)$

$\{ f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in \tilde{K} \cap B(\bar{x}, \varepsilon)$

$g_i \in C^1 \quad i \in I(\bar{x}) = \{1, \dots, q\}$

$\tilde{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_q \end{bmatrix} \qquad \tilde{g} : E \to \mathbb{R}^q$

$\mathrm{Im}\,(D\tilde{g}(\bar{x})) = \mathbb{R}^q$

car $(D\tilde{g}(\bar{x}))_{i \in \{1, \dots, q\}}$ famille libre.

on peut appliquer le thm de Lagrange

il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_q \in \mathbb{R}$ $\quad Df(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i Dg_i(\bar{x}) = 0$

il reste à montrer que $\underline{\lambda_i \geq 0}$ $\quad \forall i \in \{1, \dots, q\}$

prenons $i \in \{1, \dots, q\}$

$Dg_i(\bar{x}) \notin \mathrm{Vect}_{\substack{j \in \{1,\dots,q\} \\ j \neq i}} Dg_j(\bar{x})$

(car libre)

d'après le lemme A_1 $\quad \mathrm{Ker}\, Dg_i(\bar{x}) \not\supset \bigcap_{\substack{j \in \{1,\dots,q\} \\ j \neq i}} \mathrm{Ker}\, Dg_j(\bar{x})$

il existe $z_i \in \bigcap_{j \neq i} \mathrm{Ker}\, Dg_j(\bar{x})$ tq $Dg_j(\bar{x})(z_i) = 0$

$z_i \notin Dg_i(\bar{x})$ tq $\alpha_i = Dg_i(\bar{x})(z_i) \neq 0$

$y_i = -\frac{z_i}{\eta_i}$

$Dg_j(y_i) = 0 \qquad j \in \{1, \dots, q\} \qquad j \neq i$

$Dg_i(y_i) = -1$

$Df(\bar{x})(y_i) + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \, Dg_i(\bar{x})(y) = 0 \qquad \forall y \in E$

$y = \sum_{i=1}^{q} \varepsilon_i y_i \qquad \underline{\varepsilon_i > 0}$

$Dg_j(y) = \sum_{i=1}^{q} \varepsilon_i \, Dg_j(y_i) = -\varepsilon_i < 0$

$\underline{\exists \eta_j > 0} \quad 0 \leq t < \eta_j \quad g_j(\bar{x} + ty) < 0 \qquad \forall j \in I(\bar{x})$

comme avant, si $j \notin I(\bar{x})$ $\exists \eta_j$ tq $0 \leq t \leq \eta_j$
$\Rightarrow g_j(\bar{x} + ty) < 0$

$\eta = \inf \eta_j$
$0 < t \leq \eta \Rightarrow \bar{x} + ty \in K$
$\Rightarrow Df(\bar{x})(y) \geq 0$

$$\underbrace{Df(\bar{x})(y)}_{\geq 0} + \overbrace{\sum_{i=1}^{q} \lambda_i \underbrace{Dg_i(\bar{x})(y)}_{-\varepsilon_i}}^{\leq 0} = 0 \qquad \forall y \in E$$

on a donc $-\sum_{i=1}^{q} \lambda_i \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \, Dg_i(\bar{x})(y) \leq 0$

$\forall\, \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i > 0$

$i \in \{1, \dots, q\} \qquad \varepsilon_1 = 1$
$\varepsilon_j \to 0 \quad j \neq 1 \qquad$ on en déduit $\underline{\lambda_i \geq 0}$

Théorème (Réciproque de K.T.)

E e.v.n.
$f, g_i \in C^1(E, \mathbb{R}) \quad i = 1, \dots, p$
f, g_i convexes $\quad i = 1, \dots, p$
$K = \{x \in E,\ g_i(x) \leq 0 \quad \forall i\}$

Soit $\bar{x} \in K$ tq $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}^+$ tq $Df(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Dg_i(\bar{x}) = 0$
$\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0 \ \forall i$

alors $f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in K$

démonstration :

$$Df(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Dg_i(\bar{x}) = 0$$

① Soit $x \in K$. on va montrer que $Df(\bar{x})(x - \bar{x}) \geq 0$
Soit $i \in I(\bar{x}) = \{j \in \{1, \dots, p\},\ g_j(\bar{x}) = 0\}$
on a $g_i(\bar{x}) = 0$
Comme $x \in K$, on a $g_i(x) \leq 0$, et par convexité de g_i

$$g_i(\bar{x} + t(x - \bar{x})) = g_i(tx + (1-t)\bar{x}) \leq \underbrace{t g_i(x)}_{\leq 0} + (1-t) g_i(\bar{x})$$

si $t \in [0, 1]$

$$\frac{g_i(\bar{x} + t(x - \bar{x})) - g_i(\bar{x})}{t} \leq 0 \quad \forall t \in]0, 1[$$

lorsque $t \to 0$ on obtient

$$Dg_i(\bar{x})(x - \bar{x}) \leq 0$$

$$Df(\bar{x})(x - \bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i Dg_i(\bar{x})(x - \bar{x}) = 0$$

on a donc $Df(\bar{x})(x - \bar{x}) \geq 0 \quad \forall x \in K$.

2) Soit $x \in K$. On montre $f(x) \geq f(\bar{x})$

par convexité de f on a :

$$f(\bar{x}+t(x-\bar{x})) \leq t f(x) + (1-t) f(\bar{x}) \qquad \forall t \in]0,1[$$

$$\frac{f(\bar{x}+t(x-\bar{x})) - f(\bar{x})}{t} \leq f(x) - f(\bar{x}) \qquad \forall t \in]0,1]$$

qd $t \to 0$ on obtient : $\underbrace{0 \leq Df(\bar{x})(x-\bar{x})}_{\text{vu à l'étape (1)}} \leq f(x) - f(\bar{x})$

on a donc $f(x) \geq f(\bar{x}) \quad \forall x \in K.$

Conséquence des 2 théorèmes précédents :

> E e.v.n.
> $f, g_i : E \to \mathbb{R}$ différentiables $\forall i \in \{1, \dots, p\}$
> f, g_i convexes $\forall i \in \{1, \dots, p\}$
> $\exists x_0 \in E \quad g_i(x_0) < 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}$
> Soit $\bar{x} \in K = \{x \in E,\ g_i(x) \leq 0 \ \forall i\}$
>
> Alors $\left(f(\bar{x}) \leq f(x) \ \forall x \in K\right) \iff \left(\begin{array}{l} \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}^+ \\ Df(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Dg_i(\bar{x}) = 0 \\ \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, p\} \end{array}\right)$

7°) Introduction du Lagrangien, point selle.

1) $\left(\begin{array}{l} E \text{ e.v.n.} \\ f, g_i \in C^1(E, \mathbb{R}) \quad i = 1, \dots, p \qquad ([illegible]) \\ K = \{x \in E,\ g_i(x) \leq 0 \ \forall i \in \{1, \dots, p\}\}, \text{ on suppose } K \neq \emptyset \end{array}\right.$

On cherche $\bar{x}$ solution de (1) $\begin{cases} \bar{x} \in K \\ f(\bar{x}) \leq f(x) & \forall x \in K. \end{cases}$

Définition

Sous les hypothèses (H) :

1) On définit $L : E \times C^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

où $C^+ = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)^t \in \mathbb{R}^p \ ; \lambda_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}$

par $\boxed{L(x, \lambda) = f(x) + \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(x)}_{\lambda \cdot g(x)}}$ $\quad g(x) = (g_1(x), \dots, g_p(x))^t$

2) $\left| \begin{array}{l} x \in E \\ x \text{ est la variable "primale"} \end{array} \right.$

$\left| \begin{array}{l} \lambda \in C^+ \\ \lambda \text{ est la variable "duale"} \end{array} \right.$

N.B. $f, g_i \in C^1(E, \mathbb{R})$

λ fixé. $L(\cdot, \lambda) \in C^1(E, \mathbb{R})$

$$D_x L(x, \lambda) = Df(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Dg_i(x)$$

Sous les hyp. du th. de Kuhn Tucker :

$$\bar{x} \in \underset{K}{\operatorname{argmin}} f \Rightarrow \exists \lambda \in C^+, \ D_x L(\bar{x}, \lambda) = 0$$

$$\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0 \quad \forall i$$

$$(\lambda \cdot g(\bar{x}) = 0)$$

Définition

Sous les hypothèses Ⓗ on a défini $L : E \times C^+ \to \mathbb{R}$
Soit $(\bar{x}, \mu) \in E \times C^+$
$(\bar{x}, \mu)$ est un point selle de L si

$$L(\bar{x}, \lambda) \leq L(\bar{x}, \mu) \leq L(x, \mu) \qquad \forall x \in E, \ \forall \lambda \in C^+$$

Théorème

Sous les hyp. Ⓗ
Soit $(\bar{x}, \mu) \in E \times C^+$ point selle de L sur $E \times C^+$

alors $\left| \begin{array}{l} \bar{x} \in K \\ f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in K \end{array} \right.$

démonstration

$(\bar{x}, \mu) \in E \times C^+$

$L(\bar{x}, \lambda) \leq L(\bar{x}, \mu) \leq L(x, \mu) \qquad \forall x \in E \quad \forall \lambda \in C^+$

étape 1 : On montre $\bar{x} \in K$:

$L(\bar{x}, \lambda) \leq L(\bar{x}, \mu) \qquad \forall \lambda \in C^+$

$f(\bar{x}) + \lambda \circ g(\bar{x}) \leq f(\bar{x}) + \mu \circ g(\bar{x}) \qquad \forall \lambda \in C^+$

$\sum_{i=1}^{p} (\lambda_i - \mu_i)\, g_i(\bar{x}) \leq 0 \qquad \forall \lambda \in C^+$

Soit $i \in \{1, \dots, p\}$

1^er cas : $\mu_i > 0$. Montrons alors $g_i(\bar{x}) = 0$

① On prend $\lambda_j = \mu_j$ si $j \neq i$
$\lambda_i = \frac{\mu_i}{2}$ on obtient $-\frac{\mu_i}{2} g_i(\bar{x}) \leq 0$

③ on prend $\lambda_j = \mu_j$ si $j \neq i$
$\lambda_i = 2\mu_i$

$\underline{\mu_i g_i(\bar{x}) \geqslant 0}$

on a donc $\mu_i g_i(\bar{x}) = 0$ d'où $\boxed{g_i(\bar{x}) = 0}$

$$\sum_{i=1}^{p} (\lambda_i - \mu_i)\, g_i(\bar{x}) \leqslant 0 \quad \forall \lambda \in C^+$$

__2ème cas__ : $\mu_i = 0$
on prend $\lambda_j = \mu_j$ $j \neq i$
$\lambda_i = 1$
on obtient $\boxed{g_i(\bar{x}) \leqslant 0}$

__Résumé__ : On a $g_i(\bar{x}) \leqslant 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}$
$g_i(\bar{x}) = 0 \rightarrow$ si $\mu_i > 0$

on a donc $\bar{x} \in K$ et $\mu \cdot g(\bar{x}) = 0$

__étape 2__ :
$L(\bar{x}, \mu) \leqslant L(x, \mu) \quad \forall x \in E$
Soit $x \in K$, on a donc

$$f(\bar{x}) + \underbrace{\mu \cdot g(\bar{x})}_{0} \leqslant f(x) + \underbrace{\mu \cdot g(x)}_{\leqslant 0} \leqslant f(x)$$

on a donc $f(x) \geqslant f(\bar{x}) \quad \forall x \in K.$

* __Idée des méthodes de dualité__ :

au lieu de chercher $\bar{x}$ solution de (1), on cherche $(\bar{x}, \mu)$ point selle de L.

$\lambda \in C^+$ fixé

$$(D_\lambda) \begin{cases} x_\lambda \in E \\ L(x_\lambda, \lambda) \leq L(x, \lambda) \quad \forall x \in E \end{cases}$$

D_λ a-t-il une solution ?

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_i \underbrace{\lambda_i}_{\geq 0} g_i(x)$$

__Proposition__

> E e.v.n., E Banach réflexif
> $f, g_i \in C(E, \mathbb{R})$
> f strictement convexe
> g_i convexe
> $f(x) \to +\infty$ qd $\|x\| \to +\infty$
> $\inf_{x \in E} g_i(x) > -\infty \quad \forall i$
>
> __Alors__ $\forall \lambda \in C^+ \quad \exists !\, x_\lambda$ solution de D_λ

__démonstration__ (exercice)

__Définition__

> Sous les hyp. (H), on suppose que $\forall \lambda \in C^+$, $\exists x_\lambda$ solution de D_λ
> On pose :
> $$\underline{M(\lambda)} = L(x_\lambda, \lambda) = \inf_{x \in E} L(x, \lambda) \qquad \lambda \in C^+$$
> $$M : C^+ \to \mathbb{R}$$

proposition

> Sous les hyp (H), on suppose que $\forall \lambda \in C^+$, $\exists x_\lambda$ solution de P_λ
>
> Alors Π est concave $\quad (\Pi : C^+ \to \mathbb{R})$

(Π concave $\Leftrightarrow$ $-\Pi$ convexe)

démonstration

Soient $\lambda, \mu \in C^+$, $t \in [0,1]$. on veut montrer que

$$\Pi(t\lambda + (1-t)\mu) \geq t\Pi(\lambda) + (1-t)\Pi(\mu)$$

(NB : on a bien $t\lambda + (1-t)\mu \in C^+$)

$$\begin{aligned} L(x, t\lambda + (1-t)\mu) &= f(x) + (t\lambda + (1-t)\mu) \cdot g(x) \\ &= tf(x) + (1-t)f(x) + t\lambda \cdot g(x) + (1-t)\mu \cdot g(x) \\ &= tL(x,\lambda) + (1-t)L(x,\mu) \qquad \forall x \in E) \end{aligned}$$

$\Pi(t\lambda + (1-t)\mu) \geq t\Pi(\lambda) + (1-t)\Pi(\mu)$ en prenant $x = x_{t\lambda+(1-t)\mu}$

Définition

> Sous les hyp. (H)
>
> 1) (primal) = (P) $\begin{cases} \bar{x} \in K \\ f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in K \end{cases}$
>
> 2) (Dual) = (D) $\begin{cases} \mu \in C^+ \\ \Pi(\mu) \geq \Pi(\lambda) \quad \forall \lambda \in C^+ \end{cases}$
>
> avec $\Pi(\lambda) = \inf_{x \in E} (L(x, \lambda))$

3) Soit μ solution de $(\mathcal{D})$

x_μ ——— $(\mathcal{P}_\mu)$

(x_μ, μ) est un maximum de L

$$L(x_\mu, \mu) = \Pi(\mu) = \max_{\lambda \in C^+} \Pi(\lambda) = \max_{\lambda \in C^+} \left(\inf_{x \in E} L(x, \lambda) \right)$$

Théorème

Sous hyp (H)
$(\bar{x}, \mu) \in E \times C^+$ point selle de L sur $E \times C^+$

Alors | μ est solution de $(\mathcal{D})$
| et $\bar{x}$ est solution de $(\mathcal{P})$

démonstration :
$(\bar{x}, \mu) \in E \times C^+$ pt selle de L

$$\underbrace{L(\bar{x}, \lambda) \leq L(\bar{x}, \mu)}_{(2)} \underbrace{\leq L(x, \mu)}_{(1)} \quad \forall x \in E, \ \forall \lambda \in C^+$$

① $\bar{x}$ solution de $(\mathcal{P})$ déjà vu

② montrons que μ est solution de $(\mathcal{D})$

(1) donne $\bar{x} = x_\mu$ solution de $(\mathcal{P}_\mu)$

$$L(\bar{x}, \mu) = L(x_\mu, \mu) = \Pi(\mu)$$

(2) donne $\Pi(\lambda) = \inf_{x \in E} L(x, \lambda) \leq L(\bar{x}, \lambda) \leq \Pi(\mu) \quad \forall \lambda \in C^+$

$$\Pi(\lambda) \leq \Pi(\mu) \quad \forall \lambda \in C^+.$$

on a donc μ sol. de $(\mathcal{D})$

2ème idée des méthodes de dualité.

trouver μ solution de $(\mathcal{D})$ (on trouvera ainsi $\bar{x}$ solution de $(\mathcal{P})$)

NE : dérivabilité de Π

hyp (H)

$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda \cdot g(x)$

On suppose que $\forall \lambda \in C^+$, P_λ admet une solution et une seule : $x_\lambda \in E$.

On suppose que $\lambda \mapsto x_\lambda$ est dérivable.

dans ce cas Π est dérivable en λ

et $D\Pi(\lambda) = \cancel{D_x L(x_\lambda, \lambda) \circ D_\lambda x_\lambda} + D_\lambda L(x_\lambda, \lambda)$

$$L(x_\lambda, \lambda) = \operatorname*{Inf}_{x \in E} L(x, \lambda)$$

on a donc $D_x L(x_\lambda, \lambda) = 0$

(cond. necessaire d'optimalité pour un pb d'optimisation sans contrainte)

donc $D\Pi(\lambda) = D_\lambda L(x_\lambda, \lambda)$

$\Pi : C^+ \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$

$D\Pi(\lambda) \in \mathbb{R}^p$

$$D\Pi(\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda_p} \end{bmatrix}$$

$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda \cdot g(x)$

$$\boxed{\nabla \Pi(\lambda) = g(x_\lambda)}$$

solution de (P_λ)

II Algorithmes pour l'optimisation avec contraintes

$E = \mathbb{R}^N$

1) Algorithmes du gradient avec projection sur K

Rappel :

K convexe fermé non vide de E ($E = \mathbb{R}^N$ ou E Hilbert)

$\forall x_0 \in E$, $\exists!\, \bar{x} \in K$ tq

$$\|\bar{x} - x_0\| \leq \|y - x_0\| \quad \forall y \in K$$

on note $\bar{x} = P_K x_0$

NB :

E Hilbert, K convexe fermé non vide, $x_0 \in E$, $P_K x = \underset{K}{\operatorname{argmin}}\, f$

$f(x) = \|x - x_0\|$

$f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$

$f \in C^1$.

K convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^N$

on cherche $\bar{x}$ tq $\begin{cases} \bar{x} \in K \\ f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in K \end{cases}$

Algorithme 1 : Algorithme du gradient à pas fixe avec projection sur K

$\rho > 0$ donné

1) initialisation : $x_0 \in K$

2) itération : x_n connu

$$\tilde{x}_{n+1} = x_n - \rho \nabla f(x_n)$$

$$x_{n+1} = P_K(\tilde{x}_{n+1})$$

Algorithme 2 : Algo. du gradient à pas optimal avec projection sur K

1) init : $x_0 \in K$

2) itération : x_n connu

$$\tilde{x}_{n+1} = x_n - \rho_n \nabla f(x_n)$$

$\rho_n \geq 0$ optimal ds la direction $-\nabla f(x_n)$ (sans contrainte)

$$x_{n+1} = P_K(\tilde{x}_{n+1})$$

Autres algorithmes :

$\left.\begin{array}{l}\to \text{gradient à pas variable} \\ \text{ou quasi Newton. (BFGS)}\end{array}\right\} \to \tilde{x}_{n+1}$

$\to \quad x_{n+1} = P_K(\tilde{x}_{n+1})$

Problème : Calculer P_K

Exemples simples :

1) $K = C^+ = \{x \in \mathbb{R}^N ;\ x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}\}$

$x \in \mathbb{R}^N$, $P_K x = y$; $y_i = x_i^+ = \max(x_i, 0)$

2) $K = \{x \in \mathbb{R}^N ;\ \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i,\ i \in \{1, \dots, N\}\}$

$(\alpha_i, \beta_i)_{i \in \{1, \dots, N\}}$ donnés. $(\alpha_i \leq \beta_i)$

$x \in \mathbb{R}^N$ $P_K x = y = (y_1, \dots, y_N)^t$ avec
$\begin{array}{|lll} y_i = \alpha_i & \text{si} & x_i \leq \alpha_i \\ y_i = x_i & \text{si} & \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i \\ y_i = \beta_i & \text{si} & x_i \geq \beta_i \end{array}$

NB : 1) Dans de nombreux cas on ne sait pas calculer explicitement P_K

2) Dans de nombreux cas, K est non convexe (ex : $K = \{x,\ \varphi_i(x) = c_i\ \forall i\}$)

Théorème

> $E = \mathbb{R}^N$
> $f \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$
> K convexe fermé non vide de E
> on suppose :
> 1) $\exists \alpha > 0$, $(\nabla f(x) - \nabla f(y)) \cdot (x - y) \geq \alpha (x-y)\cdot(x-y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^N$
> 2) $\exists k > 0$, $|\nabla f(x) - \nabla f(y)| \leq k |x - y|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^N$
>
> ($|\cdot|$ norme euclidienne de $\mathbb{R}^N$)
>
> Alors
>
> 1) $\exists!\ \bar{x} \in K$, $f(\bar{x}) \leq f(x)$, $\forall x \in K$
>
> 2) Soit $0 < \rho < \dfrac{2\alpha}{k}$ et $(x_n)_n$ définie par
>
> $$\begin{cases} x_{n+1} = P_K\left(x_n - \rho \nabla f(x_n)\right) & \forall n \in \mathbb{N} \\ x_0 \in K \end{cases}$$
>
> alors $x_n \to \bar{x}$ qd $n \to +\infty$

démonstration :

1) de la 1ère hypoth. ($\exists \alpha > 0, \dots$) on déduit

① $f(x) \to +\infty$ qd $|x| \to +\infty$

② f strict. convexe

à savoir faire

Comme K convexe, fermé non vide, on a $\exists!\ \bar{x}$, ($f(\bar{x}) \leq f(x)$ $\forall x \in K$, $\bar{x} \in K$.

2) $0 < \rho < \frac{2\alpha}{k}$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$

soit $h : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$

$$x \longmapsto h(x) = P_K(x - \rho \nabla f(x))$$

montrons :

<u>1ère étape</u> : x pt fixe de $h \iff x = \bar{x}$ $(\forall \rho > 0)$

<u>2ème étape</u> : h strict. contractante. (car $0 < \rho < \frac{2\alpha}{k}$)

<u>conséquence de la 2nde étape</u> : h admet un et un seul point fixe.

La suite définie par $x_{n+1} = h(x_n)$ converge vers le pt fixe de h (th. du pt. fixe)

$$x_{n+1} = P_K(x_n - \rho \nabla f(x_n))$$

<u>conséquence de la 1ère étape</u> :

$x_n \to \bar{x}$ (car $\bar{x}$ est le pt fixe de h)

<u>1ère étape</u> :

x pt fixe de $h \iff x = h(x) \iff x = P_K(x - \rho \nabla f(x))$

<u>Rappel</u> : caractérisation de P_K :

$y \in K$

$y = P_K(x) \iff (x-y)\cdot(z-y) \leq 0 \quad \forall z \in K$

x pt fixe de $h \iff \begin{cases} x \in K \\ (x - \rho \nabla f(x) - x)\cdot(z - x) \leq 0 & \forall z \in K \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x \in K \\ \nabla f(x)\cdot(z-x) \geq 0 & \forall z \in K \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x \in K \\ f(x) \leq f(z) & \forall z \in K \end{cases}$ (déjà vu, car f convexe)

2nde étape :

$0 < \rho < \frac{2\alpha}{k}$. h est strictement contractante ?

on veut montrer $\exists \beta > 0$, $\beta < 1$ $|h(x) - h(y)| \leq \beta |x - y|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^N$

$$|h(x) - h(y)|^2 = |P_K(x - \rho \nabla f(x)) - P_K(y - \rho \nabla f(y))|^2$$

$$\leq |x - \rho \nabla f(x) - y + \rho \nabla f(y)|^2 \quad \text{(car } P_K \text{ est contractante.)}$$

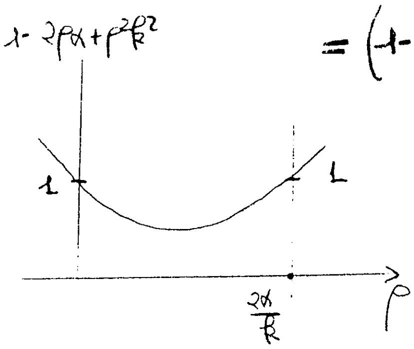
(déjà vu en TD)

on développe.

$$|h(x) - h(y)|^2 \leq |x-y|^2 - 2\rho(x-y) \cdot (\nabla f(x) - \nabla f(y)) + \rho^2 |\nabla f(x) - \nabla f(y)|^2$$

$$\leq |x-y|^2 - 2\rho\alpha |x-y|^2 + \rho^2 k^2 |x-y|^2$$

$$= (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 k^2) |x-y|^2$$



$$1 - 2\rho\alpha + \rho^2 k^2 = \beta^2 < 1 \quad \text{car} \quad 0 < \rho < \frac{2\alpha}{k}$$

$$|h(x) - h(y)| \leq \beta |x-y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N.$$

2) Méthode de dualité.

Hypothèse :

(H) $\begin{cases} f, g_i \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) & i = 1, .., p \\ K = \{x \in \mathbb{R}^N, g_i(x) \leq 0 \quad \forall i \in \{1, .., p\}\} \end{cases}$

(P) (primal) $\begin{cases} \bar{x} \in K \\ f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in K \end{cases}$

$\mu \in C^+$

$$(P_\mu) \begin{cases} x_\mu \in \mathbb{R}^N \\ L(x_\mu, \mu) \leq L(x, \mu) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

$$L(x, \mu) = f(x) + \mu \cdot g(x) \qquad g = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_p \end{bmatrix}$$

$$\underset{\text{(dual)}}{(D)} \begin{cases} \mu \in C^+ \\ \Pi(\mu) \geq \Pi(\lambda) \quad \forall \lambda \in C^+ \end{cases}$$

avec $\Pi(\lambda) = L(x_\lambda, \lambda)$

<u>Rappels</u> :

Sous les hyp. (H)

1) $(\bar{x}, \mu)$ point selle sur $\mathbb{R}^N \times C^+$ de $L \Rightarrow \begin{cases} 1) \ \bar{x} \text{ solution de } (P) \\ 2) \ \mu \text{ ——— } (D) \end{cases}$

2) avec des hypothèses convenables
$\nabla \Pi(\mu) = g(x_\mu)$

(x_μ solution de (P_μ), point de minimisation sans contraintes)

3) avec des hyp. convenables on a : μ sol de (D) $\Rightarrow$ (x_μ, μ) point selle de L
$\Downarrow$
x_μ solution de (P)

<u>Idée des méthodes de dualité</u> :

Chercher une solution de (D) (pb dual)

intérêt : (D) est un pb. d'optimisation avec une contrainte simple ($\mu \in C^+$)

inconvénient : Calculer $\nabla\Pi(\mu)$
en fait $\nabla\Pi(\mu) = g(x_\mu)$
x_μ solution d'un pb de minimisation sans contraintes

(Rappel : en dimension finie : $D\Pi(\mu)(\lambda) = \nabla\Pi(\mu)\cdot\lambda$

Algorithme d'Uzawa :

(c'est l'algo. du gradient à pas fixe avec projection sur C^+ pour maximiser Π

> on se donne $\rho > 0$
>
> 1) Initia : $\mu_0 \in C^+ \subset \mathbb{R}^p$
>
> 2) Itération : μ_n connu ($\mu_n \in C^+$)
> $\mu_{n+1} = P_{C^+}(\mu_n + \rho\nabla\Pi(\mu_n))$

calcul de $\nabla\Pi(\mu_n)$:

* on calcule $x_n = x_{\mu_n}$ solution de (P_{μ_n}) $\begin{cases} x_{\mu_n} \in \mathbb{R}^N \\ L(x_{\mu_n}, \mu_n) \leq L(x, \mu_n) \\ \forall x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$

(c'est un pb. de minimisation sans contraintes)

* $\nabla\Pi(\mu_n) = g(x_n) = \begin{bmatrix} g_1(x_n) \\ \vdots \\ g_p(x_n) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$

calcul de P_{C^+} :

$$\mu_n + \rho\nabla\Pi(\mu_n) = \mu_n + \rho\, g(x_n) = \tilde{\mu}_{n+1}$$

$$\mu_{n+1} = P_{C^+}(\tilde{\mu}_{n+1}) = \begin{pmatrix} [(\mu_n)_1 + \rho g_1(x_n)]^+ \\ \vdots \\ [\ \ ]^+ \end{pmatrix}$$

NB : On a donc remplacé un pb. d'optimisation avec contraintes par une suite de pb. d'optimisation sans contraintes

Théorème (Convergence d'Uzawa)

Sous hyp (H)

1) $\exists \alpha > 0$, $(\nabla f(x) - \nabla f(y)) \cdot (x-y) \geq \alpha |x-y|^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$

2) $\exists k \quad |\nabla f(x) - \nabla f(y)| \leq k |x-y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$

on suppose $\forall \lambda \in C^+$, $\exists x_\lambda$ solution de (D_λ)

$0 < \rho < \dfrac{2\alpha}{k}$

Alors :

Soit $(\mu_n)_n$ suite donnée par l'algorithme d'Uzawa.

$x_n = x_{\mu_n}$, on a :

$$\begin{cases} x_n \longrightarrow \bar{x} \quad \text{qd } n \to +\infty \quad \bar{x} = \underset{K}{\operatorname{argmin}} f \\ (\mu_n)_n \text{ est bornée} \end{cases}$$

(si $\mu_{n_k} \to \mu$ qd $k \to \infty$

$(\bar{x}, \mu)$ est un point selle de L et donc μ solution de (D))

(dém. admise)

NB : il y a d'autres alg. liés à la dualité (ex : Arrow - Hurwicz)

3°) Méthodes de pénalisation :

a) Méthodes externes :

$$(P) \begin{cases} \bar{x} \in K \\ f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in K \end{cases}$$

$$K = \{x \in \mathbb{R}^N,\ g_i(x) \leqslant 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}\}$$

$f, g_i \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$

<u>$\varepsilon > 0$</u> :

$$f_\varepsilon(x) = f(x) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{p} \left(g_i(x)\right)^+ \qquad x \in \mathbb{R}^N$$

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} \bar{x}_\varepsilon \in \mathbb{R}^N \\ f_\varepsilon(\bar{x}_\varepsilon) \leqslant f_\varepsilon(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

<u>idée</u> : on résoud (P_ε) au lieu de (P)

<u>question</u> : En quel sens $\bar{x}_\varepsilon$ est-elle proche de $\bar{x}$?

<u>Théorème</u>

$f, g_i \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $i = 1, \dots, p$ (C^1 est inutile)

$f(x) \to +\infty$ qd $|x| \to +\infty$

$K = \{x \in \mathbb{R}^N,\ g_i(x) \leqslant 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}\}$. on suppose $K \neq \emptyset$

<u>alors</u>

1) (P) admet au moins une solution
2) (P_ε) ______________________
3) Soit $(x_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ une famille de solutions de (P_ε)

alors $\exists C > 0$; $\|x_\varepsilon\| \leqslant C \quad \forall \varepsilon > 0$

4) Soit $(\varepsilon_k)_k$ tq $\varepsilon_k \to 0$ qd $k \to +\infty$
$x_{\varepsilon_k} \to \tilde{x}$ qd $k \to +\infty$

alors $\tilde{x}$ est solution de (P)

> 5) Si (P) admet <u>une seule solution</u>
> alors $x_\varepsilon \longrightarrow \bar{x}$ qd $\varepsilon \to 0$
> et $\bar{x} = \arg\min\limits_{K} f$

(dém : admis)

(b) Méthodes intérieures

On se donne $\varphi : K \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$$\varphi(x) \longrightarrow +\infty \quad \text{qd } x \to \partial K$$

$\varphi = +\infty$ si $x \notin K$ (x tend vers le bord de K)

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} x_\varepsilon \in \mathbb{R}^N \\ f_\varepsilon(x_\varepsilon) \leq f_\varepsilon(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

$$f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon \varphi(x)$$

<u>NB</u> : x_ε solution de $(P_\varepsilon) \Rightarrow x_\varepsilon \in \mathring{K}$

on peut aussi montrer $x_\varepsilon \to \bar{x}$ avec des hyp. convenable

<u>ex</u> : $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{M} \frac{-1}{g_i(x)}$

4°) Méthodes directes

Méthode de relaxation :

minimiser direction par direction pour passer de x_n à x_{n+1}.

Université de Savoie, Maîtrise de Mathématiques
CDO, TD, Feuille 1, Octobre 1992

Exercices sur le cours "Différentiabilité"

Exercice 1 **(Différentiabilité de la norme)**

1. Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé ; montrer que l'application : $x \mapsto ||x||$ n'est pas différentiable en 0.
2. on suppose maintenant que E est un espace de Hilbert réel, on définit :
$$\varphi : E \to \mathbb{R} \,;\, \varphi(x) = (x, x)$$
$$\psi : E \to \mathbb{R} \,;\, \psi(x) = ||x||.$$
Montrer que φ est différentiable en tout point de E. Calculer $D\varphi(x)y$ pour $(x,y) \in E \times E$. En déduire que ψ est différentiable en tout point de $E \setminus \{0\}$. Calculer $D\psi(x)y$, pour $x \in E \setminus \{0\}$ et $y \in E$.

Exercice 2 **(Différentiabilité de la norme L^p)**
Soient $p > 1$ et $E = L^p(]0,1[)$; on rappelle que E muni de la norme $||.||_p$ définie par :
$$||u||_p = \left(\int_0^1 |u(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ pour } u \in L^p,$$
est un espace de Banach (et de Hilbert si $p = 2$). On pose, pour $u \in E$, $F(u) = ||u||_p^p$.

1. On suppose $p \geq 2$. Montrer que l'application F est différentiable en tout point de E et calculer $DF(u).h$, pour u et $h \in E$. Montrer que $u \mapsto DF(u)$ est continue.
2. On suppose maintenant $p \in]1, 2[$, et on définit la fonction φ suivante :
$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x|x|^{p-2} \text{ si } x \neq 0, \\ \varphi(0) &= 0. \end{aligned}$$
   (a) Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq 2|x - y|^{p-1}$.
   (b) Montrer que $F \in C^1(E, \mathbb{R})$, et calculer, pour u et $h \in E$, $DF(u).h$.
3. Déduire des questions 1. et 2. que, pour $p \in]1, +\infty[$, l'application $u \mapsto ||u||_p$ est de classe C^1 de $E \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3 **(Théorème des accroissements finis)** Soient $(E, ||.||_E)$ et $(F, ||.||_F)$ des espaces vectoriels normés, et f une application de E dans F ; pour $(a,b) \in E \times E$, on pose : $[a,b] = \{ta + (1-t)b,\ t \in [0,1]\}$, et $]a,b[= \{ta + (1-t)b,\ t \in]0,1[\}$. On suppose f continue en tout point de $[a,b]$, et différentiable en tout point de $]a,b[$. On pose :
$$M = \sup_{c \in]a,b[} ||Df(c)||_{\mathcal{L}(E,F)}.$$

1. Soit $\varepsilon > 0$, on pose :
$A = \{T \in [0,1] \text{ t.q. } \forall t \in [0,T],\ ||f(a + t(b-a)) - f(a)||_F \leq (M + \varepsilon)t||b-a||_E + \varepsilon\}$, et $\overline{T} = \sup\{T \in A\}$.
   (a) Montrer que $\overline{T} > 0$.
   (b) Montrer que $\overline{T} \in A$.
   (c) Soit $T \in A$, tel que $0 < T < 1$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que $T + \eta \in A$ [utiliser la différentiabilité de f en $a + T(b-a)$].
   (d) Montrer que $\overline{T} = 1$.
2. Montrer que :
$$||f(b) - f(a)||_F \leq M||b - a||_E.$$

Exercice 1

1) $(E, \|\cdot\|)$ e.v.n.

$f : x \longmapsto \|x\|$ pas diff. en 0 ;

$E \longrightarrow \mathbb{R}$

<u>méthode 1</u> : Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$t \longmapsto F(t) = \|te\|_E \quad \text{avec } e \in E \quad \|e\|_E = 1$$

$$= |t| \, \|e\|_E$$

$$= |t|$$

Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow E$

$$t \longmapsto te$$

Alors $F = f \circ g$

or F n'est pas différentiable en 0

g diff en 0 $\left(\underset{h \in \mathbb{R}}{g(h)} = g(0) + eh \right)$

donc <u>f n'est pas diff en 0</u> $(= g(0))$

<u>méthode 2</u> :

Supposons que f soit diff. en 0.

alors $\|h\| = 0 + T(h) + \|h\| \, \varepsilon_1(h)$

$\|-h\| = 0 + T(-h) + \|h\| \, \varepsilon_2(h)$

$= -T(h) + \|h\| \, \varepsilon(h)$

$\Rightarrow 2\|h\| = \|h\| \, \varepsilon(h) \qquad \Rightarrow \quad \varepsilon(h) = 2 \underset{h \to 0}{\not\longrightarrow} 0$

⚠ On ne peut pas montrer qu'une application n'est pas diff. en un point en "montrant" que sur son écriture ("la plus simple") de $f(x+h)$ on n'ait pas $f(x+h) = f(x) + T(h) + \|h\| \, \varepsilon(h)$. (car on peut trouver d'autres écriture de $f(x+h)$)

2) E Hilbert réel

$$\varphi : E \to \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto \varphi(x) = (x, x)$$

$$\psi : E \to \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto \psi(x) = \|x\| = (x,x)^{1/2}$$

• Soit $x \in E$, $h \in E$

$$\varphi(x+h) = (x+h, x+h) = (x,x) + 2(x,h) + (h,h)$$
$$= \varphi(x) + 2(x,h) + \|h\| \underbrace{\|h\|}_{\to 0 \text{ qd } \|h\| \to 0}$$

$2(x,\cdot) : E \to \mathbb{R}$ est :

- • linéaire (évident)
- • continue, car $\forall h \in E$ $|2(x,h)| \leqslant \underbrace{2\|x\|}_{cte.} \|h\|$ (Cauchy-Schwartz)

$$\Rightarrow \boxed{D\varphi(x)(y) = 2(x,y)}$$

• Soit $\lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$
$t \longrightarrow \sqrt{t}$ λ différentiable sur $\mathbb{R}^+_*$ et $\lambda'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$

$\psi = \lambda \circ \varphi$ $\varphi(x) = (x,x) \Rightarrow \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

φ dérivable en $x \in E$ donc en $x \in E \setminus \{0\}$
λ ———— $\mathbb{R}^+_*$ donc en $\varphi(x)$ $x \in E \setminus \{0\}$

donc ψ dérivable en tout point de $E \setminus \{0\}$
Soit $x \in E \setminus \{0\}$

$$D\psi(x) = \underbrace{D(\lambda \circ \varphi)(x)}_{\in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^+)} = \underbrace{D\lambda(\varphi(x))}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)} \circ \underbrace{D\varphi(x)}_{\in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^+)}$$

$$D\varphi(x)(y) = \frac{1}{2\sqrt{(x,x)}}\, 2(x,y)$$

$$\boxed{D\varphi(x)(y) = \frac{(x,y)}{\|x\|}}$$

N.B. : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad a \in \mathbb{R}$

$Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ / $Df(a) : x \longrightarrow \alpha x$, $\alpha = f'(a)$

Exercice 2 $\quad p > 1$. $E = L^p(]0,1[)$. $\|u\|_p = \left(\int_0^1 |u(t)|^p\, dt\right)^{1/p}$ pour $u \in L^p$

$(E, \|\cdot\|_p)$ est un esp. de Banach (Hilbert pour $p=2$)

1) $F : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$\quad u \longmapsto F(u) = \|u\|_p^p$ $\qquad u, h \in E$

- $p=2$: (voir exercice 1) (E Hilbert) on a $\boxed{DF(u).h = 2(u,h) = 2\int_0^1 u(t)h(t)\, dt}$

- $p>2$:

$$F(u+h) = \int_0^1 |u(t)+h(t)|^p\, dt$$

$$F(u+h) - F(u) = \int_0^1 \underbrace{\left(|u(t)+h(t)|^p - |u(t)|^p\right)}\, dt$$

essayons de réécrire ceci à l'aide de développements limités.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \varphi(x) = |x|^p = (-1)^p x^p$$

$$\varphi'(x) = (-1)^p p\, x^{p-1} = p\, x\, |x|^{p-2}$$

$$\varphi''(x) = (-1)^p p(p-1) x^{p-2} = p(p-1)\, |x|^{p-2}$$

donc en fixant t on a

$$|u(t) + h(t)|^p = |u(t)|^p + h(t)\, p\, u(t)\, |u(t)|^{p-2} + \frac{h^2(t)}{2} p(p-1) |u(t) + \theta h(t)|^{p-2}$$

$\theta \in]0,1[$

$$\Rightarrow F(u+h) - F(u) = p \int_0^1 h(t) u(t) |u(t)|^{p-2} \, dt$$

$$+ \frac{p(p-1)}{2} \int_0^1 h^2(t) |u(t) + \theta h(t)|^{p-2} \, dt$$

(le θ va dépendre de t dans l'intégrale)

<u>a-t-on</u> : $\underset{E \longrightarrow \mathbb{R}}{h \longmapsto \int_0^1 h(t) u(t) |u(t)|^{p-2} dt} \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$?

- linéarité (évidente)
- continuité ?

$$\left| \int_0^1 h(t) u(t) |u(t)|^{p-2} dt \right| \leqslant \int_0^1 |h(t)|\, |u(t)|^{p-1} dt$$

or $\frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1$ donc d'après l'Inégalité de Hölder (ici $q = \frac{p-1}{p}$)

on a $\left| \int_0^1 h(t) u(t) |u(t)|^{p-2} \right| \leqslant \left(\int_0^1 |h(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_0^1 |u(t)|^{(p-1)\frac{p}{p-1}} dt \right)^{\frac{p-1}{p}}$

$\|h\|_{L^p(0,1)}$ $\quad$ $< \infty$ car $u \in L^p(0,1)$

$\Rightarrow$ continuité

Il reste donc à montrer que $\int_0^1 h^2(t)\,|u(t)+\theta h(t)|^{p-2}\,dt = \|h\|_E\, \varepsilon(h)$; $\varepsilon(h) \to 0$ qd $\|h\|_E \to 0$

$\theta \in [0,1]$ donc $|u(t)+\theta h(t)| \leqslant |u(t)| + |h(t)|$

$$|u(t)+\theta h(t)|^{p-2} \leqslant (|u(t)| + |h(t)|)^{p-2}$$

or $\boxed{(a+b)^n \leqslant 2^n(a^n+b^n)}$ car $a+b \leqslant 2a$ ou $\leqslant 2b$

$(a \geqslant 0 \quad b \geqslant 0)$

$(a+b)^n \leqslant (2a)^n$ ou $(2b)^n$

$\Rightarrow (a+b)^n \leqslant \sup(2^n a^n, 2^n b^n)$
$\leqslant 2^n(a^n+b^n)$

donc $|u(t)+\theta h(t)|^{p-2} \leqslant 2^{p-2}\left(|u(t)|^{p-2} + |h(t)|^{p-2}\right)$

$$\int_0^1 h^2(t)\,|u(t)+\theta h(t)|^{p-2}\,dt \leqslant 2^{p-2}\int_0^1 h^2(t)\left(|u(t)|^{p-2}+|h(t)|^{p-2}\right)dt$$

$$\leqslant 2^{p-2}\left(\int_0^1 h^2(t)\,|u(t)|^{p-2}\,dt + \|h\|_p^p\right)$$

on applique Hölder $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=1$, $p_1=\frac{p}{2}$, $q_1=\frac{p}{p-2}$

$$\leqslant 2^{p-2}\left(\left(\int_0^1 h^p(t)\,dt\right)^{2/p}\left(\int_0^1 |u(t)|^p\,dt\right)^{\frac{p-2}{p}} + \|h\|_p^p\right)$$

$$\leqslant 2^{p-2}\,\|h\|_p\,\underbrace{\left(\|h\|_p\,\|u\|_p^{p-2} + \|h\|_p^{p-1}\right)}_{\varepsilon(h)\ \to\ 0 \text{ qd } \|h\|_p \to 0}$$

<u>Conclusion :</u> F est différentiable en tout point de E

et : $\boxed{DF(u).h = p\int_0^1 h(t)\,u(t)\,|u(t)|^{p-2}\,dt}$

Montrons que $u \longmapsto DF(u)$ continue sur E :

(⚠ cette opération n'est pas évidente !)

$u \longmapsto DF(u)$

$E \to \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

$DF(u)(h) = p \int_0^1 h(t)\, u(t)\, |u(t)|^{p-2}\, dt$

Montrons que $\| DF(u+v) - DF(u) \|_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})} \longrightarrow 0$ qd $\|v\|_p \to 0$

soit $h \in E = L^p([0,1])$

$$\left| (DF(u+v) - DF(u)) \cdot h \right| = p \left| \int_0^1 \left[\varphi(u(t)+v(t)) - \varphi(u(t)) \right] h(t)\, dt \right|$$

avec $\varphi(\xi) = \xi |\xi|^{p-2}$

$$\underbrace{\varphi(u(t)+v(t)) - \varphi(u(t))}_{\text{lipé}} = v(t)\varphi'(u(t) + \theta_t v(t)) \qquad \varphi'(\xi) = (p-1)|\xi|^{p-2}$$

$$= (p-1) |u(t) + \theta v(t)|^{p-2} v(t) \qquad \theta \in [0,1]$$

$$\left| (DF(u+v) - DF(u)) \cdot h \right| \leqslant p(p-1) \int_0^1 |u(t) + \theta v(t)|^{p-2} |v(t)\, h(t)|\, dt$$

Hölder avec $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 1$, $p_1 = \frac{p}{p-1}$, $q_1 = p$

$$\cancel{\leqslant 2^{p-2} p(p-1) \int_0^1 |u(t)|^{p-2} + |v(t)|^{p-2} \,|v(t)|\,|h(t)|\, dt}$$

$$\leqslant p(p-1) \left(\int_0^1 |u(t) + \theta v(t)|^{\frac{(p-2)p}{(p-1)}} |v(t)|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_0^1 |h(t)|^p \right)$$

$$\leqslant p(p-1) \|h\|_p \left[\int_0^1 |u+\theta v|^{\frac{p-2\cdot p}{p-1}} |v|^{\frac{p}{p-1}} \right]^{\frac{p-1}{p}}$$

2) $p \in]1;2[$

$$\begin{cases} \varphi(x) = x|x|^{p-2} & \text{si } x \neq 0 \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

a) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ a-t-on $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant 2|x-y|^{p-1}$?

comme ici on a $x-y$ il est fortement conseillé de passer par les intégrales.

* 1^{er} cas : $0 \leqslant x \leqslant y$ $\quad \varphi(x) = x|x|^{p-2} = x^{p-1} \quad \varphi'(x) = (p-1)x^{p-2}$

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = \left| \int_x^y \varphi'(t)\,dt \right| \leqslant (p-1)\int_x^y \frac{1}{t^{2-p}}\,dt$$

chg. de variable : $u = t - x \qquad du = dt$

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant (p-1)\int_0^{y-x} \frac{1}{(u+x)^{2-p}}\,du \leqslant (p-1)\int_0^{y-x} \frac{1}{u^{2-p}}\,du$$

car $\frac{1}{u+x} \leqslant \frac{1}{u}$

$$\leqslant (p-1)\left[\frac{u^{p-1}}{p-1}\right]_0^{y-x}$$

$$\leqslant (y-x)^{p-1}$$

$$\leqslant 2|y-x|^{p-1}$$

(même raisonnement avec $0 \leqslant y \leqslant x$, ou $y \leqslant x \leqslant 0$, ou $x \leqslant y \leqslant 0$)

* $2^{ème}$ cas : $x \leqslant 0 \quad y \geqslant 0$

$$\int_x^y \varphi'(t)\,dt = \int_x^0 \varphi'(t)\,dt + \int_0^y \varphi'(t)\,dt \leqslant |x|^{p-1} + |y|^{p-1}$$

$$\leqslant 2|x-y|^{p-1} \quad \left(\text{car } x \leqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0\right)$$

(b) $p \in]1;2[$

Pour montrer que $F \in C^1(E, \mathbb{R})$ on va montrer que $DF(u)$ existe $\forall u \in E$ et que $u \longmapsto DF(u)$ est continue.

$F : u \longmapsto \|u\|_p^p \qquad p \in]1;2[$

posons

$$\left| F(u+h) - F(u) - \underbrace{p\int_0^1 h(t)\, u(t)\, |u(t)|^{p-2}\, dt}_{} \right| = A$$

la linéarité et la continuité de ceci se montre de la même manière que pour $p \geq 2$

On va montrer que $A \leq \|h\|\, \varepsilon(h)$
$\qquad \qquad \downarrow_{\|h\| \to 0}\ 0$.

développons $F(u+h)$ à l'ordre 1 :

$$F(u+h) - F(u) = \int_0^1 |u+h|^p - |u|^p \, dt$$

$$\underbrace{|u+h|^p}_{\varphi(x+h)} = \underbrace{|u|^p}_{\varphi(x)} + \underbrace{h\, p\, |u+\theta h|^{p-2}(u+\theta h)}_{h\, \varphi'(u+\theta h)}$$

$\varphi : x \mapsto |x|^p$

$\varphi'(x) = p x |x|^{p-2}$ ($\to$ p. 6)

$\theta_t \in [0,1]\ \forall t$

$$\Rightarrow A = \left| p\int_0^1 h(t)\, |u(t)+\theta h(t)|^{p-2}(u(t)+\theta h(t))\, dt - p\int_0^1 h(t)\, u(t)\, |u(t)|^{p-2}\, dt \right|$$

$$\leq \left| p\int_0^1 |h(t)| \underbrace{\left| |u(t)+\theta h(t)|^{p-2}(u(t)+\theta h(t)) - |u(t)|^{p-2} u(t) \right|}_{} dt \right.$$

$$= |\varphi(u(t)+\theta h(t)) - \varphi(u(t))| \leq 2\, |u(t)+\theta h(t) - u(t)|^{p-1}$$

donc

$$A \leqslant 2p \int_0^1 \underbrace{|\theta R|^{p-1}}_{\leq 1} |R(r)|\, dr$$

$$\leqslant 2p \|R\|_p^p$$

$$\leqslant 2p \|R\|_p \underbrace{\|R\|_p^{p-1}}_{\substack{\downarrow \; \|R\|_p \to 0 \\ 0}} \qquad p > 1$$

$$\Rightarrow \boxed{DF(u).R = p \int_0^1 |u|^{p-2} u \, R \, dr} \qquad p \in]1;2[$$

Continuité de $u \longmapsto DF(u)$?

montrons que $\forall u \in E$ on a $\|DF(u+R) - DF(u)\|_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})} \xrightarrow[qd \|R\| \to 0]{} 0$

$$|DF(u+R) - DF(u) \cdot V|$$

$$= p \left| \int_0^1 \left(\varphi(u+R) - \varphi(u) \right) \times v \, dt \right|$$

$$\leqslant 2p \int_0^1 |R|^{p-1} |v| \, dr \qquad \text{(grâce à 2a)}$$

on effectue un Hölder.

$$\leqslant 2p \|R\|_p^{p-1} \|V\|_p$$

$$\Rightarrow \frac{|DF(u+R) - DF(u) \cdot V|}{\|V\|_p} \leqslant 2p \underbrace{\|R\|_p^{p-1}}_{\substack{\downarrow \; qd \|R\|_p \to 0 \\ 0}}$$

$$\Rightarrow \|DF(u+R) - DF(u)\|_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})} \xrightarrow[qd \|R\|_p \to 0]{} 0$$

$\Rightarrow$ continuité

3) $p \in]1;+\infty[$

$f : u \to \|u\|_p = \sqrt[p]{F(u)}$

$$\Rightarrow Df(u).h = \frac{1}{p}\left(F(u)\right)^{\frac{1}{p}-1} p \int_0^1 |u|^{p-2} u\, h \, dt$$
$$= \|u\|_p^{(1-p)} \int_0^1 |u|^{p-2} u\, h\, dt$$

$\Rightarrow f$ C^1 de $E\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Exercice 3}}$ (démonstration du th. des acc. finis)

$(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ 2 esp. vect. normés
$f : E \to F$ continue sur $[a,b]$, diff. sur $]a;b[$

$$M = \sup_{c \in]a,b[} \|Df(c)\|_{\mathcal{L}(E,F)}$$

1) $\varepsilon > 0$
$A = \{T \in [0,1]$ t.q. $\forall t \in [0,T], \|f(a+t(b-a)) - f(a)\|_F \leq (M+\varepsilon)t\|b-a\|_E + \varepsilon\}$

$\bar{T} = \sup\{T \in A\}$

a $\bar{T} > 0$?

$(x \in]a;b[)$. la continuité sur $[a,b]$ $\Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \alpha > 0$, $\|x - a\|_E < \alpha$ $\Rightarrow$ $\|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon$
$\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \alpha > 0$, $\|a+t(b-a) - a\|_E < \alpha$ $\Rightarrow \|f(a+t(b-a)) - f(a)\|_F < \varepsilon$
$(t \in]0,1[)$ on a posé $x = a+t(b-a)$

$\Rightarrow \quad \|f(a+t(b-a)) - f(a)\|_F \geq (M+\varepsilon)t\|b-a\|_E + \varepsilon$

on suite ≥ 0

pour $0 < t \leq \dfrac{1}{\|b-a\|_E}$

$\Rightarrow \quad T = \dfrac{1}{\|b-a\|_E} \in A$

$\Rightarrow \quad \boxed{\bar{T} > 0}$ $\qquad$ (on peut également montrer ceci à l'aide de la diff.)

(b) $\bar{T} \in A$?

Soit $t \in [0, \bar{T}[$

$\|f(a+t(b-a)) - f(a)\|_F \leq (M+\varepsilon)t\|b-a\|_E + \varepsilon$

f continue sur $[a,b]$
donc en faisant tendre $t \to \bar{T}$ on obtient

$\|f(a+\bar{T}(b-a)) - f(a)\|_F \leq (M+\varepsilon)\bar{T}\|b-a\|_E + \varepsilon$

$\Rightarrow \boxed{\bar{T} \in A}$ $\qquad$ (A est un intervalle $A = [0, \bar{T}]$)

(c) $T \in A \;/\; 0 < T < 1$
Soit $\eta > 0$

$\|f(a+(T+\eta)(b-a)) - f(a)\|_F$

$\leq \|f(a+(T+\eta)(b-a)) - f(a+T(b-a))\|_F + \|f(a+T(b-a)) - f(a)\|_F$

l'acc. est $\eta(b-a)$

$\leq \underbrace{\|Df(a+T(b-a))(\eta(b-a))\|}_{\leq M\eta\|b-a\|_E} + \eta\|b-a\|\,\delta(\eta(b-a)) + (M+\varepsilon)T\|b-a\| + \varepsilon$

donc en prenant η assez petit on a $\delta(\eta\,\|b-a\|) \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \|f(a+(\overline{T}+\eta)(b-a)) - f(a)\|_F$

$\leq (\Pi+\varepsilon)\,T\,\|b-a\|_E + \varepsilon + \eta\,\|b-a\|_E\,\varepsilon + \Pi\eta\,\|b-a\|_E$

$\leq (\Pi+\varepsilon)\,T\,\|b-a\|_E + \varepsilon + (\Pi+\varepsilon)\,\eta\,\|b-a\|_E$

$\leq (\Pi+\varepsilon)(T+\eta)\,\|b-a\|_E$

$\Rightarrow T+\eta \in A$

(d) supposons $\overline{T} < 1$ $\quad (\overline{T} \in [0,1])$
alors d'après (c) $\exists \eta > 0 \;/\; \overline{T}+\eta \in A$. $\left.\overline{T} < \overline{T}+\eta\right)$ impossible

donc $\boxed{\overline{T} = 1}$

2) $\overline{T} = 1 \quad \overline{T} \in A$
$\Rightarrow \|f(b) - f(a)\|_F \leq (\Pi+\varepsilon)\,\|b-a\|_E + \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$

en faisant tendre $\varepsilon \to 0$ on a

$$\boxed{\|f(b) - f(a)\|_F \leq \Pi\,\|b-a\|_E}$$

MAITRISE de MATHEMATIQUES. - CDO - TD. Feuille 2. Nov. 92.

Exercice 1. $\forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\exists !\, (\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[$ t.q.

$$x = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \end{pmatrix}$$

Soit f défini par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\rho^2}{2\pi - \theta}, & x \neq 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$

1. Calculer la dérivée directionnelle $f'_x(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
2. Déduire de 1 que f est G-dérivable en 0 et donner sa G-dérivée.
3. Montrer que f n'est pas F dérivable en 0 (on montrera même que f n'est pas continue en 0).

Exercice 2. Soit $S = \{x \in \mathbb{R}^2 ;\ |x| = 1\}$ (où $|.|$ désigne la norme euclidienne). On se donne $a : S \to \mathbb{R}$ tq $a(-x) = -a(x)$ $\forall x \in S$.
Pour $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on pose $f(x) = |x|\ a\left(\frac{x}{|x|}\right)$, et on pose $f(0) = 0$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, la dérivée directionnelle $f'_x(0)$ existe et $f'_x(0) = |x|\ a\left(\frac{x}{|x|}\right)$
2. f est-elle nécessairement G dérivable en 0 ? pourquoi ? (on pourra méditer l'exemple suivant : $a(x) = 0$ si $x \in S$ $x \neq x_0$ et $x \neq -x_0$, $a(x_0) = 1$, $a(-x_0) = -1$).

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ défini par : $\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$

1. f admet elle des dérivées partielles en $0 \in \mathbb{R}^2$
2. f est-elle dérivable suivant tout vecteur en 0 ? G-dérivable en 0 ? F dérivable en 0 ?

Exercice 4. Soient E, F deux e.v.n et Ω un ouvert de E. Soit $f : \Omega \subset E \to F$; $\forall a \in \Omega$, f est G dérivable de G-dérivée $G(a)$.
On suppose $a \mapsto G(a)$ est continue de $\Omega \subset E$ dans $\mathcal{L}(E,F)$. Montrer que $f \in C^1(\Omega, F)$ et $Df(a) = G(a)$ $\forall a \in \Omega$.
(On pourra appliquer le th. des accroissements finis à la fonction ... $f(x+t\ell) - tG(x)\ell$ entre $t=0$ et $t=1$).

Exercice 1.

$\forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \quad \exists! \ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\ \text{tq} \quad x = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \end{pmatrix}$

$$f \,/\, \begin{cases} f(x) = \dfrac{\rho^2}{2\pi - \theta}, & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) Soit $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $t \in \mathbb{R}^{+*}$

$$\frac{f(0+tx) - f(0)}{t} = \frac{t^2\rho^2}{t(2\pi - \theta)} = t\,\frac{\rho^2}{2\pi - \theta} \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0$$

$\Rightarrow \quad \boxed{f'_x(0) = 0}$

2) Montrons que $\begin{array}{l} x \longmapsto f'_x(0) = 0 \\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \end{array} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$

$x \mapsto 0$ linéaire, continue (évident)

$\Rightarrow \quad \boxed{f \text{ est G-dérivable en } 0 \quad \text{et} \quad G(0).h = 0}$

3) Montrons que f n'est pas continue en 0. ($\Rightarrow f$ n'est pas F. dérivable en 0)

$f(0) = 0$

on va construire une suite $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ / $x_n \to 0$ et $f(x_n) \not\to 0$

Soit $x_n = \begin{pmatrix} \rho_n \cos\theta_n \\ \rho_n \sin\theta_n \end{pmatrix}$ avec $\rho_n = \frac{1}{n}$, $\theta_n = 2\pi - \frac{1}{n^2}$ $\quad n \in \mathbb{N}^*$

$\rho_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \Rightarrow \quad x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$$f(x_n) = \frac{1/n^2}{2\pi - 2\pi + \frac{1}{n^2}} = 1 \underset{n \to +\infty}{\not\to} 0.$$

Exercice 2

$S = \{ x \in \mathbb{R}^2 \ ; \ |x| = 1 \}$ |.| norme euclidienne.

$$a : S \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto a(x) \quad / \quad a(-x) = -a(x)$$

$f(x) = |x| \, a\left(\frac{x}{|x|}\right)$ pour $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$
et $f(0) = 0$

1) soit $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $t \in \mathbb{R}^*_+$

$$\frac{f(0+tx) - f(0)}{t} = \frac{1}{t} |tx| \, a\left(\frac{tx}{|tx|}\right)$$
$$= |x| \, a\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{f'_x(0) = |x| \, a\left(\frac{x}{|x|}\right)}$$

2) $x \longmapsto f'_x(0) = |x| \, a\left(\frac{x}{|x|}\right)$ est-elle nécessairement $\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$?

prenons par exemple a / $a(x) = 0$ si $x \in S$ $\quad x \neq x_0$, $x \neq -x_0$
$a : S \to \mathbb{R}$
$$a(-x_0) = -1$$
$$a(x_0) = 1$$

$$\Rightarrow \quad f'_{x_0}(0) = 1$$
$$f'_{-x_0}(0) = -1$$
$$f'_x(0) = 0 \quad \text{pour } \frac{x}{|x|} \neq \begin{cases} x_0 \\ -x_0 \end{cases}, \ x \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$$

on montre facilement que dans ce cas $x \longmapsto f'_x(0)$ est linéaire ;
Mais, elle n'est pas continue !

donc $\boxed{f \text{ n'est pas nécessairement G-dérivable en } 0}$

Exercice 3

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: $\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$

1) $\dfrac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \dfrac{h.0}{h^2} \times \dfrac{1}{h} = 0$

de m̂ $\dfrac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0}$ (donc dérivable suivant la direction x, et y)

2) soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $t \in \mathbb{R}_+^*$

$$\frac{f(0+tu, 0+tv) - f(0,0)}{t} = \frac{1}{t} \frac{tutv}{t^2(u^2+v^2)} = \frac{1}{t} \frac{uv}{(u^2+v^2)}$$

- $\xrightarrow[t \to 0^+]{} \infty$ si $u \neq 0$ et $v \neq 0$
- $\xrightarrow[t \to 0^+]{} 0$ si $u = 0$ ou $v = 0$

$\Rightarrow$ <u>f n'est pas dérivable en 0 suivant tout vecteur</u>

$\Rightarrow$ <u>pas G - dérivable en 0</u>

$\Rightarrow$ <u>pas F - dérivable en 0</u>

Exercice 4

Hyp $\begin{cases} E, F \text{ 2 evn} . \quad \Omega \text{ ouvert de } E . \\ f : \Omega \subset E \to F \ / \ \forall a \in \Omega \quad f \text{ G. dérivable en } a \text{ de G. dérivée } G(a) \\ \\ a \mapsto G(a) \text{ est continue de } \Omega \subset E \text{ dans } \mathcal{L}(E, F) \end{cases}$

Posons $\varphi(t) = f(x+th) - t\,G(x).h$

Pour appliquer le th. des acc. finis à φ entre 0 et 1 il faut que φ soit continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$.

$t \mapsto -t\,G(x).h$ (x et h fixés) est cont. sur $[0,1]$
dériv. — $]0,1[$

f G. dériv. en x $\forall x \in \Omega$ $\Rightarrow$ f dériv. en x dans toutes les directions, en particulier en $x+th$ dans la direction h.

$\psi : t \mapsto f(x+th)$
$\mathbb{R} \to F$

soit $\alpha > 0$

$$\frac{\psi(t+\alpha) - \psi(t)}{\alpha} = \frac{f(x+th+\alpha h) - f(x+th)}{\alpha} \xrightarrow[\alpha \to 0^+]{} \underbrace{f'_h(x+th)}_{\text{qui existe}}$$

$\Rightarrow \psi'(t)$ existe $\forall t \in \mathbb{R}$ et $\psi'(t) = f'_h(x+th)$

$\Rightarrow \psi$ dérivable et continue en t, $\forall t \in \mathbb{R}$

donc φ est continue sur $[0,1]$
dérivable sur $]0,1[$

on peut donc appliquer le th. des acc. finis entre 0 et 1.

$$\Rightarrow \quad \| \varphi(1) - \varphi(0) \|_F \leqslant \sup_{t \in]0,1[} \| \varphi'(t) \| \times 1$$

<u>car :</u>

$$\varphi(t+\alpha) - \varphi(t) = f(x + th + \alpha h) - (t+\alpha)\left[G(x) \cdot h\right] - f(x+th) + t(G(x) \cdot h)$$

$$= f(x+th+\alpha h) - f(x+th) - \alpha\,(G(x)\cdot h)$$

$$= f'_h(x+th) \times \alpha - \alpha\,(G(x)\cdot h)$$

$$= \underbrace{\underbrace{\left[f'_h(x+th) - (G(x)\cdot h)\right]}_{\substack{\in F \ \text{(constante)} \\ \alpha, t \ \underline{\text{fixés}}}} \times \alpha}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}, F)}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\underbrace{D\varphi(t)}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R},F)} \cdot \underbrace{\alpha}_{\in \mathbb{R}}}_{\in F} = \underbrace{\underbrace{\left[f'_h(x+th) - G(x) \cdot h\right]}_{\in F} \underbrace{\alpha}_{\in \mathbb{R}}}_{\in F}$$

$$\| D\varphi(t) \|_{\mathcal{L}(\mathbb{R},F)} = \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} \frac{\| D\varphi(t) \cdot \alpha \|_F}{\|\alpha\|_{\mathbb{R}}}$$

$$= \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} \frac{|\alpha|\ \| f'_h(x+th) - G(x) \cdot h \|_F}{|\alpha|}$$

$$= \| f'_h(x+th) - G(x) \cdot h \|_F$$

donc $\displaystyle \sup_{t \in]0,1[} \| D\varphi(t) \|_{\mathcal{L}(\mathbb{R},F)} = \sup_{t \in]0,1[} \underbrace{\| f'_h(x+th) - G(x)\cdot h \|_F}_{= \psi(t) \ \text{(notation)}}$

-1

donc $\| \varphi(1) - \varphi(0) \|_F \leqslant \sup_{t \in]0,1[} \| f'_h(x+th) - G(x).h \|_F$

$\|$

$\| f(x+h) - G(x).h - f(x) \|_F$

$\Rightarrow \| f(x+h) - f(x) - G(x).h \|_F \leqslant \underbrace{\sup_{t \in]0,1[} \| f'_h(x+th) - G(x).h \|_F}_{\text{montrons que ceci est égale à un } \|h\|_E \, \varepsilon(h)}$

$f'_h(x+th) = G(x+th).h$ par définition

donc $\sup_{t \in]0,1[} \| f'_h(x+th) - G(x).h \|_F \leqslant \sup_{t \in]0,1[} \| [G(x+th) - G(x)].h \|_F$

$\leqslant \sup_{t \in]0,1[} \| G(x+th) - G(x) \|_{\mathcal{L}(E,F)} \|h\|_E$

or $\begin{array}{l} a \longmapsto G(a) \\ E \longrightarrow \mathcal{L}(E,F) \end{array}$ continue sur Ω

$\Rightarrow \underset{\text{pour } t \text{ fixé}}{\wedge} \| G(x+th) - G(x) \|_{\mathcal{L}(E,F)} \longrightarrow 0$ qd $\|th\| \to 0$

c.à.d qd $\|h\| \to 0$ (t fixé)

donc $\# \underbrace{\varepsilon(h)}_{\in \mathbb{R}}$

$\Rightarrow \| f(x+h) - f(x) - G(x).h \|_F \leqslant \|h\|_E \underbrace{\varepsilon(h)}_{\in \mathbb{R}}$

$\Rightarrow f(x+h) = f(x) + G(x).h + \|h\|_E \underbrace{\varepsilon'(h)}_{\in F}$

$\Rightarrow Df(x) = G(x)$. de plus G continue,

$\Rightarrow \boxed{f \in \mathcal{C}^1}$

MAITRISE de MATHEMATIQUES - CDO - TD Feuille 3. Nov. 92.

I. Soit $E = L^1(]0,1[)$ et $F : E \to \mathbb{R}$ définie par :

$$F(u) = \int_0^1 |u(t)|\,dt.$$

1. Soit $u \in E$; montrer que F est G-dérivable en u si et seulement si $\text{mes}(\{u=0\}) = 0$.

2. Montrer que F n'est jamais F-dérivable en $u \in E$.

II Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$, et $F : E \to \mathbb{R}$ définie par :

$$F(u) = \sup_{x\in[0,1]} |u(x)|$$

1. On suppose : $\exists!\, x \in [0,1]$; $F(u) = \sup_{x\in[0,1]} |u(x)|$

Montrer que F est G-dérivable en u et calculer sa dérivée. Est-elle F-dérivable ?

2. On suppose maintenant que $\exists\,(x,y) \in [0,1]^2$; $x \neq y$; $F(u) = |u(x)| = |u(y)|$. Montrer que F n'est pas dérivable en u (ne pas calculer la dérivée)...).

MAITRISE de MATHEMATIQUES _ C00 _ Feuille 3 . Nov 92

Quelques suggestions utiles .–

I. $E = L^1(]0,1[)$; $F(u) = \int_0^1 |u(x)|\,dx$.

Soit $u \in E$, on définit $A^+ = \{u>0\}$, $A^- = \{u<0\}$, $A^\circ = \{u=0\}$

a) Soit $v \in E$, et soit $t \in \mathbb{R}_+$.

. montrer que $\int |u+tv| - \int |u| = \int_{A^+} tv + \int_{A^-}(-tv) + \int_{A^\circ} t|v| + R$

où $R = -2\int_{\substack{A^+ \\ u+tv<0}} (u+tv) + 2\int_{\substack{A^- \\ u+tv\geq 0}} (u+tv)$.

b) Soit $v \in E$, $v \neq 0$ – Montrer que F est dérivable en u dans la direction v, et calculer $F_v'(u)$.

c) Montrer que F est G-dérivable si et seulement si $mes(A_0) = 0$

.. Montrer que F n'est pas F-dérivable. Pour cela, on pourra calculer $F(u+v) - F(u)$ avec $v = -2u\,1_{A_n}$, où $A_n \in \mathcal{R}$ est "bien choisi"

II. $E = C([0,1], \mathbb{R})$ $F(u) = \sup |u(x)|$

1. On suppose $\exists!\, x \in [0,1]$; $u(x) = |u(x)| = \sup(|u(y)|\ y \in [0,1])$

(a) Soit $v \in C([0,1], \mathbb{R})$ et soit $\eta > 0$.

Montrer que il existe $\delta > 0$ t.q. $0 < t \leq \delta \Rightarrow$

$\sup\{|u+tv|(y),\ y \in [0,1]\} = \sup\{|u+tv|(y)\ y \in [0,1], |y-x| \leq \eta\}$

(c'est à dire que le sup de $|u+tv|$ est atteint sur la boule de centre x et de rayon η.

(b) En déduire que

$$0 < t \leq \delta \Rightarrow 0 \leq \|u + tv\| - (u(x) + tv(x)) \leq t(v(y) - v(x))$$

pour un certain $y \in [0,1]$ tel que $|y - x| \leq \eta$.

(c) Montrer que $F : v \mapsto \|v\|$ est G-dérivable en u et que sa Gâteaux dérivée est : $D_G F(u)(v) = v(x)$.

(d) Soit $u \in E$. Construire $v_n \in E$; $v_n(x_n) = 2(u(x) - u(x_n))$, $n \in \mathbb{N}$, $v_n(x) = 0$ et $\|v_n\|_\infty = v_n(x_n)$, avec $(x_n)_n$ tq $u(x_n) \uparrow u(x)$.
En minorant convenablement $\|u + v_n\|_\infty - \|u\|_\infty - v_n(x)$, montrer que F n'est pas F dérivable.

2- Soit $u \in C([0,1], \mathbb{R})$; $\exists (x, y) \in [0,1]^2$; $|u(x)| = |u(y)| = \|u\|$, avec $x \neq y$. On montrera que $F : v \mapsto \|v\|$ n'est pas G dérivable en u en considérant les cas suivants :

1er cas : $u(x) = u(y) \geq 0$; considérer $v \in E$
$\|v\| = 1$, $v(x) = 1$ $v(y) = -1$.

2ème cas $u(x) = -u(y) > 0$; considérer $v \in E$
$\|v\| = 1$ $v(x) = v(y) = 1$.

(les cas $u(x) = u(y) \leq 0$ et $-u(x) = u(y) > 0$ se traitent de manière similaire).

Maîtrise de Mathématiques

C.D.O. . T.D. n° 4

Soit $x \in C^1([0,T], \mathbb{R})$ solution de l'équation :

$$(1) \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax & t > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

où a et x_0 sont des paramètres réels inconnus à déterminer en fonction des mesures $x_1^m, \dots, x_N^m$ (connues) de x aux instants $t_1, \dots, t_N$ (avec $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N$) ; on supposera $x_i^m \geq 0 \ \forall i$.

On veut déterminer $(a, x_0) \in \mathbb{R}^2$ de manière à minimiser (sur $\mathbb{R}^2$) la fonction $J(a, x_0) = \sum_{i=1}^{N} (x(t_i) - x_i^m)^2$.

<u>question préliminaire</u> : calculer de manière explicite x en fonction de a et x_0 ...

Soit $(a^{(n)}, x_0^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite minimisante, i.e. telle que :

$$J(a^{(n)}, x_0^{(n)}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \operatorname{Inf} J$$

1_ Montrer que, $\forall t_i \quad i = 1, \dots, N$, $\quad x_0^{(n)} e^{a^{(n)} t_i} \leq C$ où C est une constante positive.

2 . a. On suppose que $x_0^{(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Montrer que :

$$x_0^{(n)} e^{a^{(n)} t_i} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{pour } i > 1$$

En déduire que $\operatorname{Inf} J \geq \sum_{i=2}^{N} (x_i^m)^2$.

2.b. On considère la suite $\tilde{x}_0^{(n)} = n$, $\tilde{a}^{(n)} = \frac{1}{t_1} \ln \frac{x_1^m}{n}$.

Montrer que si n est assez grand, on a :

$$J(\tilde{a}^{(n)}, \tilde{x}_0^{(n)}) < \sum_{i=2}^{N} (x_i^m)^2 .$$

En déduire qu'on ne peut avoir $x_0^{(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

3.a. On suppose maintenant que $x_0^{(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer qu'alors : $x_0^{(n)} e^{a^{(n)} t_N} \leq C$, où C est une constante positive, et que : $x_0^{(n)} e^{a^{(n)} t_i} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ si $i < N$. En déduire que :

$$\operatorname{Inf} J \geq \sum_{i=1}^{N-1} (x_i^m)^2 .$$

3.b. En considérant la suite $\bar{x}_0^{(n)} = \frac{1}{n}$, $\bar{a}^{(n)} = \frac{1}{t_N} \ln n\, x_N^m$; montrer qu'on ne peut pas avoir $x_0^{(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

4. Montrer que $a^{(n)}$ est bornée. Conclure quant à l'existence d'un couple (a, x_0) qui réalise le minimum de J.

5. Montrer que J n'est pas convexe (On pourra considérer une combinaison linéaire des suites $(\tilde{a}^{(n)}, \tilde{x}_0^{(n)})$ et $(\bar{a}^{(n)}, \bar{x}_0^{(n)})$ définies en 2.b et 3.b.)

EXERCICE

$X \in C^1([0,T],\mathbb{R})$ solution de $\begin{cases} \frac{dX}{dt} = aX & t>0 \\ X(0) = x_0 \end{cases}$

On veut déterminer $(a, x_0) \in \mathbb{R}^2$ pour minimiser $J(a,x_0) = \sum_{i=1}^{N} (X(t_i) - x_i^n)^2$

$\frac{dX}{X} = a\,dt \qquad X = K e^{at}$

$\boxed{X = x_0 e^{at}}$

$(a^{(n)}, x_0^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \ / \ J(a^{(n)}, x_0^{(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \inf_{\mathbb{R}^2} J$

1) soit $U_n(t) = x_0^{(n)} e^{a^{(n)} t}$

Supposons que U_n n'est pas borné ; alors $\forall k \in \mathbb{N}$
$\exists n_k$ et t_{i_k} $i_k \in \{1,\dots,N\}$ / $U_{n_k}(t_{i_k}) > k$

$\Rightarrow J(a^{(n)}, x_0^{(n)}) = \sum_{i=1}^{N} (U_n(t_i) - x_i^n)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

$\Rightarrow (a^{(n)}, x_0^{(n)})$ n'est pas une suite minimisante
$\to$ contradiction avec l'hyp. du texte.

donc $\underline{\forall t_i \ i=1,\dots,N}$ $\boxed{U_n(t_i) \leqslant C}$ $C = \text{cte} > 0$.

2) ⓐ hyp : $x_0^{(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

a-t-on $U_n(t_i) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour $i \geq 1$?

Soit t_i fixé $i \in \{2, \dots, N\}$ (car ici $i \,\underline{\underline{>}}\, 1$)

$$x_0^{(n)} e^{a^{(n)} t_i} = x_0^{(n)} e^{a^{(n)} (t_i - t_1 + t_1)}$$
$$= \underbrace{x_0^{(n)} e^{a^{(n)} t_1}}_{\leqslant C} e^{a^{(n)} (t_i - t_1)}$$
$$\leqslant C e^{a^{(n)} (t_i - t_1)} \qquad t_i - t_1 > 0 \quad \forall i > 1$$

$x_0^{(n)} e^{a^{(n)} t_1} \leqslant C$

$x_0^{(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$; donc $e^{a^{(n)} t_1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ obligatoirement

comme $t_1 > 0$ on a donc $a^{(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$

donc $C e^{a^{(n)} (t_i - t_1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$$\Rightarrow \boxed{x_0^{(n)} e^{a^{(n)} t_i} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \text{pour } i > 1} \quad (\text{si } x_0^{(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty)$$

* $$J(a^{(n)}, x_0^{(n)}) = \sum_{i=1}^{N} \left(x_0^{(n)} e^{a^{(n)} t_i} - X_i^{(m)} \right)^2$$

$$\underset{n \to +\infty}{\Big\downarrow}\; J(a^{(n)}, x_0^{(n)}) \geqslant \sum_{i=2}^{N} \Big(\underbrace{x_0^{(n)} e^{a^{(n)} t_i}}_{\downarrow \text{ qd } n \to \infty \; 0} - X_i^{(m)} \Big)^2 \;\underset{n \to +\infty}{\Big\downarrow}$$

$$\boxed{\inf_{\mathbb{R}^2} J \geqslant \sum_{i=2}^{N} (X_i^{(m)})^2}$$

(b) $\tilde{x}_0^{(n)} = n \qquad \tilde{a}^{(n)} = \dfrac{1}{t_1} \ln \dfrac{X_1^m}{n}$

$$J(\tilde{a}^{(n)}, \tilde{x}_0^{(n)}) = \sum_{i=1}^{N} \left[n \, e^{\frac{t_i}{t_1} \ln \frac{X_1^m}{n}} - X_i^m \right]^2$$

$$= \sum_{i=2}^{N} \left(n e^{\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_1} \ln \frac{X_1^n}{n}} - X_i^{n} \right)^2$$

$$n e^{\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_1} \ln \frac{X_1^n}{n}} = n \left(\frac{X_1^n}{n} \right)^{\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_1}} = \underbrace{(X_1^n)^{\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_1}} \, n^{1-\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_1}}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+}$$

car $1 - \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_1} < 0$

donc pour n assez grand on aura toujours $\left(n e^{\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_1} \ln \frac{X_1^n}{n}} - X_i^{n} \right)^2 < (X_i^n)^2$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{pour } n \text{ assez grand} \quad J(\tilde{a}^{(n)}, \tilde{x}_0^{(n)}) < \sum_{i=2}^{N} (X_i^n)^2}$

$*$ On ne peut pas avoir $x_0^{(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ car dans ce cas

$J(a^{(n)}, x_0^{(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \operatorname{Inf} J$ (hyp)

$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{Inf} J \geq \sum_{i=2}^{N} (X_i^n)^2 & (\text{qu. } 2 \cdot a) \\ J(a^{(n)}, x_0^{(n)}) < \sum_{i=2}^{N} (X_i^n)^2 & \text{pour } n \text{ assez grand} \end{array}\right\} \Rightarrow J(a^{(n)}, x_0^{(n)}) < \operatorname{Inf} J$ pour n assez grand

$\Rightarrow$ contradiction avec (hyp)

3/ a) hyp : $x_0^{(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$x_0^{(n)} e^{a^{(n)} r_N} \geq C$ constante > 0 (conséquence de la qu. 1)

(1) $x_0^{(n)} e^{a^{(n)} r_i} = \underbrace{x_0^{(n)} e^{a^{(n)} r_N}}_{\geq C} e^{a^{(n)} (r_i - r_N)}$ $\quad i \leq N$

2 cas :

- si $\exists K$, $a^{(n)} \leq K$ $\forall n$ alors $e^{a^{(n)} r_i} \leq \tilde{K}$ $\forall n$

$\Rightarrow x_0^{(n)} e^{a^{(n)} r_i} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

• si $a^{(n)} \longrightarrow +\infty$

dans (1) on a $t_i - t_N < 0$ $\quad \forall i < N$

$a^{(n)} \to +\infty$

$\Rightarrow e^{a^{(n)}(t_i - t_N)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\Rightarrow x_0^{(n)} e^{a^{(n)} t_i} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour $i < N$

$$* \quad J\left(x_0^{(n)}, a^{(n)}\right) = \sum_{i=1}^{N} \left(x_0^{(n)} e^{a^{(n)} t_i} - X_i^{n}\right)^2$$

$$\geq \sum_{i=1}^{N-1} \left(\underbrace{x_0^{(n)} e^{a^{(n)} t_i}}_{\to 0 \text{ qd } n \to +\infty} - X_i^{n}\right)^2$$

$n \to +\infty$

$$\boxed{\inf J \geq \sum_{i=1}^{N-1} \left(X_i^{n}\right)^2}$$

(6) $\bar{x}_0^{(n)} = \frac{1}{n}$; $\quad \bar{a}^{(n)} = \frac{1}{t_N} \ln n X_N^{n}$

$$J\left(\bar{x}_0^{(n)}, \bar{a}^{(n)}\right) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{n} e^{\frac{t_i}{t_N} \ln n X_N^{n}} - X_i^{n}\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} \left(\qquad\qquad\right)^2$$

$$\frac{1}{n} e^{\frac{t_i}{t_N} \ln n X_N^{n}} = \frac{1}{n} \left(n X_N^{n}\right)^{\frac{t_i}{t_N}} = \left(X_N^{n}\right)^{\frac{t_i}{t_N}} n^{\left(\frac{t_i}{t_N} - 1\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$\left(\text{car } \frac{t_i}{t_N} - 1 < 0\right)$

$$\Rightarrow \underline{J\left(\bar{x}_0^{(n)}, \bar{a}^{(n)}\right) < \sum_{i=1}^{N-1} \left(X_i^{n}\right)^2}$$

donc par un raisonnement semblable qu'en 2-b <u>on ne peut pas avoir</u> $x_0^{(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

4) $a^{(n)}$ bornée ?

* Supposons $a^{(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$

alors $x_0 e^{a^{(n)} t_i} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad i \leq N$

impossible (sinon $\operatorname{Inf} J \geq \sum_{i=1}^{N-1} (X_i^n)^2$)

* Supposons $a^{(n)} \longrightarrow +\infty$

$J(x_0^n, a^n) \longrightarrow \sum_{i=1}^{N} (x_i^n)^2$

impossible (car $\inf < \sum_{2}^{N} (x_i^n)^2$)

• On a vu $\exists \alpha > 0 \quad |x_0^{(n)}| \geq \alpha \qquad |x_0^{(n)}| \leq C$

$$|a^{(n)}| \leq C$$

il existe une sous-suite $(a^{(n_k)}, x_0^{(n_k)})$ tq $\left.\begin{array}{l} a^{n_k} \longrightarrow a \\ x_0^{(n_k)} \longrightarrow x_0 \end{array}\right) k \to +\infty$

J <u>continue</u> $(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$

$J(a^{(n_k)}, x_0^{(n_k)}) \longrightarrow J(a, x_0)$

$\longrightarrow \operatorname{Inf} J$

$$\boxed{\operatorname{Inf} J = J(a, x_0)}$$

5) J pas convexe ?

Montrons notamment que :

$$J\left(\tfrac{1}{2}\tilde{a}^{(n)} + \tfrac{1}{2}\bar{a}^{(n)},\ \tfrac{1}{2}\tilde{x}_0^{(n)} + \tfrac{1}{2}\bar{x}_0^{(n)}\right) > \tfrac{1}{2}J\left(\tilde{a}^{(n)}, \tilde{x}_0^{(n)}\right) + \tfrac{1}{2}J\left(\bar{a}^{(n)}, \bar{x}_0^{(n)}\right)$$

$$J\left(\tfrac{1}{2}\tilde{a}^{(n)} + \tfrac{1}{2}\bar{a}^{(n)},\ \tfrac{1}{2}\tilde{x}_0^{(n)} + \tfrac{1}{2}\bar{x}_0^{(n)}\right)$$

$$= J\left(\frac{1}{2}\frac{1}{t_1}\ln\frac{X_1^m}{n} + \frac{1}{2}\frac{1}{t_N}\ln nX_N^m,\ \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\frac{1}{n}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{n}\right) e^{1/2\left[\frac{1}{t_1}\ln\frac{X_1^m}{n} + \frac{1}{t_N}\ln nX_N^m\right]} - X_i^m\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{X_1^m}{n}\right)^{1/2t_1}\left(nX_N^m\right)^{1/2t_N} - X_i^m\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\left[\left(\frac{X_1^m}{n}\right)^{1/2t_1} n \left(nX_N^m\right)^{1/2t_N} + \frac{1}{n}\left(\frac{X_1^m}{n}\right)^{1/2t_1}\left(nX_N^m\right)^{1/2t_N}\right] - X_i^m\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\left[\left(X_1^m\right)^{1/2t_1} n^{\left(1-\frac{1}{2t_1}+\frac{1}{2t_N}\right)}\left(X_N^m\right)^{1/2t_N} + \frac{1}{n^{1-\frac{1}{2t_N}+\frac{1}{2t_1}}}\left(X_1^m\right)^{1/2t_1}\left(X_N^m\right)^{1/2t_N}\right] - X_i^m\right)$$

$$J\left(\tilde{a}^{(n)}, \tilde{x}_0^{(n)}\right) < \sum_{i=2}^{N}\left(X_i^m\right)^2$$

$$J\left(\bar{a}^{(n)}, \bar{x}_0^{(n)}\right) < \sum_{i=1}^{N-1}\left(X_i^m\right)^2$$

91 – 92

Maîtrise Math. Déc. 92

ch ky COO – (partiel 1991) (problème 1)

Le problème 1 porte sur la 1ère partie du cours (résultats d'existence, d'unicité pour des problèmes d'optimisation). Le problème 2 porte sur la 2ème partie (algorithmes d'optimisatio[n]) les deux problèmes suivent de très près certains TD...

$x.y$ désigne le produit scalaire de x et y dans $\mathbb{R}^N$

$|x| = (x.x)^{1/2}$

Problème 1. $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2, 1 < |x| < 2\}$. Pour $u \in L^1(\Omega)$ et $i \in \{1,2\}$ on note $D_i u$ la dérivée (au sens des distributions) de u, c.à.d. $< D_i u, \varphi > = -\int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\,dx$, $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

On identifie une fonction de $L^1_{loc}(\Omega)$ avec la distribution qu'elle représente.

$W^{1,1}(\Omega) = \{u \in L^1(\Omega), D_1 u \in L^1(\Omega), D_2 u \in L^1(\Omega)\}$.

On munit $W^{1,1}(\Omega)$ de la norme

$$\|u\| = \|u\|_1 + \|D_1 u\|_1 + \|D_2 u\|_1 .$$

$W_0^{1,1}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{1,1}} = \{u \in W^{1,1}(\Omega), \exists (u_n)_n \subset C_c^\infty(\Omega), u_n \to u \text{ dans } W^{1,1}$

On admettra dans la suite les résultats suivants

- 1. si $u \in L^1(\Omega) \cap C^1(\Omega)$, $D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ pp, (et $D_i u \in L^1_{loc}(\Omega)$)
- 2. $W^{1,1}(\Omega)$ est un espace de Banach (et donc $W_0^{1,1}(\Omega)$ aussi)
- 3. Si $u \in W_0^{1,1}(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$, alors $u = 0$ sur $\partial\Omega$.
- 4. $\|u\|_1 \le 4(\|D_1 u\|_1 + \|D_2 u\|_1)$, $\forall u \in W^{1,1}(\Omega)$

Si $u \in W^{1,1}(\Omega)$ on pose $f(u) = \int_\Omega \sqrt{1+|Du(x)|^2}\,dx$,

avec $Du = (D_1 u, D_2 u)^t$; et pour $v \in W_0^{1,1}(\Omega)$

on pose $J(v) = f(u_0 + v)$, avec $u_0 = \alpha\,(2\_1.1)$;

$\alpha > 0$ est donné. (Noter que $u_0 \in W^{1,1}(\Omega)$.)

On s'intéresse au problème

$$(P) \begin{cases} \bar{u} - u_0 \in W_0^{1,1}(\Omega) \\ f(\bar{u}) \le f(u), \quad \forall\, u \text{ t.q. } u - u_0 \in W_0^{1,1}(\Omega) \end{cases}$$

$$\left(\text{Comparer avec } (Q) \begin{cases} \bar{v} \in W_0^{1,1}(\Omega) \\ J(\bar{v}) \le J(v) \quad \forall\, v \in W_0^{1,1}(\Omega) \end{cases} \right)$$

Q.1. Montrer que f est continue de $W^{1,1}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ (4)

Q.2. Montrer que J est strictement convexe (sur (3)
$W_0^{1,1}(\Omega)$) et que $J(v) \to +\infty$ quand $\|v\| \to \infty$ (2)
[utiliser R.4].

Q.3 Des questions Q1 et Q2 peut-on déduire
1) Il existe $\bar{u}$ solution de (P) ? (1)
2) (P) a au plus une solution ? (1)

Q.4 Soit $u \in W^{1,1}(\Omega)$ et soit $h \in C_c^\infty(\Omega)$.
On pose $g(t) = f(u + th)$, $t \in \mathbb{R}$. (6)
Montrer que g est dérivable en 0 et que

$$g'(0) = \int_\Omega \frac{Du(x) \cdot Dh(x)}{\sqrt{1+|Du(x)|^2}}\,dx$$

[On pourra utiliser le théorème de dérivation sous le signe $\int$].

Q.5. Soit $\bar{u}$ une solution de (P). On admet

4 – 32

-3-

que $\bar{u} \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ (ceci est vrai mais un peu délicat ...).

a. Montrer que $\bar{u}$ est une fonction <u>radiale</u>, c.à.d

$$|x| = |y| \Rightarrow \bar{u}(x) = \bar{u}(y) \qquad (\forall\, x, y \in \Omega).$$

[utiliser le problème (Q) et <u>Q.2</u>]. (4)

On pose $W(|x|) = \bar{u}(x)$, pour $x \in \Omega$ (de sorte que $W \in C^1(]1,2[) \cap C([1,2])$).

b. Montrer que $\displaystyle\int_1^2 \frac{W'(r)}{\sqrt{1+(W'(r))^2}}\, \varphi'(r)\, r\, dr = 0, \ \forall \varphi \in C_c^\infty(]1,$

[utiliser <u>Q4</u> et <u>R1</u>] (4)

c. En déduire que si (P) a une solution, (4) alors : $\displaystyle \alpha \le \int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$ (on rappelle que $\alpha > 0$). Calculer cette solution. [utiliser <u>R3</u>]

<u>Q6</u>. Déduire de <u>Q1</u>, <u>Q2</u> et <u>Q5.c</u> que $W_0^{1,1}$ n'est pas réflexif ...

Problème 1

Rappels :

- Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$

$u \in C^1(\bar{\Omega}) = \{V|_\Omega,\ V \in C^1(\mathbb{R}^N)\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C(\bar{\Omega})$

Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\boxed{\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi\, dx = -\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx}$$

- Soit $u \in L^1_{loc}(\Omega)$

$i \in \{1, .., N\}$

définition : On appelle $D_i u$ l'application :

$$D_i u : C_c^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\varphi \longmapsto \langle D_i u, \varphi\rangle = -\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx$$

$D_i u$ = " dérivée faible de u

Lemme : $\boxed{u \in L^1_{loc} \cap C^1(\Omega) \text{ alors } \langle D_i u, \varphi\rangle = +\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi\, dx}$

définition : $W^{1,1}(\Omega) = \{u \in L^1(\Omega),\ D_1 u \in L^1(\Omega),\ D_2 u \in L^1(\Omega)\}$
(Ω ouvert de $\mathbb{R}^2$)

Que signifie $D_1 u \in L^1(\Omega)$? (au sens des distributions)

on dit que $D_1 u \in L^1$ si $\exists\, f_1 \in L^1(\Omega)$ t.q.

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle D_1 u, \varphi\rangle = \int f_1 \varphi\, dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \\ \quad \| \\ \left(-\int u \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx\right) \end{array} \right.$$

Lemme $\boxed{\begin{array}{l} f_1, g_1 \in L^1 \text{ tq } \int f_1 \varphi \, dx = \int g_1 \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \\ \text{alors } f_1 = g_1 \text{ p.p.} \end{array}}$

(NB : pour $D_1 u \in L^1$ on "confond" $D_1 u$ et f_1)

- $\|u\|_{W^{1,1}} = \|u\|$
$$= \|u\|_1 + \underbrace{\|D_1 u\|_1}_{\|f_1\|_1} + \underbrace{\|D_2 u\|_1}_{\|f_2\|_1} \quad \| \, ?$$
- $W^{1,1}(\Omega)$ est un e.v.n complet
- $W_0^{1,1}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{1,1}}$

$u \in W^{1,1}(\Omega)$
$$f(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2} \, dx \qquad \nabla u = (D_1 u, D_2 u)^t$$

Q.1) $f : W^{1,1}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $W^{1,1}(\Omega)$?

Soit $u \in W^{1,1}(\Omega)$
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset W^{1,1}(\Omega)$ / $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{W^{1,1}} u$ (c.à.d $\|u_n - u\|_{W^{1,1}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$)

Montrons que $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(u)$ (dans $\mathbb{R}$)

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{W^{1,1}} u \iff \begin{cases} u_n \to u & L^1 \\ D_1 u_n \to D_1 u & L^1 \\ D_2 u_n \to D_2 u & L^1 \end{cases}$$

$$f(u_n) = \int_\Omega \sqrt{1+(D_1 u_n)^2+(D_2 u_n)^2}\, dx$$

$D_1 u_n \longrightarrow D_1 u$ ds L^1
$D_2 u_n \longrightarrow D_2 u$ ds L^1

donc par la réciproque partielle de la C.D. $\exists (D_1 u_{n_k})_k$, $F \in L^1$
$\exists (D_2 u_{n_k})_k$, $G \in L^1$

telles que :

$D_1 u_{n_k} \longrightarrow D_1 u$ pp , $|D_1 u_{n_k}| \leq F$ pp $\forall k$

$D_2 u_{n_k} \longrightarrow D_2 u$ pp , $|D_2 u_{n_k}| \leq G$ pp $\forall k$.

$\Rightarrow \sqrt{1+(D_1 u_{n_k})^2+(D_2 u_{n_k})^2} \longrightarrow \sqrt{1+(D_1 u)^2+(D_2 u)^2}$ p.p.

et $\sqrt{1+(D_1 u_{n_k})^2+(D_2 u_{n_k})^2} \leq \sqrt{1+F^2+G^2}$ p.p.

$\leq \sqrt{3}\, H$ p.p. avec $H = \sup(1, F, G)$

$H \in L^1(\Omega)$
$\underline{\sqrt{3} H \in L^1(\Omega)}$

donc $\sqrt{1+(D_1 u_{n_k})^2+(D_2 u_{n_k})^2} \to \sqrt{1+(D_1 u)^2+(D_2 u)^2}$ dans L^1 $\Rightarrow f(u_{n_k}) \xrightarrow[k\to+\infty]{L^1} f(u)$

Supposons $f(u_n) \not\longrightarrow f(u)$

alors $\exists \varepsilon > 0$ tq $\exists$ ss-suite $(f(u_{n_k}))_k$ tq $|f(u_{n_k}) - f(u)| \geq \varepsilon$ $\forall k$

or d'après ce qu'on a vu $f(u_{n_k}) \to f(u)$ ds L^1

contradiction

Q.2)

$J(V) = f(u_0 + V)$ $\qquad u_0 = \alpha(2-|\cdot|)$ $\qquad \alpha > 0$

$\cap$
$W^{1,1}(\Omega)$

→ si f convexe $W^{1,1}$ alors J convexe $W_0^{1,1}$
→ J est convexe.

Soit
$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$z \longmapsto \sqrt{1 + z_1^2 + z_2^2}$$

$$f(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + (D_1 u(x))^2 + (D_2 u(x))^2}\, dx$$

donc $$f(u) = \int_\Omega \varphi\left(\nabla u(x)\right) dx \qquad \nabla u(x) = \begin{pmatrix} D_1 u(x) \\ D_2 u(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

On va d'abord montrer que φ est convexe, ensuite que f convexe de $W^{1,1} \to \mathbb{R}$.

NB : La norme euclidienne est convexe.

$$h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$s \longmapsto \sqrt{1 + s^2}$$
strict. convexe ?
strict. croissante ?

(on travaille sur $\mathbb{R}_+$, car après on remplacera s par la norme euclidienne)

N.B. La composition de 2 convexes n'est pas forcément convexe, mais si h est (strict.) convexe et (strict.) croissante et g est (strict.) convexe

Alors $h \circ g$ est (strict.) convexe

$h'(s) = \dfrac{s}{(1+s^2)^{1/2}} > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ $\Rightarrow$ strict croissante sur $\mathbb{R}_+$

$h''(s) = \dfrac{1}{(1+s^2)^{1/2}} + \dfrac{s\,(-s)}{(1+s^2)^{3/2}} = \dfrac{1}{(1+s^2)^{3/2}} > 0$ sur $\mathbb{R}_+$ $\Rightarrow$ strict convexe sur $\mathbb{R}_+$

Soit x et $y \in \mathbb{R}^2$

$h(|tx+(1-t)y|) \leqslant h(t|x|+(1-t)|y|)$ par croissance

$\leqslant t\,h(|x|)+(1-t)\,h(|y|)$ par convexité

on a l'égalité si $|x|=|y|$ par strict. convexité de h.

si $|x|=|y|$ $\quad |tx+(1-t)y| < t|x|+(1-t)|y|$

sauf si $x=y$

$\Rightarrow h(|tx+(1-t)y|) < t\,h(|x|)+(1-t)\,h(|y|)$ si $x \neq y$

(inégalité stricte car on travaille avec la norme 2)

$u,v \in W_0^{1,1}$

$J(tu+(1-t)v) = \displaystyle\int h\left(\left|t\nabla(u+u_0)(x)+(1-t)\nabla(v+u_0)(x)\right|\right)dx$

$= \displaystyle\int t\,h(|\nabla u+\nabla u_0|)+(1-t)\,h(|\nabla v+\nabla u_0|)\,dx$

$\leqslant t\,J(u)+(1-t)\,J(v)$

on a l'égalité ssi $\nabla u+\nabla u_0 = \nabla v+\nabla u_0$

ssi $\nabla u=\nabla v$ pp

$u-v=$ cte pp $\Rightarrow u=v$ pp (on est ds $W_0^{1,1}$ $\Rightarrow$ cte nulle)

u et $v \in W_0^{1,1}$ pp

$\Rightarrow \boxed{u-v=0 \text{ pp.}}$

* $J(V) \longrightarrow +\infty$ qd $\|V\| \longrightarrow +\infty$?

$$J(V) = f(u_0 + V)$$

il suffit de montrer que $f(V) \underset{\|V\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

$$f(V) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla V|^2}\, dx$$

$$\|V\| = \|V\|_{L^1} + \|D_1 V\|_{L^1} + \|D_2 V\|_{L^1}$$
$$= \int_\Omega |V|\, dx + \int_\Omega |D_1 V|\, dx + \int_\Omega |D_2 V|\, dx$$

$$f(V) = \int_\Omega \sqrt{1 + |D_1 V|^2 + |D_2 V|^2}\, dx \geqslant \int_\Omega \left(|D_1 V|^2 + |D_2 V|^2\right)^{1/2} dx$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|D_1 V| + |D_2 V|\right) dx$$

car pour $a, b \geqslant 0$ $\quad a^2 + b^2 \geqslant \frac{1}{4}(a+b)^2$

$$\geqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \|V\|_1 \quad \text{grâce à } \underline{R\text{-}4}$$

montrons donc que si $\|V\| \longrightarrow +\infty$ alors $\|V\|_1 \longrightarrow +\infty$.

$$\|V\| = \|V\|_1 + \|D_1 V\|_1 + \|D_2 V\|_1$$
$$\leqslant 5 \left(\|D_1 V\|_1 + \|D_2 V\|_1\right)$$

et alors ? pourquoi ça $\Rightarrow$ $\|V\|_1 \to +\infty$ qd $\|V\| \to \infty$?

Donc lorsque $\|V\| \to \infty \Rightarrow f(V) \to +\infty$.

Q.3)

1) On ne peut rien dire car on ne sait pas si $W_0^{1,1}$ est réflexif.

2) oui (car on n'a pas besoin de la réflexivité).

Q.4) $u \in W^{1,1}(\Omega)$
$h \in C_c^\infty(\Omega)$

$$g(t) = J(u+th) \quad , \ t \in \mathbb{R}$$

$$g(t) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u(x) + t \nabla h(x)|^2}\, dx$$

posons $H(t,x) = \sqrt{1+|\nabla u(x) + t\nabla h(x)|^2}$

donc $g(t) = \int_\Omega H(t,x)\, dx$.

on va utiliser le th de dérivation sous le signe $\int$

- $H(t,\cdot) \in L^1(\Omega)$

- H dériv. c. comp. fonct. dérivable.

$$\frac{\partial H}{\partial t}(t,x) = \frac{\cancel{2}\langle \nabla u(x) + t\nabla h(x) / \nabla h(x) \rangle}{\cancel{2}\sqrt{1 + |\nabla u(x) + t\nabla h(x)|^2}}$$

- Soit t / $|t| \leq L$

$$\left|\frac{\partial H}{\partial t}(t,x)\right| \leq \left|\langle \nabla u(x) + t\nabla h(x) / \nabla h(x) \rangle\right|$$

$$\leq \big(|\nabla u(x)| + |t|\,|\nabla h(x)|\big)\,|\nabla h(x)| \qquad \text{(par Cauchy-Schwarz)}$$

$$\leqslant \left(|\nabla u(x)| + \underbrace{|\nabla h(x)|}_{\leq M}\right) \underbrace{|\nabla h(x)|}_{\leq M \text{ car } h \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)}$$

$$\leqslant M \left(|\nabla u(x)| + M\right) \quad \in L^1 \quad \text{car } u \in W^{1,1}$$

On a H mesurable et $\left|\frac{\partial H}{\partial t}\right|$ majorée par une fct L^1_{loc} sur $]-1,1[$
$\Rightarrow$ en appliquant le th. de dérivation sous le signe $\int$
on a :

$$g'(t) = \left[\int H(t,x)\,dx\right]'$$

$$= \int \frac{d}{dt} H(t,x)\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{g'(0) = \int_\Omega \frac{\langle \nabla u(x) \,/\, \nabla h(x) \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}}\,dx}$$

Q.5)

On suppose qu'$\exists\, \bar{u}$ sol. de (P). Dans ce cas, d'après Q.3) elle est unique, c.à.d $\bar{u} = \operatorname{argmin} \mathcal{J}$.

(a) $\bar{u}(r,\theta)$

$v(r,\theta) = \bar{u}(r, \theta + \alpha)$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}(r,\theta+\alpha) \qquad \frac{\partial v}{\partial \theta}(r,\theta) = \underbrace{\frac{\partial(\theta+\alpha)}{\partial \theta}}_{= 1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta}(r,\theta+\alpha) \right)$$

$$\Rightarrow \nabla v(r,\theta) = \nabla \bar{u}(r, \theta+\alpha)$$

$$\mathcal{J}(v) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla v|^2} = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + |\nabla v(r,\theta)|^2}\,d\theta\,dr = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + |\nabla \bar{u}(r,\theta+\alpha)|^2}\,d\theta\,dr$$

$$= \int_1^2 \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \sqrt{1 + |\nabla \bar{u}(r,\theta)|^2}\,d\theta\,dr = \mathcal{J}(\bar{u})$$

$$J(\bar{u}) = J(v)$$
$$\Rightarrow \bar{u}(r,\theta) = \bar{u}(r,\theta+\alpha)$$
deux vect. ont m norme ssi r est fixé
$\Rightarrow \bar{u}$ radiale.

⑥ on pose $\bar{u}(x) = w(|x|)$ $\quad w \in C^1(]1,2[) \cap C([1,2])$
car $\bar{u}$ est radiale.

On prend $\varphi \in C_c^\infty(]1,2[)$
et on pose $h(x) = \varphi(|x|)$, $h : \Omega \to \mathbb{R}$
$0 \notin \Omega \Rightarrow x \longmapsto |x|$ est continuement diff sur Ω
$\Rightarrow h \in C_c^\infty(\Omega)$

on a $g(t) = f(\bar{u}+th)$
donc si $\bar{u}$ est sol. du pb, $g'(0) = 0$
on a $\frac{\partial}{\partial x_i}(w(|x|)) = w'(|x|)\cdot\frac{x_i}{|x|}$

$$\Rightarrow |\nabla u(x)| = \sum_{i=1}^{N}\left(w'(|x|)^2\frac{x_i^2}{|x|^2}\right)^{1/2}$$
$$= \frac{w'(|x|)}{|x|}|x| = w'(|x|)$$

d'où $$\nabla u\,\nabla h = \sum_{i=1}^{2} w'(|x|)\frac{x_i}{|x|}\varphi'(|x|)\frac{x_i}{|x|}$$
$$= w'(|x|)\varphi'(|x|)$$

$$\Rightarrow g'(0) = \int_\Omega \frac{w'(|x|)\varphi'(|x|)}{\sqrt{1+|w'(|x|)|^2}}dx = 0$$
$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_1^2 \frac{w'(r)\varphi'(r)}{\sqrt{1+|w'(r)|^2}}r\,dr\,d\theta = 0$$
$$\Leftrightarrow \int_1^2 \frac{w'(r)\varphi'(r)}{\sqrt{1+|w'(r)|^2}}r\,dr = 0 \quad \forall \varphi$$

(c) <u>Rappel</u> : si $f \in L^1$ et f mes. alors $\int f \varphi \, dx = 0$ $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ alors $f = 0$

<u>Lemme</u> : | $f \in C(]1,2[, \mathbb{R})$ $\quad \int_1^2 f \varphi' \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(]1,2[)$
| alors $f = \text{cste}$

(démo ok avec les distributions)

$u_0(x) = \alpha(2 - |x|) \Rightarrow u_0$ radiale

$w(r) = u_0 + \bar{v}$ où $\bar{v} = \operatorname{argmin} J_{u_0}$

et $w(1) = u_0(1) = \alpha$ car <u>$\bar{v} = 0$ aux bords</u>

$w(2) = u_0(2) = 0$

$$w'(r)\,r = \underset{\substack{\text{cste d'après} \\ \text{le Lemme}}}{A} \sqrt{1 + (w'(r))^2} \quad \rightarrow w'(r) < 0 \quad \Rightarrow A < 0$$

on a $A = \dfrac{r\,w'(r)}{\sqrt{1 + w'(r)^2}}$ $\Rightarrow w'(r)^2 r^2 = A(1 + w'(r)^2)$

$\Rightarrow (r^2 - A^2)\, w'(r)^2 = A^2$ et $r^2 - A^2 > 0$

$\Rightarrow w'(r) = \dfrac{A}{\sqrt{r^2 - A^2}}$

$$\underbrace{w(2)}_{0} - \underbrace{w(1)}_{\alpha} = \int_1^2 \frac{-|A|}{\sqrt{\frac{r^2}{A^2} - 1}} \, dr \geqslant - \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{r^2 - 1}} \, dr$$

$$\Rightarrow \alpha \leqslant \int_1^2 \frac{dr}{\sqrt{r^2 - 1}}$$

MAITRISE de MATHEMATIQUES — CDO

Problème 2 (partiel 91) — Janvier 93.

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ $(N \geq 1)$. On suppose que

1) f est strictement convexe
2) $f(x) \longrightarrow +\infty$ quand $|x| \longrightarrow \infty$
3) ∇f est localement lipschitzienne (c.à.d $\forall R > 0$, $\exists M > 0$ tq $\forall x, y \in \mathbb{R}^N$, $|x|, |y| \leq R \Rightarrow |\nabla f(x) - \nabla f(y)| \leq M|x-y|$)
$\left(\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_N} \right)^t \right)$

On rappelle qu'il existe un et un seul $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ t.q. $f(\bar{x}) \leq f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^N$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^N$.

1. Construction de la suite $(x_n)_n$.

On suppose $x_0, \ldots, x_n$ connus.

a. Si $x_n \neq \bar{x}$, on pose $w_n = -\nabla f(x_n)$

Montrer qu'il existe $\rho_n > 0$ t.q.

$$f(x_n + \rho_n w_n) \leq f(x_n + \rho w_n), \quad \forall \rho \geq 0. \qquad (*)$$

on choisit un $\rho_n > 0$ vérifiant $(*)$ et on pose $x_{n+1} = x_n + \rho_n w_n$

b. Si $x_n = \bar{x}$ on pose $x_{n+1} = \bar{x}$

On montre maintenant la convergence vers $\bar{x}$ de la suite construite en 1.

2. Montrer que $(x_n)_n$ est bornée et que $(f(x_n))_n$ est convergente.

3. Si $x_n \neq \bar{x}$, montrer que $\forall \rho \geq 0$, $\exists\, \theta_{n,\rho} \in]0,1[$ t.q.

$$f(x_{n+1}) \leq f(x_n) - \rho \|w_n\|^2 + \rho \left(\nabla f(x_n + \theta_{n,\rho} \rho w_n) - \nabla f(x_n), w_n \right)$$

4. Montrer que $\nabla f(x_n) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$, puis que $x_n \longrightarrow \bar{x}$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Problème 2 — Cv. de l'algo de gradient à pas variable (optimal)

$f \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ $(N \geq 1)$

1) f strictement convexe
2) $f(x) \to +\infty$ qd $|x| \to \infty$
3) ∇f localement lipschitzienne.

On sait $\exists ! \, \bar{x} \in \mathbb{R}^N \;/\; f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$

$x_0 \in \mathbb{R}^N$

1) ⓐ $x_n \neq \bar{x}$. on pose $w_n = -\nabla f(x_n)$

<u>m.q.</u> $\exists \rho_n > 0$ tq $f(x_n + \rho_n w_n) \leq f(x_n + \rho w_n) \quad \forall \rho \geq 0$

on pose $g(\rho) = f(x_n + \rho w_n) \qquad \rho \in [0, +\infty[$

$\Rightarrow g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$g(\rho) \to +\infty$ qd $\rho \to +\infty$ car $\|x_n + \rho w_n\| \xrightarrow[\rho \to +\infty]{} +\infty$

$$g'(\rho) = \langle \nabla f(x_n + \rho w_n) \mid w_n \rangle$$

$$g'(0) = \langle \nabla f(x_n) \mid w_n \rangle = \underbrace{- \underbrace{\langle \nabla f(x_n) \mid \nabla f(x_n) \rangle}_{>0}}_{<0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g \text{ continue} \\ g(\rho) \to +\infty \text{ qd } \rho \to +\infty \\ g'(0) < 0 \end{array} \right. \Rightarrow \exists \rho_n > 0 \;;\; g(\rho_n) = \min_{\rho \geq 0} g(\rho)$$

dans ce cas on pose $x_{n+1} = x_n + \rho_n w_n$

(b) Si $x_n = \bar{x}$ on pose $x_{n+1} = \bar{x}$

2). $f(x_n + \rho_n w_n) \leq f(x_n + \rho w_n) \quad \forall \rho \geq 0$

$\quad\; \| $

$f(x_{n+1})$

donc pour $\rho = 0$ on a $f(x_{n+1}) \leq f(x_n)$

donc $(f(x_n))_n$ est une suite décroissante.

or $f(x_n) \geq f(\bar{x})$ car $\bar{x} = \underset{x \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{argmin}} f$

$(f(x_n))_n$ suite décroissante, minorée

$\Rightarrow f(x_n)$ converge vers L.

- Supposons $(x_n)_n$ non bornée.
Alors $\exists (x_{n_k})_k$ ss suite tq $\|x_{n_k}\| \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

donc d'après l'hypothèse de départ 2) on aurait $f(x_{n_k}) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

ce qui est en contradiction avec $f(x_n) \to L$.

donc $(x_n)_n$ bornée.

3) $x_n \neq \bar{x}$

$f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ donc :

$$
\begin{aligned}
f(x_n + \rho_n w_n) = f(x_{n+1}) &\leq f(x_n + \rho w_n) \qquad 0 < \theta_{n,\rho} < 1 \\
&\leq f(x_n) + Df(x_n + \theta_{n,\rho}\, \rho\, w_n)(\rho w_n) \qquad \text{(Formules de Taylor)} \\
&\leq f(x_n) + \langle \nabla f(x_n + \theta_{n,\rho}\, \rho\, w_n), \rho w_n \rangle \\
&\leq f(x_n) - \rho \|w_n\|^2 + \rho \left(\nabla f(x_n + \theta_{n,\rho}\, \rho\, w_n) - \nabla f(x_n), w_n \right)
\end{aligned}
$$

car $w_n = -\nabla f(x_n)$

4) m.q. $\nabla f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$$\rho\|w_n\|^2 - \rho\underbrace{\left\langle \nabla f(x_n+\theta_{n,\rho}\rho w_n) - \nabla f(x_n)\,,\, w_n\right\rangle}_{A} = \underbrace{f(x_n) - f(x_{n+1})}_{\substack{\downarrow\, n\to+\infty \\ 0}}$$

par Cauchy-Schwarz, car $(f(x_n))_n$ converge

$$A \leqslant \|\nabla f(x_n+\theta_{n,\rho}\rho w_n) - \nabla f(x_n)\|\,\|w_n\| \qquad \forall \rho\geqslant 0$$

Soit η et α t.q. $\|x_n\| \leqslant \eta$
$\|w_n\| \leqslant \alpha$

$$\Rightarrow \|x_n+\theta_{n,\rho}\rho w_n\| \leqslant \eta+\alpha \qquad \text{si } 0\leqslant\rho\leqslant 1$$

$$\exists\, \Pi_{(\alpha+\beta)} \;;\; \|\nabla f(x_n+\theta_{n,\rho}\rho w_n) - \nabla f(x_n)\| \leqslant \Pi\, \|\theta_{n,\rho}\rho w_n\|$$

$$\leqslant \rho\,\Pi\, \|w_n\|$$

$$\Rightarrow \rho\|w_n\|^2 - \Pi\rho^2\|w_n\|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \rho\in[0,1)$$

$$\rho\|w_n\|^2(1-\Pi\rho) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Pi \leqslant \tfrac{1}{2} \quad -\Pi\rho \geqslant -\frac{\rho}{2}$$

- prenons $\rho = 1$
  $\Rightarrow 1-\Pi\rho \geqslant \frac{1}{2}$ $\qquad \|w_n\|^2 \to 0 \quad n\to+\infty$
  $\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\|}{\|\nabla f(x_n)\|^2}$
- $\rho\in[0,1]$
  $\Pi \geqslant \frac{1}{2} \qquad \rho = \frac{1}{2\Pi}$
  $1-\Pi\rho \leqslant 1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2\Pi} = 1-\frac{1}{4\Pi} > 0$ car $\Pi \geqslant 1/2$
  $\Rightarrow \|w_n\|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$$\Rightarrow \nabla f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

* pour montrer que $x_n \underset{n \to +\infty}{\to} \bar{x}$ on suppose $x_n \not\to \bar{x}$

x_n est borné

$\Rightarrow \exists \left(x_{n_k}\right)_k$ qui converge

$\nabla f(x_{n_k}) \to 0$

$x_{n_k} \to \bar{x}$

contradiction

?

Voici un TD "oublié" dans le document (CDO) que tu as reçu.
ex. 3 : la différentielle dépend de la norme ...

Université de Savoie, Licence de Mathématiques
Analyse, TD, Feuille 8, Janvier 1993

Thierry

→ pour FABRICE

"Calcul Différentiel"

Exercice 1 (Normes construites à partir d'une base algébrique)
Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $(e_i)_{i\in I}$ une base algébrique de E.
Soit $x \in E$, on sait qu'il existe une unique famille, $(\lambda_i)_{i\in I}$, de nombres réels telle que $\mathrm{card}\{i \in I\,;\, \lambda_i \neq 0\} < +\infty$, et $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$ (noter que cette dernière somme a bien un sens, car il y a un nombre fini de termes non nuls).
On pose :

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \textstyle\sum_{i\in I} |\lambda_i|, \\ \|x\|_2 &= (\textstyle\sum_{i\in I} (\lambda_i)^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \|x\|_\infty &= \sup_{i\in I} |\lambda_i|. \end{aligned}$$

1. Montrer que $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont trois normes sur E.
2. Montrer que $\|.\|_2$ est induite par un produit scalaire (donner le produit scalaire) et que $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas induites par un produit scalaire si $\mathrm{card} I > 1$.
3. Montrer que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$, pour tout $x \in E$. Si E est de dimension finie, on sait que les trois normes sont équivalentes. Si E est de dimension infinie, montrer que chacune des trois normes n'est pas équivalente à chacune des deux autres.

Exercice 2 (La limite d'une suite peut dépendre de la norme ...)
Soit E un e.v.n. sur $\mathbb{R}$. On note $\|.\|$ la norme sur E. On suppose que E est de dimension infinie.

1. Montrer qu'il existe $(e_i)_{i\in I}$, base algébrique de E, telle que $\mathbb{N} \subset I$ et $(\frac{1}{n})e_n \to e_0$ (pour la norme de E) quand $n \to \infty$.
2. Montrer qu'il existe une autre norme sur E, notée $\|.\|_\star$, un élément non nul de E, noté a, et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset E$ tels que :

$$\begin{aligned} a_n &\to a, \text{ dans } (E, \|.\|), && \text{quand } n \to \infty, \\ a_n &\to 0, \text{ dans } (E, \|.\|_\star), && \text{quand } n \to \infty. \end{aligned}$$

   En déduire que $a = a_n + b_n$, avec :

$$\begin{aligned} b_n &\to 0, \text{ dans } (E, \|.\|), && \text{quand } n \to \infty, \\ a_n &\to 0, \text{ dans } (E, \|.\|_\star), && \text{quand } n \to \infty. \end{aligned}$$

Exercice 3 (La dérivée peut dépendre de la norme ...)
Soit E un e.v.n. sur $\mathbb{R}$. On note $\|.\|$ la norme sur E. On suppose que E est de dimension infinie.
Montrer qu'il existe une autre norme sur E, notée $\|.\|_\star$, et une application $f : \mathbb{R} \to E$ telles que :

(i) f est dérivable (et différentiable) en 0 si on munit E de la norme $\|.\|$. On note $f'(0)$ cette dérivée (noter que $f'(0) \in E$).

(ii) f est dérivable (et différentiable) en 0 si on munit E de la norme $\|.\|_\star$. On note $f'_\star(0)$ cette dérivée (noter que $f'_\star(0) \in E$).

(iii) $f'(0) \neq f'_\star(0)$.

[on pourra définir f ainsi :

$$f(t) = \frac{1}{n}e_n((n+1)t-1) + \frac{1}{n+1}e_{n+1}(1-nt),\ \frac{1}{n+1} < t \leq \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*,$$
$$f(0) = 0,$$
$$f(t) = -f(-t),\ t < 0,$$

avec $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convenablement choisie, conformément à l'exercice précédent.]

Exercice 4 (Différentiabilité de la norme)

1. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé (sur $\mathbb{R}$). Montrer que l'application : $x \mapsto \|x\|$ n'est pas différentiable en 0.
2. On suppose maintenant que E est un espace de Hilbert (réel), on définit :

$$\phi : E \to \mathbb{R}\,;\ \phi(x) = (x/x),$$

$$\psi : E \to \mathbb{R}\,;\ \psi(x) = \|x\|.$$

Montrer que ϕ est différentiable en tout point de E. Calculer $D\phi(x)(y)$, pour tout $(x,y) \in E \times E$, et grad$\phi(x)$, pour tout $x \in E$. Montrer que ψ est différentiable en tout point de $E \setminus \{0\}$. Calculer $D\psi(x)(y)$, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$ et tout $y \in E$. Calculer grad$\psi(x)$, pour tout $x \in E$.

Exercice 5 (Différentiabilité de la norme L^2)
Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$. On définit $f : E \to \mathbb{R}$ par :

$$f(u) = \int_0^1 (u(t))^2 dt,\ \forall u \in E.$$

On munit E de la norme de L^1, ou de la norme de L^∞, f est elle différentiable en tout point de E? (Traiter les deux cas séparément).

Exercice 6 (Différentiabilité de la norme L^1)
Soit $E = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$. On munit E de la norme habituelle. On définit $f : E \to \mathbb{R}$ par :

$$f(w) = \int_0^1 |w(t)| dt,\ \forall w \in E.$$

Soit $u \in E$. On pose $A_+ = \{x \in \mathbb{R}\,;\, u(x) > 0\}$, $A_- = \{x \in \mathbb{R}\,;\, u(x) < 0\}$, $A_0 = \{x \in \mathbb{R}\,;\, u(x) = 0\}$.

1. Soit $v \in E$, $v \neq 0$. Montrer que f est dérivable en u dans la direction v et que :

$$f'_v(u) = \int v1_{A_+} d\lambda - \int v1_{A_-} d\lambda + \int |v| 1_{A_0} d\lambda.$$

2. On suppose dans cette question que $\lambda(A_0) \neq 0$. Montrer que l'application $v \mapsto f'_v(u)$ n'est pas linéaire (de E dans $\mathbb{R}$). En déduire que f n'est pas différentiable en u.
3. On suppose dans cette question que $\lambda(A_0) = 0$. Montrer que l'application $v \mapsto f'_v(u)$ est linéaire continue (de E dans $\mathbb{R}$). Montrer cependant que f n'est pas différentiable en u. [On pourra calculer $f(u+h)$, avec $h = -2u1_A$, $A \in \mathcal{R}$.]

autres de Math. — CDO — Janvier 93

Exercice 1 Convergence de l'algorithme de Polak - Ribière.

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ t.q. $H(x)$ est sdp pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ ($H(x)$ est la matrice Hessienne de f au point x). ($\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$)

On suppose qu'il existe $\delta_0, \delta_1 > 0$ t.q.

$$\delta_0 \|y\|^2 \leq (H(x)y, y) \leq \delta_1 \|y\|^2 \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^N.$$

1) Montrer que f est strictement convexe, que $f(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$ et que $vp(H(x)) \subset [\delta_0, \delta_1]$ $\forall x \in \mathbb{R}$

On note $\bar{x} = \arg\min f$. Soit $(x_n)_n$ la suite donnée par l'algorithme de Polak Ribière, c.à.d :

1. x_0 quelconque,
2. passage de x_n à x_{n+1} : $g_n = \nabla f(x_n)$. Si $g_n = 0$ alors $x_{n+1} = x_n$, si $g_n \neq 0$. on pose $w_n = -g_n + \lambda_{n-1} w$, $\lambda_{n-1} = \dfrac{(g_n - g_{n-1}, g_n)}{\|g_{n-1}\|^2}$ (si $n=0$ $w_0 = -g_0$). $x_{n+1} = x_n + \rho_n w_n$, $\rho_n > 0$ optimal (dans la direction w_n).

On suppose $g_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

2) Comme ρ_n est optimal, montrer que $(g_{n+1}, w_n) = 0$ $\forall$, et $(g_n, g_n) = -(g_n, w_n)$ $\forall n$.

3) On note $J_n = \int_0^1 H(x_n + \theta \rho_n w_n)\, d\theta$ $(\in \mathbb{R}^{N,N})$

Montrer que

$$g_{n+1} = g_n + \rho_n J_n w_n$$

en déduire que

$$\rho_n = -\frac{(g_n, w_n)}{(J_n w_n, w_n)}$$

4) Montrer que $\|w_n\| \leq \left(1 + \frac{\delta_1}{\delta_0}\right) \|g_n\|$

(écrire $\|w_n\| \leq \|g_n\| + |\lambda_{n-1}| \|w_{n-1}\|$, utiliser la formule donnant λ_{n-1} et 3. On pourra aussi remarquer que J_n est s.d.p et $vp(J_n) \subset [\delta_0, \delta_1]$)

5) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ t.q. $(g_n, w_n) \leq -\alpha \|w_n\| \|g_n\|$.
(utiliser 4.,2.)

6). Montrer que $x_n \to \bar{x}$ quand $n \to \infty$

[suivre une démarche semblable à celle des TD 5 et 6, c'est à dire ~~montrer~~ montrer d'abord que $g_n \to 0$, pour cela on remarquera que $\forall n$, $\forall \rho > 0$
$f(x_{n+1}) \leq f(x_n + \rho w_n) \leq f(x_n) - \rho \alpha \|w_n\| \|g_n\| + \frac{\rho^2}{2} \delta_1 \|w_n\|^2$]

Exercice 2 Algorithme de Quasi-Newton pour la minimisation d'une fonctionnelle quadratique.

Soient $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ une matrice sdp et $b \in \mathbb{R}^N$. On pose
$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^N.$$
Pour chercher $\bar{x} = \arg\min f$ on va utiliser un algorithme de Quasi-Newton, c.a.d.

$$(1) \begin{cases} x_0 \text{ quelconque} \\ x_{n+1} = x_n - \rho_n K_n g(x_n) \end{cases}$$

avec $g = Df$, K_n une matrice sdp (à déterminer) et ρ_n optimal dans la direction $w_n = -K_n g(x_n)$.

I. Calcul de ρ_n. On note $g_n = g(x_n)$. On suppose $g_n \neq 0$.

1. Montrer que w_n est une direction de descente stricte et calculer (en fonction de K_n et g_n) ρ_n.

2. On suppose que pour certain n on a $K_n = A^{-1}$
(Notez que A est la matrice Hessienne de f)
Montrer que $\rho_n = 1$ et que $x_{n+1} = \bar{x}$.

-3-

Méthode de Fletcher-Powell

On prend maintenant $K_0 = Id$ et

$$K_{n+1} = K_n + \frac{s_n s_n^t}{(s_n, y_n)} - \frac{(K_n y_n)(K_n y_n)^t}{(K_n y_n, y_n)} \quad , \quad n \geq 0$$

(NB $(x,y) = x^t y$) ; avec $s_n = x_{n+1} - x_n$, $y_n = g_{n+1} - g_n$ $(= A s_n)$

On va montrer que cet algorithme converge en au plus N itérations.

1- On suppose que $s_0, \dots, s_{n-1}$ sont des vecteurs A-Conjugués et non nuls ; et que $K_0, \dots, K_n$ sont des matrices s.d.p tq. $K_j A s_i = s_i$ pour $0 \leq i < j \leq n$.

(NB $n \in \{0, \dots, N-1\}$, pour $n=0$ on demande seulement K_0 s.d.p.)

-a- On suppose que $g_n \neq 0$. Montrer que $s_n \neq 0$ (cf I), et que pour $i < n$, $(s_n, A s_i) = 0 \iff (g_n, s_i) = 0$

Montrer que $(g_n, s_i) = 0$ [On pourra remarquer que

→ $(g_{i+1}, s_i) = (g_{i+1}, w_i) = 0$ et $(g_n - g_{i+1}, s_i) = 0$ par l'hypothèse de conjugaison de $s_0, \dots, s_{n-1}$].

En déduire que $s_0, \dots, s_n$ sont A Conjugués non nuls

-b. Montrer que K_{n+1} est symétrique

-c- Montrer que $K_{n+1} A s_i = s_i$ pour $0 \leq i \leq n$.

-d- Montrer que

$$(K_{n+1} x, x) = \frac{\|x\|^2_{K_n} \|y\|^2_{K_n} - (y_n, x)^2_{K_n}}{\|y_n\|^2_{K_n}} + \frac{(s_n, x)^2}{(A s_n, s_n)} \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

(NB $(x,y)_{K_n} = (K_n x, y)$ et $\|x\|^2_{K_n} = (x,x)_{K_n}$).

En déduire que K_{n+1} est sdp.

[On rappelle que, dans un espace de Hilbert réel, $(x,y) = \|x\| \|y\| \Rightarrow x$ et y sont colinéaires]

- On suppose que $g_n \neq 0$ pour tout $n \in \{0, \dots, N-1\}$. Montrer (par récurrence sur n) que $s_0, \dots, s_{N-1}$ sont A conjugués et non nuls et que $K_N A s_i = s_i$ pour $i \in \{0, \dots, N-1\}$. En déduire que $K_N = A^{-1}$, $\rho_N = 1$ et $x_{N+1} = A^{-1}b = \bar{x}$.

Exercice 3 Pour chercher $\bar{x} = \arg\min f$, $f \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, on utilise la méthode itérative suivante : x_0 quelconque, $k \in \mathbb{N}$ on passe de x_k à x_{k+1} en résolvant N problèmes de minimisation à une variable :

$$\begin{cases} f(x_1^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}, x_i^{k+1/2}, x_{i+1}^{k}, \dots, x_N^{k}) = \inf_{\theta \in \mathbb{R}} f(x_1^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}, \theta, x_{i+1}^{k}, \dots, x_N^{k}) \\ x_i^{k+1} = (1-\omega)\, x_i^{k} + \omega\, x_i^{k+1/2}, \quad 1 \leq i \leq N \end{cases}$$

($\omega \neq 0$ est un paramètre donné, généralement $0 < \omega < 2$, $x_k = (x_1^k, \dots, x_N^k)$.)

Cette méthode s'appelle "méthode de sur-relaxation" pour $\omega > 1$, "méthode de sous-relaxation" pour $\omega < 1$ (et méthode de relaxation pour $\omega = 1$).

On suppose que $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$ avec $A \in \mathbb{R}^{N,N}$, $b \in \mathbb{R}^N$, A s.d.p. Montrer que cette méthode coïncide avec les méthodes de sous et sur relaxation introduites pour la résolution de $Ax = b$.

Exercice 1

$f \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ tq $H(x)$ s.d.p. $\forall x \in \mathbb{R}^N$

(4·4 = 4·4₂)

$\exists\, \delta, \delta_1 > 0$ tq. $\delta \|y\|^2 \leq \big(H(x)y, y\big) \leq \delta_1 \|y\|^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$

1)

NB : $f : E \to F$

① $x \in E \to Df(x) \in \mathcal{L}(E,F)$

② $E = \mathbb{R}$, $\underline{f'(x) \in F}$ avec $f'(x) = Df(x)(1)$

③ $F = \mathbb{R}$, E Hilbert

grad $f(x) \in E$

$Df(x) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E'$

Th. de Riesz : $Df(x) \in E'$
donc $\exists !\, z \in E$ tq $Df(x)(y) = (y|z)_E \quad \forall y \in E$

$$\boxed{z = \text{grad } f(x)}$$

NB : • $E = F = \mathbb{R}$

$f'(x) = \text{grad} f(x) = Df(x)(1)$

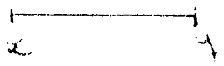
• $F = \mathbb{R}$

$E = \mathbb{R}^N$ $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$

$$Df(x)(y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, y_i = (\text{grad} f(x) \,/\, y)$$

avec $\text{grad } f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$

Montrons que f est strictement convexe.



Soit $z = rx + (1-r)y \qquad r \in]0,1[$

Soit $\varphi(s) = f(z + su) \qquad u \in \mathbb{R}^N$

$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad \varphi \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

- $\varphi'(s) = Df(z+su)(u)$ $\qquad$ (car $\underset{\varphi'(s)}{\underset{\|}{D\varphi(s)(1)}} = Df(z+su) \circ \underbrace{D_{z+\cdot u}(s)}_{\begin{pmatrix} \frac{\partial(z_1+su_1)}{\partial s} \\ \vdots \\ \frac{\partial(z_N+su_N)}{\partial s} \end{pmatrix} = u}$

- $\varphi''(s) = \left(D^2 f(z+su)(u)\right)(u)$

$$= D^2 f(z+su)(u,u)$$

$$\varphi''(s) = H(z+su)u \cdot u$$

$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(\theta) \quad$ avec $\theta \in]0,1[$

$$f(z+u) = f(z) + Df(z)(u) + \frac{1}{2} D^2 f(z+\theta u)(u,u)$$

$$\boxed{f(z+u) = f(z) + Df(z)(u) + \frac{1}{2} H(z+\theta u)u \cdot u}$$

Comme H est s.d.p on a pour $u \neq 0$

$$f(z+u) > f(z) + Df(z)(u)$$

prenons $u = x - z \neq 0 \Rightarrow f(x) > f(z) + Df(z)(x-z) \qquad \times r$

puis $u = y - z \neq 0 \Rightarrow f(y) > f(z) + Df(z)(y-z) \qquad \times (1-r)$

$$\Rightarrow r f(x) + (1-r) f(y) > f(z) + Df(z)\Big[\underbrace{rx - \cancel{rz} + y - z - ry + \cancel{rz}}_{= (1-r)y + rx - z = 0}\Big]$$

$\Rightarrow$ comme $z = tx + (1-t)y$ on a

$$t f(x) + (1-t) f(y) > f(tx + (1-t)y) \qquad t \in]0,1[$$

$\Rightarrow$ f strictement convexe.

* $f(u) \to +\infty$ qd $\|u\| \to +\infty$?

$$f(u) = f(0) + Df(0)(u) + \frac{1}{2} H(\theta_u u)\, u \cdot u$$

$$\geq f(0) + Df(0)(u) + \frac{1}{2}\delta_0 \|u\|^2$$

$$\geq f(0) - \|Df(0)\|\,\|u\| + \frac{\delta_0}{2}\|u\|^2$$

$$\geq \underbrace{f(0) + \|u\| \underbrace{\left(\frac{\delta_0}{2}\|u\| - \|Df(0)\|\right)}_{\substack{\downarrow\ \|u\| \to +\infty \\ +\infty}}}_{\substack{\downarrow\ \|u\| \to +\infty \\ +\infty}}$$

car $Df(0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

$\Rightarrow \|Df(0)\| \geq \dfrac{|Df(0)(u)|}{\|u\|}$

$\Rightarrow \|Df(0)\|\,\|u\| \geq Df(0)(u)$

$\Rightarrow Df(0)(u) \geq -\|Df(0)\|\,\|u\|$

$\Rightarrow$ $f(u) \to +\infty$ qd $\|u\| \to +\infty$

* v.p. $(H(x)) \subset [\delta_0, \delta_1]$?

H sdp $\Rightarrow$ vp réelles.

Soit y un vecteur propre associé à λ.

$$\delta_0 \|y\|^2 \leq (H(x)y / y) \leq \delta_1 \|y\|^2$$

$$— \qquad \leq (\lambda y, y) \qquad \leq \qquad —$$

$$\delta_0 \|y\|^2 \leq \lambda \|y\|^2 \leq \delta_1 \|y\|^2 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\delta_0 \leq \lambda \leq \delta_1}$$

2) $\bar{x} = \arg\min_{\mathbb{R}^N} f$

$(x_n)_n$ suite donnée par l'algo de Fletcher-Ribière.
on suppose $g_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.
ρ_n optimal.

on va montrer, par récurrence que :
① w_n d.d.s. en x_n $\forall n$.
② $(g_{n+1} / w_n) = 0$ $\forall n$.

rappel | $\varphi(\rho) = f(x_n + \rho w_n) \longrightarrow +\infty$ qd $\rho \to +\infty$
Si w_n dds en x_n alors $\exists \rho_n > 0$ tq $f(x_n + \rho_n w_n) \leq f(x_n + \rho w_n)$ $\forall \rho > 0$
et $\nabla f(\underbrace{x_n + \rho_n w_n}_{x_{n+1}}) \cdot w_n = 0$ (car $\varphi'(\rho_n) = 0$
$\overset{\shortparallel}{\nabla f(x_n + \rho_n w_n) \cdot w_n}$)

$\underline{n=0}$; $w_0 = -g_0 \neq 0$ (par hyp)
$= -\nabla f(x_0) \implies \underline{w_0 \text{ dds}}$ et $\underline{(g_1 / w_0) = \nabla f(x_1) \cdot w_0 = 0}$

$\underline{\text{H.Réc}}$: | w_{n-1} dds en x_{n-1}
| $(g_n / w_{n-1}) = 0$

$w_n = -g_n + \lambda_{n-1} w_{n-1}$

$\underbrace{w_n \cdot g_n}_{\overset{\shortparallel}{w_n \cdot \nabla f(x_n)}} = \underbrace{-g_n \cdot g_n}_{<0} + \underbrace{\lambda_{n-1} w_{n-1} \cdot g_n}_{\overset{\shortparallel}{0}}$

$w_n \cdot \nabla f(x_n) < 0 \implies \underline{w_n \text{ d.d.s en } x_n}$

on a donc aussi $\underline{(g_{n+1} , w_n) = (\nabla f(x_{n+1}) / w_n) = 0}$

donc $\underline{(g_{n+1} / w_n) = 0 \ \forall n}$

$n=0$ → ok

$n \geq 1$ $\quad (g_n / g_n) = -(g_n / w_n) + (g_n , \alpha_{n-1} w_{n-1})$

$\quad = -(g_n / w_n) + \alpha_{n-1} \underbrace{(g_n / w_{n-1})}_{\overset{\shortparallel}{0}}$

$\Rightarrow \underline{(g_n / g_n) = -(g_n / w_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

3) $J_n = \int_0^1 H(x_n + \theta \rho_n w_n)\, d\theta \qquad (\in \mathbb{R}^{N,N})$

$(J_n)_{ij} = \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_n + \theta \rho_n w_n)\, d\theta$

$\varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t)\, dt \qquad \varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$\qquad$ (ou $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ (comp. par composante))

posons $\varphi(t) = \nabla f(x_n + t\rho_n w_n) \Rightarrow \varphi'(t) = H(x_n + t\rho_n w_n)\, \rho_n w_n$

$\Rightarrow \nabla f(x_n + \rho_n w_n) - \nabla f(x_n) = \int_0^1 H(x_n + t\rho_n w_n) \cdot \rho_n w_n \, dt$

$\Leftrightarrow g_{n+1} - g_n = J_n \rho_n w_n$

$\underline{g_{n+1} = g_n + J_n \rho_n w_n}$

$\underbrace{g_{n+1} \cdot w_n}_{\overset{\shortparallel}{0}} = g_n \cdot w_n + J_n \rho_n w_n \cdot w_n$

$$\boxed{\Rightarrow \rho_n = \frac{-(g_n / w_n)}{(J_n w_n / w_n)}}$$

4) $\|w_n\| \leq \left(1+\frac{\delta_1}{\delta_0}\right)\|g_n\|$?

$$\|w_n\| \leq \|g_n\| + |\lambda_{n-1}|\,\|w_{n-1}\|$$

$$\leq \|g_n\| + \frac{|(g_n - g_{n-1})\cdot g_n|}{\|g_{n-1}\|^2}\,\|w_{n-1}\|$$

$$\leq \|g_n\| + |\rho_{n-1}|\,\frac{|J_{n-1}w_{n-1}\cdot g_n|}{\|g_{n-1}\|^2}\,\|w_{n-1}\|$$

$$\leq \|g_n\| + \frac{\overbrace{|(g_{n-1}/w_{n-1})|}^{=|(g_{n-1}/g_{n-1})|\ (\text{d'après qu } 2)}}{|(J_{n-1}w_{n-1}, w_{n-1})|}\,\frac{|J_{n-1}w_{n-1}\cdot g_n|}{\|g_{n-1}\|^2}\,\|w_{n-1}\|$$

$$\leq \|g_n\| + \frac{2\|g_{n-1}\|\,\|g_{n-1}\|}{\delta_0\cancel{\|w_{n-1}\|^2}}\,\frac{\|g_n\|\,\delta_1\cancel{\|w_{n-1}\|}}{2\cancel{\|g_{n-1}\|^2}}\,\cancel{\|w_{n-1}\|}$$

passage ?

$$\boxed{\|w_n\| \leq \left(1+\frac{\delta_1}{\delta_0}\right)\|g_n\|}$$

5) on a vu que $\|w_n\| \leq \left(1+\frac{\delta_1}{\delta_0}\right)\|g_n\|$ et $(g_n/w_n) = -(g_n/g_n)$
$= -\|g_n\|^2$

$$\underbrace{\frac{1}{\left(1+\frac{\delta_1}{\delta_0}\right)}}_{\alpha}\|w_n\| \leq \|g_n\|$$

$\alpha\|w_n\| \leq \|g_n\| \Rightarrow -\|g_n\| \leq -\alpha\|w_n\|$

$-\|g_n\|^2 \leq -\alpha\|w_n\|\,\|g_n\|$

$$\Rightarrow \boxed{(g_n/w_n) \leq -\alpha\|w_n\|\,\|g_n\|}$$

TD à finir ...

Feuille n° 8

Université de Savoie, Maîtrise de Mathématiques
Calcul Différentiel et Optimisation, TD, Janvier 1993

$\boxed{\text{Exercice 1}}$ Théorème de Stampacchia
Soient H un espace de Hilbert réel, a une forme bilinéaire continue et coercive (i.e. telle qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2, \forall \ u \in H$), $T \in H'$ (i.e. linéaire et continue de H dans $\mathbb{R}$), et K un convexe fermé non vide de H. On va montrer qu'il existe une et une seule solution au problème suivant :

$$\begin{cases} u \in K, \\ a(u, v-u) \geq T(v-u), \quad \forall \ v \in K. \end{cases} \tag{P}$$

(Un problème de ce type s'appelle "inéquation variationnelle".)

1. Montrer qu'il existe $z \in H$ et A, opérateur linéaire continu de H dans H, tels que $T(v) = (z/v)$, $\forall \ v \in H$, et $a(u,v) = (Au/v)$, $\forall \ u,v \in H$.

2. Montrer que u est solution de (P) si et seulement si $u = P_K(u - \rho(Au - z))$, où P_K est le projecteur (relatif au produit scalaire) sur le convexe K et ρ est un réel strictement positif quelconque.

3. Montrer que, pour un choix convenable de ρ, l'application S_ρ définie de H dans H par $S_\rho(u) = P_K(u - \rho Au + \rho z)$ est strictement contractante. En déduire l'existence et l'unicité de la solution du problème (P).

4. Montrer que le théorème de Stampacchia donne, comme cas particulier, le théorème de Lax-Milgram.

5. On suppose maintenant que a est symétrique et on pose, pour $v \in H$, $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - T(v)$. Montrer que u, solution de (P), est l'unique solution du problème de minimisation :

$$\begin{cases} u \in K, \\ J(u) \leq J(v), \quad \forall \ v \in K. \end{cases} \tag{Q}$$

$\boxed{\text{Exercice 2}}$ Problème de l'obstacle Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$, ψ une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ et $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\Omega)$, on définit $J : H^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ par : $J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx - \int_\Omega f(x)v(x)dx$, et on considère ici le problème suivant :

$$\begin{cases} u \in K, \\ J(u) \leq J(v), \quad \forall \ v \in K = \{v \in H^1_0(\Omega), v \leq \psi \text{ pp}\} \end{cases} \tag{Q}$$

1. On suppose que $K \neq \emptyset$. Montrer que le problème (Q) admet une solution unique, et donner la formulation "Inéquation variationnelle" du problème.

2. Montrer que si u est solution du problème (Q), alors $\Delta u + f$ est une distribution positive. [*Considérer la formulation Inéquation Variationnelle de (Q) avec une fonction v bien choisie*].

3. Montrer que si $f \in L^2(\Omega)$, $\psi \in H^1_0(\Omega)$ et si la solution de (Q) appartient à $H^2(\Omega)$ (cette dernière hypothèse est difficile à vérifier), alors la solution du problème (Q) est l'unique solution du problème suivant :

$$\begin{cases} u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \\ (\Delta u + f)(\psi - u) = 0 \text{ pp} \\ u \leq \psi \text{ pp} \\ \Delta u + f \geq 0 \text{ pp} \end{cases} \tag{PF1}$$

On suppose de plus que $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$, $\psi \in C(\Omega, \mathbb{R})$, et que la solution de (Q) appartient à $C^2(\Omega, \mathbb{R})$, montrer que la solution de (Q) est l'unique solution du problème suivant (dit "problème à frontière libre") :

$$\begin{cases} u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \\ u \leq \psi \\ \Delta u(x) + f(x) = 0 \text{ si } x \in \Omega^- = \{u < \psi\} \\ \Delta u(x) + f(x) \geq 0 \text{ si } x \in \Omega^0 = \{u = \psi\} \end{cases} \tag{PF2}$$

($\partial\Omega^0$ s'appelle la frontière libre).

voir p 83

4. On prend ici $N = 1$, $\Omega =]0,1[$, $f = 0$, $\cancel{\psi = 1_{\frac{1}{2}}}$ ~~puis~~ $\cancel{\psi = -1_{\frac{1}{2}}}$. Donner u, solution de (Q), et donner $\Delta u + f$, dans les deux cas. A-t-on $u \in H^2(\Omega)$? En s'inspirant de l'exemple précédent, donner un exemple avec $N = 1$, $\Omega =]0,1[$, $f = 0$, $\psi \in C([0,1], \mathbb{R})$ et $u \notin H^2(\Omega)$ (et aussi $u \notin C^2(\Omega, \mathbb{R})$).

5. En considérant le cas $N = 1$, écrire le problème obtenu en discrétisant le problème (Q) à l'aide d'élements finis $P1$.

Exercice 3 Problème de la digue Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $g \in H^1(\Omega)$, $g \geq 0$ pp. On rappelle le théorème de trace : $\exists\ \gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$, $u \mapsto \gamma u$, linéaire continue, telle que $\gamma u = u$ sur $\partial\Omega$ si $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. On définit $K = \{v \in H^1(\Omega), v \geq 0 \text{ pp }, v = g \text{ sur } \partial\Omega \text{ (au sens } \gamma u = \gamma g \text{ dans } L^2(\partial\Omega))\}$.

1. Montrer que K est un convexe fermé non vide de $H^1(\Omega)$.

2. Montrer que le problème suivant admet une unique solution :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in K, \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x) \nabla(v-u)(x)dx \geq -\int_\Omega (v-u)(x)dx, \quad \forall\ v \in K. \end{array} \right. \tag{P}$$

3. On suppose maintenant qu'il existe $\alpha \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $\alpha = 0$ sur Ω^c, $\alpha > 0$ sur Ω (cette hypothèse demande une certaine "régularité" de Ω ; par exemple, dans le cas où $\Omega = B(0,1)$, on peut prendre $\alpha(x) = \dfrac{1}{|x|^2 - 1}$). Montrer que :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in K \cap H^2(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x) \nabla(v-u)(x)dx \geq -\int_\Omega (v-u)(x)dx \quad \forall\ v \in K \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} u \in K \cap H^2(\Omega) \\ \Delta u = 1 \text{ pp sur } \{u > 0\} \\ \Delta u \geq 1 \text{ pp sur } \{u = 0\} \end{array} \right.$$

Exercice 1

H Hilbert (réel)
a forme bilinéaire, continue, coercive.
$L \in H'$
K convexe, fermé, non vide de H.

1) • D'après le th. de Riesz on a :

$$\forall T \in H', \ \exists! \, z \in H \ / \ T(v) = \langle z | v \rangle \quad \forall v \in E$$

• On considère $a(u, \cdot)$

a continue $\Rightarrow$ $|a(u,v)| \leq C \, \|u\| \, \|v\| \quad \forall v \in H$

$\Rightarrow$ $|a(u,v)| \leq C' \, \|v\| \quad \forall v \in H$, u fixé

$\Rightarrow$ $a(u, \cdot) \in H'$

donc $\exists! \, \underset{H}{\overset{\cap}{z}}$ qui va donc dépendre de u, notons donc $z = Au$, avec $A : H \to H$

tel que $a(u,v) = \langle Au | v \rangle \quad \forall v \in H$

A linéaire ?

$$\begin{aligned} \langle A(\alpha u + \beta v), w \rangle &= a(\alpha u + \beta v, w) \\ &= \alpha a(u, w) + \beta a(v, w) \\ &= \alpha \langle Au, w \rangle + \beta \langle Av, w \rangle \\ &= \langle \alpha Au + \beta Av, w \rangle \qquad \forall w \in H \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ A linéaire.

A continue ?

montrons $\exists$ c cte / $\|Au\| \leq c \|u\|$

a continue donc $\forall (u, v) \in H^2$ $\quad |a(u,v)| \leq C \|u\| \, \|v\|$

$$\underset{|(Au, v)|}{\overset{\|}{|a(u,v)|}}$$

appliquons ceci à $v = Au$, on a donc

$$(Au, Au) \leq C\|u\|\,\|Au\|$$

$$\Rightarrow \|Au\|^2 \leq C\|u\|\,\|Au\|$$

$$\Rightarrow \|Au\| \leq C\|u\| \qquad \forall u.$$

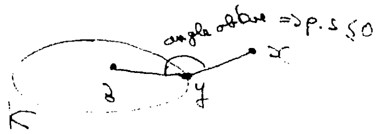
$$\Rightarrow \underline{A \in H'}$$

2) <u>Rappel</u> : Soient H Hilbert, $x \in H$, <u>K convexe, fermé, non vide de H</u>

Alors $\exists!\, y \in K \,/\, \|y-x\| \leq \|z-x\| \quad \forall z \in K$

on note $y = P_K x$.

<u>caractérisation</u> : $y = P_K(x) \iff \langle x-y, z-y\rangle \leq 0 \quad \forall z \in K$



(P) $\begin{cases} u \in K \\ a(u, v-u) \geq T(v-u), \quad \forall v \in K. \end{cases}$

procédons par équivalence :

$u = P_K(u - \rho(Au - z)) \quad (\in K)$

$\iff \langle u - \rho(Au-z) - u, v-u\rangle \leq 0 \quad \forall v \in K$

$\iff \langle -\rho(Au-z), v-u\rangle \leq 0$

$\iff \langle Au, v-u\rangle - \langle z, v-u\rangle \geq 0$

$\iff \langle Au, v-u\rangle \geq \langle z, v-u\rangle$

$\iff a(u, v-u) \geq T(v-u) \quad \forall v \in K$

$\iff u$ solution de (P)

NB : Au départ on prend $u \in H$

- si u sol. de (P) alors $u \in K$ et $u = P_K(\cdots)$
- si $u = P_K(\cdots)$ alors $u \in K$ et $a(u, v-u) \geq f(v-u)$ $\forall v \in K$.

3) $$S_\rho : H \longrightarrow H$$
$$u \longmapsto S_\rho(u) = P_K(u - \rho A u + \rho g)$$

Rappel $\boxed{\text{Soient } H \text{ Hilbert}, \ K \text{ convexe fermé non vide. Alors } \|P_K u - P_K v\| \leq \|u - v\| \quad \forall (u,v) \in H^2}$

en effet, d'après le rappel p 70, on a :

$$\begin{cases} \langle u - P_K u \,/\, w - P_K u \rangle \leq 0 & \forall w \in K \\ \langle v - P_K v \,,\, w - P_K v \rangle \leq 0 & \forall w \in K \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle u - P_K u \,/\, P_K v - P_K u \rangle \leq 0 \\ \langle v - P_K v \,/\, P_K u - P_K v \rangle \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \langle u - P_K u - v + P_K v \,/\, P_K v - P_K u \rangle \leq 0$$

$$\Rightarrow \|P_K v - P_K u\|^2 \leq \langle v - u \,/\, P_K v - P_K u \rangle$$

$$\Rightarrow \|P_K v - P_K u\|^2 \leq |\langle \text{———} \rangle| \leq \|v - u\| \, \|P_K v - P_K u\|$$

par C.S.

$$\Rightarrow \|P_K u - P_K v\| \leq \|u - v\| \quad \forall (u,v) \in H^2$$

$$\|S_\rho u - S_\rho v\|^2 = \|P_K(u - \rho A u + \rho g) - P_K(v - \rho A v + \rho g)\|^2$$

$$\leq \|u - \rho A u + \rho g - v + \rho A v - \rho g\|^2 \quad \text{d'après le rappel ci-dessus}$$

$$\leq \|(u - v) - \rho(Au - Av)\|^2$$

$$\leq \langle (u-v) - \rho(Au - Av) \,/\, (u-v) - \rho(Au - Av) \rangle$$

$$\leq \|u - v\|^2 + \rho^2 \|Au - Av\| - 2\rho \langle u - v \,/\, Au - Av \rangle$$

A continue $\Rightarrow \exists C_1 \mid \quad \|Au - Av\| \leq C_1 \|u-v\|$

$\langle u-v \mid Au - Av \rangle = a(u-v, u-v) \geq \alpha \|u-v\|^2$

on a donc $\|S_\rho u - S_\rho v\|^2 \leq (1 + \rho^2 C_1^2 - 2\rho\alpha) \|u-v\|^2$

on voudrait $\cancel{1} + \rho^2 C_1^2 - 2\rho\alpha < 1$

$\Leftrightarrow \rho C_1^2 - 2\alpha < 0 \qquad (\rho > 0)$

$\Leftrightarrow \quad 0 < \rho < \frac{2\alpha}{C_1^2}$

donc pour $\boxed{0 < \rho < \frac{2\alpha}{C_1^2}}$ on a $\|S_\rho u - S_\rho v\| < \|u-v\|^2$

c.à.d <u>S_ρ strictement contractante</u>.

Dans ce cas, (P) devient $\begin{cases} u \in K \\ S_\rho(u) = u \end{cases}$ (u point fixe de S_ρ)

avec S_ρ strictement contractante.

$\Rightarrow$ <u>(P) a une solution unique</u> (th du pt fixe)

4) <u>Rappel</u> || <u>Théorème de Lax-Milgram</u> : $\left.\begin{array}{l} T \in H' \\ a \text{ bilin, cont, coercive} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists! \, u \in H$ tq $a(u,v) = T(v) \quad \forall v \in H$

On prend $K = H$ alors (P) $\begin{cases} u \in H \\ a(u, v-u) \geq T(v-u) \quad \forall v \in H. \end{cases}$

on pose $w = v - u$

$\Rightarrow a(u, w) \geq T(w)$ si $u \in H \quad \forall w \in H$

et $a(u, -w) \geq T(-w)$

$\Rightarrow -a(u,w) \geq -T(w)$

$\Leftrightarrow a(u,w) \leq T(w)$

$\Rightarrow a(u,w) = T(w) \qquad \forall w \in H$

Si on a Lax-Milgram, on a une bij : $H \longrightarrow H$
$w \longmapsto w-u$

$(L.M) \Rightarrow a(u, w-u) = T(w-u)$
$\Rightarrow (P)$.

5) On suppose de plus, a symétrique
pour $v \in H$, $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - T(v)$

Montrons (P) $\Leftrightarrow$ φ.

$(P) \overset{?}{\Rightarrow} (\varphi)$: Soit $v \in K$

$$\begin{aligned} J(v) &= J(u+v-u) \\ &= \frac{1}{2}a(u+v-u, u+v-u) - T(u+v-u) \\ &= J(u) + a(u,v-u) + \frac{1}{2}a(v-u,v-u) - T(v-u) \\ &\geq J(u) + \frac{1}{2}\underbrace{a(v-u,v-u)}_{\geq 0} \\ &\geq J(u) \end{aligned}$$

$(\varphi) \overset{?}{\Rightarrow} (P)$. Soit $v \in K$, soit $t \in [0,1]$

K convexe $\Rightarrow tv + (1-t)u \in K$
$\Rightarrow u + t(v-u) \in K$ Si $(u,v) \in K^2$

$\Rightarrow J(u+t(v-u)) \geq J(u)$

or $J(u+t(v-u)) = \frac{1}{2}a(u+t(v-u), u+t(v-u)) - T(u+t(v-u))$
$= \frac{1}{2}a(u,u) - T(u) + t\,a(u,v-u) + \frac{t^2}{2}a(v-u, v-u) - T(t(v-u$
$= J(u) + t\,a(u,v-u) - t\,T(v-u) + \frac{t^2}{2}a(v-u, v-u)$

$\Rightarrow t[a(u,v-u) - T(v-u)] + \frac{t^2}{2}a(v-u, v-u) \geq 0$

$\Rightarrow a(u,v-u) - T(v-u) + \frac{t}{2}a(v-u,v-u) \geq 0$
on fait tendre $t \to 0$

$\Rightarrow a(u,v-u) \geq T(v-u)$

$\boxed{\text{Exercice 2}}$

1) on peut voir $H_0^1 \hat{=} \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ et $u = 0$ sur $\partial\Omega$

<u>Inégalité de Poincaré</u> : $\boxed{\|u\|_2 \leq C \|\nabla u\|_2 \quad \text{dans } H_0^1(\Omega)}$

On sait que $u \longmapsto \nabla u$ est linéaire

et

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto |x|^2$ est strictement convexe.

Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$

$\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$f \in L^2_{\mathbb{R}}(\Omega)$

$$J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v \longmapsto J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx - \int_\Omega f(x) v(x)\, dx$$

Montrons que J strictement convexe

Soient $(u,v) \in (H_0^1(\Omega))^2$, $t \in]0,1[$

$$J(tu + (1-t)v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |t\nabla u + (1-t)\nabla v|^2 - \int_\Omega f(tu + (1-t)v)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int \underbrace{|tD_iu + (1-t)D_iv|^2}_{\downarrow \text{Passage ???}} - \int f(tu + (1-t)v)$$
$$< \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int \left(tD_iu^2 + (1-t)D_iv^2\right) - t\int fu - (1-t)\int fv$$

Sauf si $D_iu = D_iv$ p.p. $\forall i$

mais dans la définition de strict. convexe :

$\forall (x,y)$, $\underline{x \neq y}$, $\forall t \in]0,1[$ $f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y)$

et $D_i u = D_i v$ pp $\forall i \Rightarrow \nabla u = \nabla v$ pp

$\Rightarrow u = v$ pp grâce à Poincaré.

Donc $J(tu + (1-t)v) < tJ(u) + (1-t)J(v)$ sauf si $u = v$

$\Rightarrow$ J strictement convexe.

- m.q. J continue.

Soit $u_n \to u$ ds H^1 $\Leftrightarrow \begin{cases} u_n \to u & \text{ds } L^2 \\ D_i u_n \to D_i u & \text{ds } L^2 \ \forall i \end{cases}$

$$J(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|_2^2 - \int f v$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\|D_i v\|_2^2 - \int f v$$

Si $v_n \to v$ ds H^1 alors $D_i v_n \to D_i v$ ds L^2 ↓ ?

$\Rightarrow \|D_i v_n\|_2 \to \|D_i v\|_2$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\|\nabla v_n\| \to \frac{1}{2}\|\nabla v\|_2$

$$\left|\int f(v_n - v)\right| \leq \int |f|\,|v_n - v|$$
$$\leq \|f\|_2 \|v_n - v\|_2 \quad \text{par C.S.}$$

$f \in L^2 \Rightarrow \|f\|_2 < +\infty$ et $\|v_n - v\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow \int f(v_n - v) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow J(v_n) \to J(v)$

donc J continue sur $H_0^1(\Omega)$

- m.q. $J(v) \to +\infty$ qd $\|v\|_{H_0^1} \to \infty$

$$\|v\|_{H_0^1}^2 = \|v\|_2^2 + \sum_{i=1}^{n}\|D_i v\|_2^2$$

$\|\nabla v\|_2^2 \geqslant \Pi \|v\|_{H_0^1}^2$?

$$\|v\|_{H_0^1}^2 = \|v\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2$$

Poincaré donne : $\|v\|_2 \leq C \|\nabla v\|_2$

$\Rightarrow \|v\|_{H_0^1}^2 \leq (1+C^2) \|\nabla v\|_2^2$

$$\Rightarrow \|\nabla v\|_2^2 \geqslant \underbrace{\frac{1}{1+C^2}}_{\Pi} \|v\|_{H_0^1}^2$$

$$J(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|_2^2 - \int f v$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\Pi \|v\|_{H_0^1}^2 - \int f v$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\Pi \|v\|_{H_0^1}^2 - \|f\|_2 \underbrace{\|v\|_2}_{\leq \|v\|_{H_0^1}}$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\Pi \|v\|_{H_0^1}^2 - \|f\|_2 \|v\|_{H_0^1}$$

$$\geqslant \left(\frac{1}{2}\Pi \|v\|_{H_0^1} - \|f\|_2\right) \|v\|_{H_0^1}$$

$$\downarrow +\infty \qquad \searrow +\infty$$

donc $J(v) \to +\infty$ qd $\|v\|_{H_0^1} \to +\infty$

• K convexe ?

$K = \{v \in H_0^1(\Omega),\ v \leq \psi \text{ p.p.}\}$

Soient $(u,v) \in K^2$, $t \in]0,1[$

alors $tu + (1-t)v \leq t\psi + (1-t)\psi = \psi$

$\Rightarrow tu + (1-t)v \in K$

$\Rightarrow$ K convexe

• K fermé dans $H_0^1(\Omega)$?

NB : Th réciproque conv. Dom : $v_n \to v$ ds L^2 $\Rightarrow$ $\exists$ ss suite $(v_{n_k})_k$ tq $v_{n_k} \to v$ pp

Soit $(v_n)_n \subset K$ / $v_n \to v$ ds $H_0^1(\Omega)$
a-t-on $v \in K$?

$v_n \to v$ ds H_0^1 $\Rightarrow$ $v_n \to v$ ds L^2
$\Rightarrow$ $v_{n_k} \to v$ pp.

$(v_{n_k})_k \subset K$ $\Rightarrow$ $v_{n_k}(x) \leq \psi(x)$ pp x

$$\Rightarrow \lim_{k \to +\infty} v_{n_k}(x) \leq \psi(x) \quad pp\, x$$

$$\Rightarrow V(x) \leq \psi(x) \quad pp\, x$$

$$\Rightarrow V \in K.$$

donc K fermé dans $H_0^1(\Omega)$

Conclusion

On a l'existence d'une solution de $(P) \begin{cases} u \in K \\ J(u) \leq J(v) & \forall v \in K \end{cases}$

J strictement convexe
$\Rightarrow$ solution unique

D'après l'exercice 1, l'"Inéquation variationnelle" du pb (P) est :

$$(I) : \begin{cases} u \in K \\ a(u, v-u) \geq T(v-u), & \forall v \in K \end{cases}$$

avec
$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega D_i u(x)\, D_i v(x)\, dx$$

a est sym (évident), bilinéaire car $\int$ et ∇ linéaire.

$$a(v,v) = \int_\Omega |\nabla v|^2 = \|\nabla v\|_2^2 \geq \eta \|v\|_{H_0^1}^2$$

car Poincaré : $\|v\|_2 \leq C \|\nabla v\|_2$

$\Rightarrow \|v\|_{H_0^1}^2 \leq (C^2+1) \|\nabla v\|_2^2$

$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{C^2+1}}_{\eta} \|v\|_{H_0^1}^2 \leq \|\nabla v\|_2^2 = a(v,v)$

$\Rightarrow$ a coercive sur H_0^1

a continue ? : $|a(u,v)| = \left|\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\right| \leq \int_\Omega \underbrace{|\nabla u \cdot \nabla v|}_{\leq \|\nabla u\| \|\nabla v\|}$ norme euclidienne.

$$\leq \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2$$

$$\leq \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}$$

$\Rightarrow$ a continue.

$T(v) = \int f v$ linéaire (évident)

$|T(v)| \leq \|f\|_2 \|v\|_2 \leq \|f\|_2 \|v\|_{H_0^1}$

$\Rightarrow T$ continue

$\Rightarrow$ $T \in (H_0^1(\Omega))'$

2) Rappels sur les distributions :

Idée : Pour connaître $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, il suffit de connaître :
$\int f\varphi$ avec $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ("fct test")

- $f \in L^1_{loc}(\Omega) \Rightarrow T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$
  avec $\langle T_f, \varphi\rangle = \int f\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

- $T_{f_1} = T_{f_2} \Rightarrow f_1 = f_2$ pp $\rightarrow$ on confond T_f et f

- $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$

On notera $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ la dérivée au sens des fct.
et $T_{i f}$ la dérivée au sens des distributions.

on a $\langle T_i f, \varphi \rangle = -\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle$

- $T \in L^2$ si $\exists f \in L^2$ tq $T = T_f$ (on confond alors f et T)

!! <u>Caractérisation</u> : $\boxed{T \in L^2 \Leftrightarrow \exists C \,/\, |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_2 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty}$

- $$\langle \Delta u, \varphi \rangle = -\sum_{i=1}^N \langle D_i u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle$$
$$= -\sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$$
(avec $u \in L^1_{loc}$ je suppose !?)

- $f \in L^2 \Rightarrow f \in L^1_{Loc}$!!!

- $H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)}^{H^1}$

- $H^1(\Omega) = \{ u \in L^2(\Omega) \,;\, D_i u \in L^2(\Omega) \quad \forall i \}$

- Schwartz : Une distribution positive est forcément une mesure.

- $\Delta u + f \geq 0 \Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \underline{\varphi \geq 0}$ alors $\langle \Delta u + f, \varphi \rangle \geq 0$.

$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)}^{H^1} \Rightarrow \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$
soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ ($\Rightarrow \varphi \in H_0^1(\Omega)$) / $\varphi \geq 0$

on pose $v = u - \varphi \in K$ car $\left. \begin{array}{l} u \leq \psi \\ -\varphi \leq 0 \end{array} \right\}$ $u - \varphi \leq \psi$ et $\in H_0^1(\Omega)$

donc (P) $\Rightarrow a(u, v-u) \geq \Gamma(v-u)$

$\Rightarrow a(u, -\varphi) \geq \Gamma(-\varphi)$

$\Rightarrow -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \geq -\int_\Omega f \varphi$

$\Rightarrow -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega f \varphi \geq 0$

$\Rightarrow \langle \Delta u + f, \varphi \rangle \geq 0$

$\Rightarrow \underline{\Delta u + f \geq 0}$

3) * $H^2(\Omega) = \{ u \in L^2 \,/\, D_i^1 u \in L^2,\ D_i^2 u \in L^2 \}$

par hypothèse on prend $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

$u \in K \Rightarrow u \leq \psi$ pp.

On a supposé $\psi \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow \psi \in K$.

$\Rightarrow \int_\Omega \nabla u \, \nabla(\psi - u) \geq \int_\Omega f(\psi - u)$

on admet que :

$u \in H^2$ et $\psi - u \in H_0^1$ $\Rightarrow$ on peut intégrer par parties :

$\Rightarrow -\int_\Omega \Delta u \, (\psi - u) - \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \underline{n})(\psi - u) \geq \int f(\psi - u)$

pas un sens classique

$\in H_0^1 \Rightarrow 0$ sur bord.

$\Rightarrow \int (\Delta u + f)(\psi - u) \leq 0$

or assumons u $\Rightarrow$ $\Delta u + f \geq 0$
et $\psi - u \geq 0$ $\Big\}$ $\Rightarrow (\Delta u + f)(\psi - u) \geq 0$?

$\Rightarrow (\Delta u + f)(\psi - u) = 0$ p.p.

$\Delta u + f \geq 0$ pp
on a $\Delta u + f \in L^2(\Omega)$
et $\Delta u + f \geq 0$ au sens des distributions
$\Rightarrow \int (\Delta u + f)\varphi \geq 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \ \varphi \geq 0$.

On sait que si $g \in L^2$ alors $g_n = g * \rho_n \in C^\infty$, et $g_n \to g$ ds L^2
$\Rightarrow \exists$ ss suite $g_{n_k} \to g$ pp.
(th. conv. dom.

on pose $g = \Delta u + f \in L^2$, $g \geq 0$
on a $\rho_n \geq 0 \Rightarrow \int g(y)\rho_n(x-y)\,dy \geq 0$

$\Rightarrow g_n \geq 0 \Rightarrow g_{n_k} \geq 0$

or $g_{n_k} \to g$ pp $\Rightarrow g \geq 0$ pp
$\Rightarrow \Delta u + f \geq 0$ pp

d'où (PF 1)

On fait la réciproque
$(\Delta u + f)(v - u) = (\Delta u + f)(v - \psi + \psi - u)$

$$= \underbrace{\underset{\geq 0}{(\Delta u + f)}\underset{\leq 0}{(v - \psi)}}_{\leq 0 \text{ pp}} + \underbrace{(\Delta u + f)(\psi - u)}_{= 0 \text{ pp}}$$

≤ 0 p.p.

$\Rightarrow \int (\Delta u + f)(v-u) \geqslant 0$

$\Rightarrow -\int \nabla u . \nabla (v-u) + \int f (v-u) \geqslant 0$ ($\int$ par parties)

$\Rightarrow \int f (v-u) \geqslant \int \nabla u \nabla (v-u)$

Donc u sol. de (PF1) $\Rightarrow u$ sol de (φ)
$\Rightarrow u$ sol de (PF 1) $\Leftrightarrow u$ sol de (φ)

$\exists !$ sol de $(\varphi) \Rightarrow \exists !$ sol de (PF1)

$*$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{(PF1)} \overset{?}{\Rightarrow} \text{(PF2)} \\ \cdot\ u \in \mathcal{C}^2 \\ \quad \psi \in \mathcal{C} \end{array} \right.$ $\Big\}$ et $u \leqslant \psi$ p.p. $\Rightarrow$ $\underline{u \leqslant \psi \text{ partout}}$

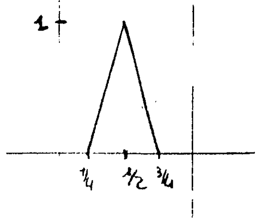
- $u \in \mathcal{C}^2 \cap H^2 \cap H_0^1$
- $(\Delta u + f) \geqslant 0$ sur k partout car Δu et f continues.

f, g continues $f \leqslant g$ p.p $\Leftrightarrow f \leqslant g$ partout.

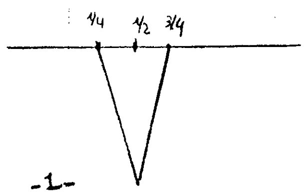
- $u < \psi$, on a $(\Delta u + f)(\psi - u) = 0 \Rightarrow \Delta u + f = 0$
- $u = \psi \Rightarrow \Delta u + f \geqslant 0$

- (PF2) $\Rightarrow$ (PF1) évident

4) Remplacer $\psi_1 = 1_{\{\frac{1}{2}\}}$ par :



$\psi_2 = -1_{\{\frac{1}{2}\}}$ par :



$N = 1$

$\Omega =]0, 1[$

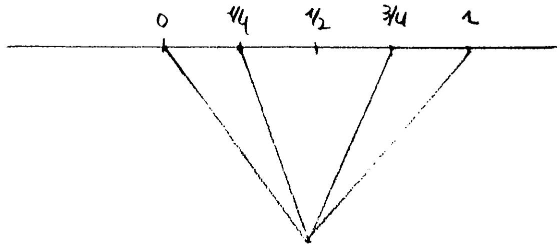
$f = 0$

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 = \frac{1}{2}\int_\Omega |v'|^2$$

• pour ψ_1 : on a $0 \in K = \{v \,/\, v \leq \psi_1\}$

$\Rightarrow 0$ est sol de (φ) $\begin{cases} u \in K \\ J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in K \end{cases}$

• pour ψ_2 :



En dimension 1, $u \in H^1(]0,1[)$ alors u est continue

au sens des distributions

$Du = u'$ pp

$u(x) = u(a) + \int_a^x u'(t)\,dt$

$$\left.\begin{array}{l} u \text{ continue} \\ \exists v \in L^2 \,/\, u(x) = u(a) + \int_a^x v(t)\,dt \end{array}\right\} \text{ alors } u \in H^1$$

On va utiliser la formulation variationnelle :

$$(P) \begin{cases} u \in K = \{v \,/\, v \leq \psi_2\} \\ a(u, v-u) \geq T(v-u) \quad \forall v \in K \end{cases}$$

avec $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \, \nabla v$

$T(v) = \int_\Omega f v = 0$

(P) $\begin{cases} u \in K = \{v / v \leq \psi\} \\ \int_\Omega u'(v'-u') \geq 0 \quad \forall v \in K \end{cases}$

on prend $u : \begin{cases} -2x & \text{sur } [0; \frac{1}{2}] \\ 2x-2 & \text{sur } [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$ (voir courbes)

$\Rightarrow u' = \begin{cases} -2 & \text{sur } [0, \frac{1}{2}] \\ 2 & \text{sur } [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$

$$\int_0^1 u'(v'-u') = -2\int_0^{\frac{1}{2}} (v'-u') + 2\int_{\frac{1}{2}}^1 (v'-u')$$

$$= -4 \left(\underbrace{v(\tfrac{1}{2})}_{\leq -1} - \underbrace{u(\tfrac{1}{2})}_{=-1} \right)$$ car $v \in H_0^1 \Rightarrow v_{/\partial\Omega} = 0$

on a $\langle D^2 u, \varphi \rangle = -\int u'\varphi' = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi' - 2\int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi'$

$= 4\varphi(\frac{1}{2})$

$\Rightarrow D^2 u = 4\,\delta_{\frac{1}{2}}$ (ici $u' \in C^1$ par morceaux $\Rightarrow$ 4 x saut)

$\Rightarrow u \notin H^2(\Omega)$.

---

exercice 3

Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $g \in H^1(\Omega)$, $g \geq 0$ p.p.

Th de Trace

$\exists\, \gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ linéaire, continue tq $\gamma u = u$
$u \longmapsto \gamma u$ sur $\partial\Omega$
si $u \in H^1(\Omega) \cap C^0$

$K = \{ v \in H^1(\Omega),\ v \geq 0$ pp. , $v = g$ sur $\partial\Omega$ (au sens $\gamma u = \gamma g$ ds $L^2(\partial\Omega)$) $\}$

1) $\underline{K \text{ convexe}}$?

$(u, v) \in K^2 \qquad t \in [0,1]$

$u, v \geq 0_{pp} \Rightarrow tu + (1-t)v \geq 0_{pp} \qquad \forall t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} \gamma(tu + (1-t)v) &= t\gamma u + (1-t)\gamma v \\ &= t\gamma g + (1-t)\gamma g \\ &= \gamma g \end{aligned}$$

car γ linéaire.

$\Rightarrow tu + (1-t)v \in K$

$\Rightarrow \underline{K \text{ convexe}}$.

$\underline{K \neq \emptyset}$ car $g \in K$

$\underline{K \text{ fermé}}$?

Soit $(v_n)_n \subset K$; $v_n \to v$ ds H^1

- $v_n \to v$ ds $H_1 \Rightarrow v_n \to v$ dans L^2
  $\Rightarrow$ par réc. part. c.D. $v_{n_k} \to v$ pp
  or $v_{n_k} \geq 0$ p.p. $\Rightarrow v \geq 0$ p.p.

- $\gamma v_n \to \gamma v$ car γ continue

$\underset{\gamma g}{\parallel} \quad \Rightarrow \gamma v = \gamma g$
$\Rightarrow v \in K$

$\Rightarrow K \underline{\text{fermé}}$

<u>ou bien</u> : $v_n \to v$ ds L^2 $\overset{\text{cauchy schwarz}}{\Longrightarrow}$ $v_n \to v$ ds L^2 faible

$\Rightarrow \int v_n \varphi \to \int v \varphi \quad \forall \varphi \in L^2$

on prend $\varphi = v^-$ (partie négative de v)

⚠ $v^+ = \max(v, 0)$

$v^- = (-v)^+ = -\min(v, 0)$ $\Big\}$ $v = v^+ - v^-$, $|v| = v^+ + v^-$

$$\Rightarrow \underbrace{-\int v^{-2}}_{\leq 0} = \int v v^- = \lim \underbrace{\int v_n v^-}_{\geq 0} \geq 0$$

$\Rightarrow \int v^{-2} = 0$

$\Rightarrow v^- = 0$ pp

$\Rightarrow v \geq 0$ pp

2) (P) $\begin{cases} u \in K \\ \int_\Omega \nabla u(x) \, \nabla(v-u)(x) \, dx \geq -\int_\Omega (v-u)(x) \, dx & \forall v \in K \end{cases}$

⚠ $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u . \nabla v$ <u>non</u>. coercive sur H^1

en effet si on prend $u \equiv 1$ $a(u,u) = 0 \not\geq \alpha \|u\|^2_{H^1}$

$\Rightarrow$ il faut W sur H^1_0

$\Rightarrow$ on pose $u = w + g$ avec $w \in H^1_0$

(on a bien $u \in K$)

$\Rightarrow$ on cherche w.

on pose $\tilde{K} = \{ w \in H^1_0(\Omega) \, ; \ w \geq -g \ pp \}$

$\begin{array}{c} \text{"} \\ w \in H^1 \\ \text{et} \\ \gamma w = 0 \end{array}$

on est ramené au pb :

$$(\tilde{P}) \begin{cases} w \in \tilde{K} \\ \sim\sim \quad \forall \varphi \in \tilde{K} \end{cases}$$

on doit avoir u sol. de (P) ssi w sol de $(\tilde{P})$

$$(\tilde{P}) \begin{cases} w \in \tilde{K} \\ \int \nabla w . \nabla(\varphi - w) \geq - \int (\varphi - w) - \int \nabla g . \nabla(\varphi - w) \end{cases}$$

en effet $\int \nabla u . \nabla(v-u) \geq - \int (v-u)$ (on a changé v en φ)

$$\Leftrightarrow \int \nabla(w+g) \nabla(\varphi - w) \geq - \int (\varphi - w)$$

$$\Leftrightarrow \int \nabla w . \nabla(\varphi - w) \geq - \int \nabla g . \nabla(\varphi - w) - \int (\varphi - w)$$

on pose $a(w, \varphi) = \int \nabla w . \nabla \varphi$

a bilin, sym (évident)

Poincaré 2 $\Rightarrow$ Si $(\varphi, w) \in (H_0^1)^2$, $|a(w,w)| \geq \alpha \|w\|_{H_0^1}^2$

$$|a(w,\varphi)| \leq \alpha \|w\|_{H_0^1} \|\varphi\|$$

(a cont. coercive)

on pose $T(\varphi) = - \int \nabla g . \nabla \varphi - \int \varphi$

T lin. (évident)

$$|T(\varphi)| \leq \left| \int \nabla g . \nabla \varphi \right| + \left| \int \varphi \right|$$

$$\leq \|\nabla g\|_2 \|\nabla \varphi\|_2 + (\text{mes}(\Omega))^{1/2} \|\varphi\|_2$$

$$\leq \left((\text{mes}(\Omega))^{1/2} + \|\nabla g\|_2 \right) \|\varphi\|_{H^1}$$

car $\|\varphi\|_2$, $\|\nabla \varphi\|_2 \leq \|\varphi\|_{H^1}$

donc, d'après Th 1, $(\check{P})$ admet une solution unique

$\Rightarrow (P)$ " " " "

3) on suppose $\exists\, \alpha \in C^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$, $\alpha = 0$ sur $\partial\Omega$
$\alpha > 0$ sur Ω

$$\begin{cases} u \in K \cap H^2(\Omega) \\ \int_\Omega \nabla u(x)\, \nabla(v-u)(x)\, dx \geq -\int_\Omega (v-u)(x)\, dx \quad \forall v \in K \end{cases} \overset{?}{\Leftrightarrow} \begin{cases} u \in K \cap H^2(\Omega) \\ \Delta u \leq 1 \text{ p.p. sur } \{u \geq 0\} \\ \Delta u \geq 1 \text{ p.p. sur } \{u = 0\} \end{cases}$$

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$; $\varphi \geq 0$

on pose $v = u + \varphi \in K$
car $\gamma\varphi = 0$.

Donc $(P) \Rightarrow \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi \geq -\int_\Omega \varphi$

$\Rightarrow -\int_\Omega \Delta u \cdot \varphi \geq -\int_\Omega \varphi$ car $\varphi_{|\partial\Omega} = 0$

$\Leftrightarrow \int_\Omega (-\Delta u + 1)\varphi \geq 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$; $\varphi \geq 0$

$\Rightarrow -\Delta u + 1$ fonction positive p.p.

corrigé dans l'énoncé $\Rightarrow \Delta u \leq 1$ p.p. pour $\{u \geq 0\}$

$\Delta u \geq 1$ p.p. sur $\{u > 0\}$
Si on prend $\varphi \leq \varepsilon$; $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$ $v = u - \varphi$

Pb : $u > \varepsilon$ p.p

Donc $\exists$ des pts où $u(x) = 0 \Rightarrow (u-\varphi)(x)$.

Si u cont.

Alors $\{u>0\}$ est un ouvert $\mathcal{O}$
et il s'écrit comme union dénombrable de compact.

$$\Rightarrow \mathcal{O} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n \ , \ K_n \text{ cpt} \ , \ K_{n+1} \supset K_n$$

On prend $\varphi_n \in \mathcal{C}^\infty$ $\varphi_n > 0$ sur K_n
$\varphi_n = 0$ sur K_{n+1}^c

alors sur le cpt $\exists\, \delta_n > 0$; $u > \delta_n$
$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$; $\varepsilon \varphi_n \leq u$

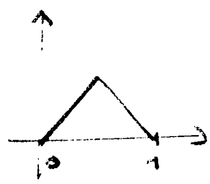
$\Rightarrow$ on prend $v = u - \varepsilon\varphi_n \geq 0$

$$\Rightarrow -\int (\underbrace{-\Delta u + 1}_{\geq 0})\, \varepsilon \underbrace{\varphi_n}_{\geq 0} \geq 0$$

$\Rightarrow \Delta u = 1$ sur K_n
$\Rightarrow \Delta u = 1$ p.p. sur $\{u > 0\}$

⚠ $u > 0$ sur un ouvert $\not\Rightarrow u > 0$

ex :



$u > 0$ sur $]0,1[$
mais $\nexists\, \varepsilon \,/\, u > \varepsilon$

Mais $u > 0$ sur 1 cpt $\Rightarrow u > \varepsilon$

Université de Savoie, Maîtrise de Mathématiques
Calcul Différentiel et Optimisation, TD, Février 1993

Exercice 1 Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, et $p \in \mathbb{R}$ tel que $1 < p < \overline{p}$, où $\overline{p} = \dfrac{N+2}{N-2}$. On va montrer ici qu'il existe u solution de :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = |u(x)|^{p-1}u(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \\ u(x) > 0, & x \in \Omega. \end{cases} \qquad (P)$$

Pour cela, on commence par quelques rappels.
Rappels

1. Soit H un espace de Hilbert réel (par exemple $H = H_0^1(\Omega) \ldots$) et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ une suite bornée, alors il existe une sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $u \in H$ telles que $u_{n_k} \to u$ faiblement dans H, c.à.d. $(u_{n_k}/\varphi)_H \to (u/\varphi)_H$, pour tout $\varphi \in H$. On peut en déduire (le montrer) que $\|u\|_H \leq \liminf\limits_{k\to+\infty} \|u_{n_k}\|_H$.

2. On rappelle que $H_0^1(\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^q(\Omega)$ pour tout q tel que $1 \leq q \leq 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ si $N > 2$, et tel que $1 \leq q < +\infty$ si $N = 2$ (injections de Sobolev). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ une suite bornée de $H_0^1(\Omega)$, alors il existe une sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $u \in L^q(\Omega)$ telles que $u_{n_k} \to u$ dans $L^q(\Omega)$, pour tout $q \in [1, \dfrac{2N}{N-2}[$. (On dit encore que l'injection canonique de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est compacte.)

Pour $u \in H_0^1(\Omega)$, on pose : $F(u) = \displaystyle\int_\Omega |\mathrm{grad}u(x)|^2 dx$, $G(u) = \displaystyle\int_\Omega |u(x)|^{p+1} dx$

1. Montrer que F et $G \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$; calculer $DF(u)$ et $DG(u)$.
2. On pose $A = \{u \in H_0^1(\Omega), G(u) = 1\}$. Montrer qu'il existe $\overline{u} \in A$ tel que $F(\overline{u}) \leq F(u)$, $\forall\ u \in A$. Montrer que $\overline{u} \neq 0$, et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $-\Delta\overline{u} = \lambda|\overline{u}|^{p-1}\overline{u}$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.
3. Montrer qu'il existe $v \in H_0^1(\Omega)$ tel que $-\Delta v = |v|^{p-1}v$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Remarque : On peut aussi montrer qu'on peut prendre $v > 0$ sur Ω, en remarquant que, pour tout $u \in A$, il existe $\overline{u} \in A$, $\overline{u} \geq 0$, tel que $F(\overline{u}) \leq F(u)$.

Exercice 2 Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $f(x,y) = -y$, $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Chercher les extrêma de f sous la contrainte $g = 0$.

Exercice 3 Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^N$, $a \neq 0$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^N$, on pose : $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i - a_i|^2$, $g(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i|^2$. Chercher les extrêma de f sous la contrainte $g = 1$.

Exercice 4 Soit $E = H^1(]0,1[)$. On rappelle que $E \subset C([0,1])$. Soit $\varphi \in E$; pour $x \in E$, on pose :

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 |Dx(t)|^2 dt - \int_0^1 \varphi(t)x(t)dt, \quad g(x) = \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \end{pmatrix}.$$

Noter que f envoie E dans $\mathbb{R}$ et g envoie E dans $\mathbb{R}^2$. Chercher le minimum de f sous la contrainte $g = 0$.

Exercice 5 Soient $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symétrique, $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ s.d.p., et $b \in \mathbb{R}^n$.Caractériser les extrêma relatifs de $J : v \mapsto J(v) = \dfrac{1}{2}(Av, v) - (b, v)$ sous la contrainte $\underset{g(v)}{\underset{\shortparallel}{(Bv,v)}} = 1$.

Exercice 6 Soient $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ une matrice s.d.p., $b \in \mathbb{R}^n$, $j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue, convexe, à valeurs positives ou nulles (mais non nécessairement dérivable, par exemple $j(v) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i |v_i|$, $\alpha_i \geq 0$, $\forall\ i \in \{1, \ldots, n\}$. Soit U une partie non vide, fermée convexe de $\mathbb{R}^n$. Pour $v \in \mathbb{R}^n$, on pose $J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v) + j(v)$.

1. Montrer qu'il existe un et un seul u tel que :

$$u \in U, J(u) \leq J(v) \ \forall \ v \in U \tag{1}$$

2. Soit $u \in U$, montrer que u est solution de (1) ssi $(Au - b, v - u) + j(v) - j(u) \geq 0, \ \ \forall v \in U$.

Exercice 7 Soient $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ une matrice s.d.p. et $b \in \mathbb{R}^n$, on considère la fonctionnelle quadratique : $J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v)$, $v \in \mathbb{R}^n$. Soient $C \in \mathbb{R}^{m,n}$ et $d \in \mathbb{R}^m$. On pose $U = \{v \in \mathbb{R}^n, Cv = d\}$, et on suppose que $U \neq \emptyset$.

1. Montrer qu'il existe un et un seul u tel que :

$$u \in U, J(u) \leq J(v) \ \forall \ v \in U \tag{1}$$

2. Montrer que :

$$(1) \Longleftrightarrow u \in U, Au - b \in (\mathrm{Ker} C)^{\perp} \Longleftrightarrow \exists \ \ \lambda \in \mathbb{R}^m, \begin{cases} Au + C^t\lambda = b \\ Cu = d. \end{cases}$$

3. On suppose que rang$(C) = m$ (on a donc $m \leq n$). Exprimer u en fonction de A, b, C, d. [*On pourra remarquer que Ker* $C^t = \{0\}$ *et que donc* $CA^{-1}C^t$ *est inversible*].

Exercice 8 Soient f et g : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définies par : $f(x,y) = y$, et $g(x,y) = y^3 - x^2$. On pose $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; g(x,y) = 0\}$.

1. Calculer le minimum de f sur K et le point $(\overline{x}, \overline{y})$ où ce minimum est atteint.
2. Existe-t-il λ tel que $Df(\overline{x}, \overline{y}) = \lambda Dg(\overline{x}, \overline{y})$?
3. Pourquoi ne peut-on pas appliquer le théorème des multiplicateurs de Lagrange ?
4. Que trouve-t-on lorsqu'on applique la méthode dite "de Lagrange" pour trouver $(\overline{x}, \overline{y})$?

$\boxed{\text{Exercice 1}}$

1) $u \in H_0^1(\Omega)$ $\quad F(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx$ $\quad G(u) = \int_\Omega |u(x)|^{p+1} \, dx$

(NB : $\nabla u(x) = \begin{bmatrix} D_1 u(x) \\ \vdots \\ D_N u(x) \end{bmatrix}$; $\|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_2^2 + \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_2^2$)

$(\|\cdot\|_{H_0^1} = \|\cdot\|_{H^1})$

$$F(u+h) - F(u) = 2\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla h(x) \, dx + \int_\Omega |\nabla h(x)|^2 \, dx$$

montrons : ① $h \mapsto 2\int_\Omega \nabla u \, \nabla h$ lin. cont

② $\int_\Omega |\nabla h|^2 = \|h\|_{H^1} \, \varepsilon(h)$

① • linéarité (évidente)

$\left(\|\nabla h\|_2^2 = \sum_{i=1}^N \|D_i h\|_2^2 \right)$

• $\left| 2\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h \right| \leq 2 \|\nabla h\|_2 \, \|\nabla u\|_2$

or $h \in H_0^1 \Rightarrow \|h\|_{H_0^1} \geq \|\nabla h\|_2$ $\quad$ } déjà vu en T.D. car : $\|h\|_{H^1}^2 = \|h\|_2^2 + \underbrace{\sum \|D_i h\|_2^2}_{\|\nabla h\|}$

$\Rightarrow \left| 2\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h \right| \leq 2 \underbrace{\|\nabla u\|_{H^1}}_{\text{cte}} \|h\|_{H^1}$

donc $h \mapsto 2\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h \in (H_0^1)'$

② $\int_\Omega \underbrace{|\nabla h|^2}_{\int_\Omega \nabla h \cdot \nabla h} \leq \|h\|_{H^1}^2 = \|h\|_{H^1} \, \varepsilon(h)$

donc $\forall u \in H_0^1$ F est différentiable en u et $DF(u) \in (H^1)'$

$$\boxed{DF(u)(h) = 2\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h}$$

pour montrer que F est C^1, il reste à montrer que :

$$\begin{aligned} DF : H^1 &\longrightarrow (H^1)' \\ u &\longmapsto DF(u) \end{aligned} \quad \text{est continue}$$

montrons que $\| DF(u+v) - DF(u) \|_{(H^1)'} \longrightarrow 0$ qd $\|v\|_{H^1} \to 0$

NB : $T \in (H^1)'$ $\quad \|T\|_{(H^1)'} = \sup\limits_{\substack{h \in H^1 \\ h \neq 0}} \dfrac{|T(h)|}{\|h\|_{H^1}}$

$$\left|\left(DF(u+v) - DF(u)\right)(h)\right| = 2\left|\int \nabla v \cdot \nabla h\right|$$

$$\leq 2 \|v\|_{H^1} \|h\|_{H^1}$$

$$\Rightarrow \| DF(u+v) - DF(u) \|_{(H^1)'} \leq 2 \|v\|_{H^1}$$

$\Big\downarrow$ qd $\|v\|_{H^1} \to 0$

0

conclusion $\boxed{F \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})}$

- $G(u) = \int_\Omega |u(x)|^{p+1} \, dx$.

<u>d'abord</u> :

Soit $\varphi : t \longmapsto |t|^{p+1}$ $\qquad p \geq 1$

<u>montrons</u> que $\varphi \in C^2$ pour $p > 1$.

$\underline{t \geq 0}$ $\varphi(t) = t^{p+1}$ $\quad \varphi$ dérivable sur $]0;+\infty[$ $\varphi'(t) = (p+1)\, t^p$

$\underline{t \leq 0}$ $\varphi(t) = (-t)^{p+1}$ $\quad \varphi$ — sur $]-\infty;0[$ $\varphi'(t) = -(p+1)\, (-t)^p$

<u>en $t=0$</u> : $\lim_{t \to 0} \dfrac{\varphi(t) - \overset{0}{\varphi(0)}}{t} = \lim_{t \to 0} \dfrac{|t|^{p+1}}{t} = 0$ $\qquad$ car $p > 1$

$\Rightarrow \varphi'(0) = 0$

$$\boxed{\varphi'(t) = (p+1)\, |t|^p \, \mathrm{sgn}(t)} \qquad \varphi' \text{ \underline{continue}}$$

$\underline{t \geq 0}$ $\quad \varphi'$ <u>dérivable</u> $\quad \varphi''(t) = (p+1)\, p \, t^{p-1}$

$\underline{t \leq 0}$ $\quad \varphi''(t) = p(p+1)\, (-t)^{p-1}$

<u>en $t=0$</u> $\quad \lim \dfrac{\varphi'(t)}{t} = 0 \qquad (p > 1)$

$\underline{\varphi \in C^2}$

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi'(t) &= (p+1)\, |t|^p \, \mathrm{sgn}(t) \\ \varphi''(t) &= p\,(p+1)\, |t|^{p-1} \end{aligned}} = (p+1)\, |t|^{p-1}\, t$$

$$G(u+h) = \int_\Omega \varphi\big(u(x) + h(x)\big)\, dx$$

écrivons φ sous la forme d'un développement de Taylor et intégrons :

$$G(u+h) = G(u) + \underbrace{\int_\Omega h(x)\, \varphi'(u(x))\, dx}_{①} + \underbrace{\int_\Omega \frac{h^2(x)}{2}\, \varphi''(u(x) + \theta_{x}\, h(x))\, dx}_{②}$$

avec $\theta_x \in]0,1[$

car $\varphi(u(x) + h(x)) = \varphi(u(x)) + h(x)\varphi'(u(x)) + \frac{h^2(x)}{2}\varphi''(u(x) + \theta_x h(x))$

avec $\theta \in]0,1[$

montrons que $\begin{cases} ① \text{ lin. cont } H_0^1 \to \mathbb{R} \\ ② = \|h\|_{H^1}\, \varepsilon(h) \end{cases}$

NB : G fion définie car $\boxed{\underline{H_0^1 \hookrightarrow L^{p+1}}}$ $\left(p+1 < \frac{N+2}{N-2} + 1 = \frac{2N}{N-2}\right)$

c.à.d $\begin{cases} H_0^1 \subset L^{p+1} \\ \exists C \ \|u\|_{p+1} \leq C\, \|u\|_{H^1} \end{cases}$

- la linéarité de ① est évidente
- continuité de ① ? :

d'après Holder on a :

$$\left|\int_\Omega h\,\varphi'(u)\right| \leq \left[\int_\Omega h^{p+1}\right]^{1/p+1} \left[\int_\Omega (\varphi'(u))^{(p+1)'}\right]^{1/(p+1)'}$$

avec $(p+1)' = \frac{p+1}{p}$

$$\leq \|h\|_{p+1} \left[(p+1)^{\frac{p+1}{p}} \int_\Omega |u|^{p+1}\right]^{\frac{p}{p+1}}$$

car $|\varphi'(u)| = (p+1) \times |u|^p$

$$\leq (p+1)\, \|h\|_{p+1}\, \|u\|_{p+1}^p$$

$$\leq \underbrace{(p+1)\, \underbrace{C^{p+1}}_{C^p \cdot C}}_{k = \text{constante}} \|u\|_{H_0^1}^p\, \|h\|_{H_0^1}$$

donc on a montré la continuité.

montrons que $\overbrace{\int_\Omega \frac{h^2(x)}{2} \varphi''\left(u(x) + \theta_{h,x} h(x)\right) dx}^{R(h)} = \|h\|_{H^1} \, \varepsilon(h)$.

NB : $\boxed{\begin{aligned} |a+b|^{p-1} &\leq \left(|a| + |b|\right)^{p-1} \\ &\leq 2^{p-1}|a|^{p-1} + 2^{p-1}|b|^{p-1} \end{aligned}}$

$$|R(h)| \leq \int_\Omega \frac{h^2}{2} p(p+1) \, 2^{p-1}\left(|u|^{p-1} + |h|^{p-1}\right)$$

$$|R(h)| \leq 2^{p-2} p(p+1) \Big[\underbrace{\int_\Omega |h|^{p+1}}_{①} + \underbrace{\int_\Omega |h|^2 |u|^{p-1}}_{②} \Big]$$

$$① \leq \|h\|_{p+1}^{p+1} \leq C^{p+1} \|h\|_{H^1} \|h\|_{H^1}^{p} = \|h\|_{H^1} \, \varepsilon(h)$$

Pour majorer ② on utilise Hölder avec $\frac{p+1}{2}$ et son conjugué $q = \left(\frac{p+1}{2}\right)'$

$$q = \frac{\frac{p+1}{2}}{\frac{p+1}{2} - 1} = \frac{p+1}{p-1}$$

$$② \leq \|h\|_{p+1}^{2} \, \|u\|_{p+1}^{p-1} \leq C^{p+1} \|h\|_{H^1}^{2} \, \|u\|_{H^1}^{p-1}$$

$$\leq \|h\|_{H^1} \, \varepsilon(h).$$

Montrons que $DG : H^1 \longrightarrow (H^1)'$, $u \longmapsto DG(u)$ est continue

on a :

$$\boxed{DG(u)(h) = \int h \, \varphi'(u).}$$

$$(DG(u+v) - DG(u))(h) = \int_\Omega h\,\underbrace{(\varphi'(u+v) - \varphi'(u))}_{\text{taylor}}$$

$$= \int_\Omega h(x)\left(v(x)\,\varphi''(u(x) + \theta_{v,x}\,v(x))\right)dx$$

$\theta_{v,x} \in]0,1[$

on majore c̄ précédemment.

$$|(DG(u+v) - DG(u))(h)| \leq \left|\int h v\, p(p+1)\, |u+\theta v|^{p-1}\right|$$

$$\leq p(p+1)\,2^{p-1}\left[\underbrace{\int |h v u^{p-1}|}_{1} + \underbrace{\int |h v^p|}_{2}\right] \quad (\text{car } \theta \in]0,1[)$$

utilisons Hölder :

$$2 \leq \|h\|_{p+1}\, \|v^p\|_{(p+1)'} = \|h\|_{p+1}\, \|v\|_{p+1}^p$$

$$(p+1)' = \frac{p+1}{p}$$

$$1 \leq \left[\int |hv|^{\frac{p+1}{2}}\right]^{2/p+1} \left[\int |u|^{p+1}\right]^{\frac{p-1}{p+1}} \quad \text{par Hölder} \quad \left(\frac{p+1}{p-1}\right)' = \frac{\frac{p+1}{p-1}}{\frac{p+1}{p-1} - 1} = \frac{p+1}{2}$$

pb !

$$\leq \left[\left(\int h^{p+1}\right)^{1/2} \left(\int v^{p+1}\right)^{1/2}\right]^{\frac{2}{p+1}} \left(\int |u|^{p+1}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}$$

$$\leq \|h\|_{p+1}\, \|v\|_{p+1}\, \|u\|_{p+1}^{p-1}$$

$$\|DG(u+v) - DG(u)\|_{H^{-1}} \leq p(p+1)\,2^{p-1}\left[\|v\|_{p+1}\|u\|_{p+1}^{p-1} + \|v\|_{p+1}^p\right]$$

$\downarrow$ qd $\|v\|_{H_0^1} \to 0$

donc $\boxed{G \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})}$

2) $A = \{u \in H_0^1(\Omega),\ \sigma(u) = 1\}$

rappel : Th : E Banach réflexif

(théorème de la page 90 du cours)

$g : E \to \mathbb{R}$ continue

à montrer

$f : E \to \mathbb{R}$ continue, convexe, $f(u) \to +\infty$ $\|u\| \to \infty$

$K = \{u \in E ; g(u) = 1\}$

g séquentiellement continue pour la topo. faible

à montrer

alors $\exists \bar{u} \in \operatorname{Argmin}_K f$

le rest a déjà été vue.

- convexité : composée de linéaire et de convexe + monotonie de ∫ ⇒ convexité de f

(déjà vu en TD) (à refaire) (voir p75)

$F(u) = \int \varphi(g(u))\,dx$ — monotone, convexe, linéaire

- $\exists c \quad \|u\|_2^2 \leqslant c\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} \|D_i u\|_2^2\right)}_{\|\nabla u\|_2^2 = F(u)} \quad \forall u \in H_0^1$ [C'est l'inégalité de Poincaré dans H_0^1

donc $\|u\|_{H^1}^2 \leqslant (C+1)\|\nabla u\|_2^2 = (C+1)F(u) \xrightarrow{\text{qd } \|u\|_{H^1} \to \infty} +\infty$

- Montrons que σ est séqu. continue pour la topo. faible :

rappel : $\boxed{\text{g est séquentiellement continue pour la topo. faible E ssi : pour } u_n \to u \text{ ds E-faible alors } g(u_n) \to g(u)}$

montrons que si $u_n \to u$ H_0^1 faible alors $u_n \to u$ ds L^{p+1}

Rappel : $u_n \to u$ H_0^1 faible ⇒ $(u_n)_n$ bornée ds H_0^1 (Banach Steinhaus)

NB : $H_0^1 \hookrightarrow L^{p+1}$
(s'injecte continûment)

a.t.on : $\underbrace{u_n \to u \quad H_0^1 \text{ faible}}_{\substack{\text{signifie} \\ T(u_n) \to T(u) \\ \forall T \in (H_0^1)'}} \Rightarrow \underbrace{u_n \to u \quad L^{p+1} \text{ faible}}_{\substack{\text{signifie} \\ T(u_n) \to T(u) \\ \forall T \in (L^{p+1})'}}$

hyp.   à montrer.

Soit $T \in (L^{p+1})'$

$T(u_n) \to T(u)$?

notons $S = T_{|H_0^1}$

$\forall v \in H_0^1 \quad S(v) = T(v) \underset{\text{car } T \in (L^{p+1})'}{\leq} k \|v\|_{L^{p+1}} \underset{\text{car } H_0^1 \hookrightarrow L^{p+1}}{\leq} kC \|v\|_{H^1}$

$\Rightarrow S \in (H_0^1)'$

$\Rightarrow S(u_n) \to S(u)$

$\Rightarrow T(u_n) \to T(u)$ cqfd.

hyp : $u_n \to u \quad H_0^1$ faible.

① on a donc $u_n \to u \quad L^{p+1}$ faible (vrai si $1 \leq p+1 \leq \frac{2N}{N-2}$, $N > 2$)

② on veut montrer que $u_n \to u \quad \underline{L^{p+1}}$

raisonnement classique A savoir écrire

procédons par l'absurde.

Supposons $u_n \not\to u \quad L^{p+1}$

alors $\exists \varepsilon > 0$ / $\exists$ ss. suite $(u_{n_k})_k$ tq $\|u_{n_k} - u\|_{L^{p+1}} \geq \varepsilon$

$(u_{n_k})_k$ est bornée, $\exists$ donc (rappel ⓒ) une ss. suite $(u_{n_{k_p}})_p$

et v tq $u_{n_{k_p}} \to v \quad L^{p+1}$

on a donc $\left.\begin{array}{ll} u_{n_{k_\ell}} \longrightarrow v & L^{p+1} \text{ faible} \\ u_{n_{k_\ell}} \longrightarrow u & \text{-} \end{array}\right)$ par unicité de la limite, $u = v$

$\left.\begin{array}{ll} u_{n_{k_\ell}} \longrightarrow u & L^{p+1} \\ \|u_{n_{k_\ell}} - u\|_{p+1} \geq \varepsilon \end{array}\right)$ impossible.

<u>Conclusion</u> : $u_n \longrightarrow u \quad L^{p+1}, \quad G(u_n) = \|u_n\|_{p+1}^{p+1} \longrightarrow \|u\|_{p+1}^{p+1} = G(u)$

donc le th. p 99 du T.D. s'applique.

---

* Pour pouvoir appliquer le th. de Lagrange il reste à montrer que $\mathrm{Im}(Dg(\bar{u})) = \mathbb{R}$.

$$Dg(\bar{u})(h) = (p+1)\int h(x)\,|\bar{u}(x)|^{p-1}\,\bar{u}(x)\,dx$$

$$Dg(\bar{u})(\bar{u}) = (p+1)\,\|\bar{u}\|_{p+1}^{p+1} = p+1$$ (car $\bar{u} \in +$ $\Rightarrow G(\bar{u}) = 1$ $\Rightarrow \|\bar{u}\|_{p+1} = 1$)

$$G(u) = \|u\|_{p+1}^{p+1}$$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(DG(\bar{u})) = \mathbb{R}$ (car $Dg(\bar{u})(\alpha\bar{u}) = \alpha(p+1)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

En appliquant Lagrange on a :

$\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad DF(\bar{u}) = \lambda\, DG(\bar{u})$

c.à.d : $\int \nabla\bar{u}\cdot\nabla h = \bar{\lambda} \int |\bar{u}|^{p-1}\,\bar{u}\,h \qquad \forall h \in H_0^1$

avec $\bar{\lambda} = \dfrac{\lambda(p+1)}{2} \in \mathbb{R}$

④ $h = \bar{u}$ $\quad \underbrace{\int |\nabla \bar{u}|^2}_{>0} = \bar{\lambda} \underbrace{\int |\bar{u}|^{p+1}}_{=1}$

(≥ 0, ≥ 0 car $\bar{u}$ p ... positive)

on a donc $\bar{\lambda} > 0$ $\quad \|\bar{u}\|^2_{H^1} = (\lambda+1)\|\nabla \bar{u}\|^2_2$

$h \in \mathcal{D}(\Omega)$ $\quad \begin{cases} -\Delta \bar{u} = \bar{\lambda} |\bar{u}|^{p-1} \bar{u} & \mathcal{D}'(\Omega) \\ \bar{\lambda} > 0 \end{cases}$

$\theta > 0$ $\quad \bar{u} = \theta V$ $\quad -\theta \Delta V = \bar{\lambda} \theta^p |V|^{p-1}$

$\Rightarrow -\Delta V = \underbrace{\bar{\lambda} \theta^{p-1}}_{=1} |V|^{p-1} V$

$-\Delta V = |V|^{p-1} V$

Exercice 2

$f(x,y) = -y$

$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

extréma de f sous la contrainte $g = 0$

NB : $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^P$

$x \in \mathbb{R}^N$

$Dg(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^P)$

$\dim \underbrace{(\operatorname{Im}(Dg(x)))}_{\subset \mathbb{R}^P} = \operatorname{rang} \widetilde{Dg(x)}$

matrice représentant $Dg(x)$ ds les bases canoniques de $\mathbb{R}^N$ et $\mathbb{R}^P$

1) $\exists (\bar{x}, \bar{y})$: $\begin{cases} f(\bar{x}, \bar{y}) \leq f(x,y) & \forall (x,y) \in K \\ (\bar{x}, \bar{y}) \in K \end{cases}$

(car f continue et K compact)

2) $(x,y) \in K$ on a donc $(x,y) \neq (0,0)$ (car $g(x,y) = x^2+y^2-1$ et $g = 0$)

$Dg(x,y) = (2x, 2y)$

$Dg(x,y)(h,k) = 2xh + 2yk$ $\quad ((x,y) \neq (0,0))$

$\Rightarrow \underline{\mathrm{Im}(Dg(x,y)) = \mathbb{R}}$

ou : $\mathrm{rang}(Dg(x,y)) = 1$

Soit $(\bar{x}, \bar{y}) \in \underset{K}{\mathrm{argmin}} f$, le théorème de Lagrange s'applique.

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tq :

$$\begin{cases} \bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 1 \quad \text{(contrainte)} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \end{cases}$$

c.à.d $\begin{cases} \bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 1 \\ 0 + 2\lambda \bar{x} = 0 \\ -1 + 2\lambda \bar{y} = 0 \end{cases}$

$2\lambda \bar{x} = 0$ donne $\begin{cases} \lambda = 0 \\ \text{ou} \\ \bar{x} = 0 \end{cases}$

$\lambda = 0$ est impossible, on a donc $\underline{\bar{x} = 0 \text{ et } \bar{y} = \pm 1}$

donc $(\bar{x}, \bar{y}) = (0,1)$ ou $(0,-1)$

$(0,1) \longrightarrow f(0,1) = -1$

$(0,-1) \longrightarrow f(0,-1) = 1$

$(0,1)$ est un minimum de f sur K

Conclusion : [illegible]

Exercice 3

$a = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$

$f(x) = \sum_{i=1}^{N} |x_i - a_i|^2$ $f \in C^\infty$ (somme de polynôme)

$g(x) = \sum_{i=1}^{N} |x_i|^2$ $g \in C^\infty$

① la contrainte est $g = 1$

$\Rightarrow K$ est compact

f étant continue, on a : $\exists \bar{x} \in \underset{K}{\operatorname{argmin}} f$

② Lagrange s'applique ?

$Dg(\bar{x}) = (2x_1, \dots, 2x_N)$

$rg\, Dg(\bar{x}) = 1$

$\Rightarrow Im(Dg(x)) = \mathbb{R}$ (ou bien faire comme ex 1)

③ soit $\bar{x} \in \operatorname{argmin} f$.

on a :

$$\begin{cases} \sum |x_i|^2 = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}(\bar{x}) = 0 \quad i = 1, \dots, N \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 2(x_i - a_i) + 2\lambda x_i = 0$

N+1 eq

N+1 inconnus

$(x_i - a_i) + \lambda x_i = 0$

$(\lambda + 1) x_i = a_i$ $i = 1, \dots N$

$\exists i$ tq $a_i \neq 0$ (car $a \neq 0$)   donc $\lambda \neq -1$

$$x_i = \frac{a_i}{1+\lambda} \quad \forall i$$

$$\sum a_i^2 = (1+\lambda)^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{(1+\lambda) = \|a\|_2 \quad \text{ou} \quad -\|a\|_2}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{x = \frac{a}{\|a\|_2} \quad \text{ou} \quad -\frac{a}{\|a\|_2}}$$

$$f\left(\frac{a}{\|a\|}\right) = \sum \left(\frac{a_i}{\|a\|} - a_i\right)^2 = \frac{\sum (a_i - a_i\|a\|)^2}{\|a\|^2} = \frac{\sum a_i^2 (1-\|a\|)^2}{\|a\|^2}$$

$$= (1-\|a\|)^2$$

$$f\left(\frac{-a}{\|a\|}\right) = \sum \left(-\frac{a_i}{\|a\|} - a_i\right)^2 = \frac{\sum (a_i + a_i\|a\|)^2}{\|a\|^2} = \frac{\sum a_i^2 (1+\|a\|)^2}{\|a\|^2}$$

donc
$$\left| \begin{array}{l} f\left(\frac{-a}{\|a\|}\right) = (1+\|a\|)^2 \\ f\left(\frac{a}{\|a\|}\right) = (1-\|a\|)^2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname*{argmin}_K f = \left\{ \frac{a}{\|a\|} \right\}}$$

---

exercice 4

$E = H^1(]0,1[) \qquad (E \subset C([0,1]))$

$\varphi \in E$

$x \in E$

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 |Dx(t)|^2 \, dt - \int_0^1 \varphi(t)\, x(t)\, dt \qquad g(x) = \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \end{pmatrix}$$

$f : E \longrightarrow \mathbb{R} \qquad g : E \rightarrow \mathbb{R}^2$

contrainte : $g = 0$

①

- $f \in C^1$ (déjà vu → ex 1)

f strict. convexe dans H^1_0
convexe dans H^1 } déjà vu.

($f(x) \to +\infty$ qd $\|x\| \to +\infty$ dans $\underline{\underline{H^1_0}}$)

→ car $f(x) = \int x'^2 - \int \varphi x$

$$\geq \underbrace{\|x'\|_2^2}_{①} - \underbrace{\|u\|_2 \|x\|_2}_{①} \geq \underbrace{\alpha \|x\|_{H^1}^2}_{\substack{① \\ \text{poincaré}}} - \underbrace{\|u\|_2 \|x\|_{H^1}}_{①} \to +\infty$$

qd $\|x\|_{H^1} \to \infty$

donc il existe $\bar{x}$ minimisant f sous la contrainte $g = 0$

② Lagrange s'applique ?

$$g(x+h) = g(x) + \underbrace{\begin{pmatrix} h(0) \\ h(1) \end{pmatrix}}_{= Dg(x)(h)}$$

indépendant de x . ⇒ $Dg : x \mapsto Dg(x)$ contrainte $\forall x$

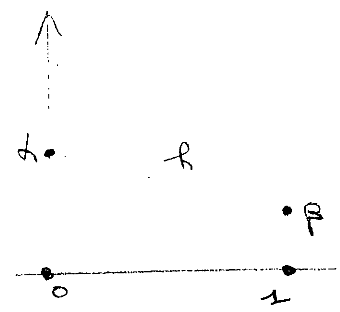
on montre (facilement) que $Dg(x) \in \mathcal{L}(H^1, \mathbb{R}^2)$ ⇒ Dg continue (car Dg cste) ⇒ $g \in C^1(H^1, \mathbb{R}$

$$Im(Dg(x)) = \left\{ \begin{pmatrix} h(0) \\ h(1) \end{pmatrix}, h \in H^1 \right\} \overset{?}{=} \mathbb{R}^2$$

Soit $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$\exists ?\ h \in H^1$ tq $h(0) = \alpha$, $h(1) = \beta$

oui ! il faut prendre h tq :



donc Lagrange s'applique.

③ $f : H^1 \to \mathbb{R}$

$Df(x) \in \mathcal{L}(H^1, \mathbb{R})$

$$Df(x)(h) = \underbrace{\int_0^1 Dx\, Dh}_{\text{déjà vu TD1}} - \int_0^1 \varphi h$$

$$Dg_1(x)(h) = h(0) \qquad Dg_2(x)(h) = h(1)$$

$x \in H^1$

$x(0) = x(1) = 0$

(1) $$\int_0^1 x'(t)\, h'(t)\, dt - \int_0^1 \varphi(t)\, h(t)\, dt + \lambda_1 h(0) + \lambda_2 h(1) = 0 \qquad \forall h \in H^1$$

$\rightarrow$

(2) (∗) $\left(\begin{array}{l} x \in H_0^1 \\ \displaystyle\int_0^1 x'(t)\, h'(t)\, dt = \int_0^1 \varphi(t)\, h(t)\, dt \qquad \forall h \in H_0^1 \end{array} \right.$

(on restreint le pb ; on n'a rien perdu en réalité car ∃! sol.)

vu en licence, (∗) admet une et une solution (Lax-Milgram)

$x \in H_0^1$ $\|$ $x' \in H^1$ $x'(0)$

$-x'' = \varphi$ $x'(1)$

$\lambda_1 = -x'(0)$

$\lambda_2 = -x'(1)$

(toute sol de (1) est sol de (2))

Exercice 5

$A \in \mathbb{R}^{N,N}$ sym. $\quad B \in \mathbb{R}^{N,N}$ s.d.p. $\quad b \in \mathbb{R}^N$

$J : v \longmapsto J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v)$

contrainte $(Bv, v) = 1$

$K = \{ v \in \mathbb{R}^N \; ; \; Bv \cdot v = 1 \}$.

① Montrons K compact
et J continue
ce qui $\Rightarrow \exists \bar{x} \in \underset{K}{\operatorname{argmin}} J$

- $\begin{aligned} \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto Bv \cdot v \end{aligned}$ continue, donc K fermé

- K borné ?
B sdp.

Rappel : $BV \cdot V > 0 \quad \forall V \in \mathbb{R}^N, V \neq 0$

$BV \cdot V \geq \inf_{V \in S_1} BV \cdot V = \lambda_1 > 0 \qquad \forall V \in S_1$

$BV \cdot V \geq \lambda_1 > 0 \quad \forall V \in S_1$

$BV \cdot V \geq \lambda_1 \|V\|_2^2 \quad \forall V \in \mathbb{R}^N$

$V \in K \Rightarrow \|V\|_2^2 \leq \frac{1}{\lambda_1}$

K est donc borné

$\Rightarrow$ K compact

conclusion : $\exists \bar{x} \in K \quad J(\bar{x}) \leq J(x) \quad \forall x \in K$

② montrons que $J \in C^1$
$g \in C^1$ $\quad (g(v) = Bv.v)$

puis que $\operatorname{Im}(Dg(x)) = \mathbb{R}$

on a : $DJ(v)(w) = Av.w - b.w$

$Dg(v)(w) = 2Bv.w$

($J \in C^1$, $g \in C^1$ à refaire...)

$Dg(u)(w) = 2Bu.w$ avec $u \in K$

$Dg(u)(u) = 2Bu.u$
$= 2g(u)$
$= 2$ car $g(u) = 1$

$\Rightarrow \underline{\operatorname{Im}(Dg(u)) = \mathbb{R}}$

<u>conclusion</u> : on peut appliquer Lagrange

③ $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq :

$$\begin{cases} Bu.u = 1 \\ DJ(u) + \lambda Dg(u) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Bu.u = 1 \\ Au - b + 2\lambda Bu = 0 \end{cases}$$

on doit résoudre ce système. ici $(u, \lambda) \in \mathbb{R}^{N+1}$
$N+1$ éq.

...

Exercice 8

f et g : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x,y) = y$

$g(x,y) = y^3 - x^2$

$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ g(x,y) = 0\}$

1) il faut $y^3 = x^2$
$\Rightarrow y \geq 0$
et $f(x,y) = y$

$\Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = (0,0)$

$$\underset{K}{\operatorname{argmin}} f = \{(0,0)\}$$

2) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad (\bar{x},\bar{y}) = (0,0)$

$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ 3y^2 \end{pmatrix}$

$\nabla f(\bar{x},\bar{y}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \nabla g(\bar{x},\bar{y}) = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$0 = 0$

$1 = \lambda . 0$ <u>impossible</u>

$\nexists \lambda, \nabla f(\bar{x},\bar{y}) = \lambda \nabla g(\bar{x},\bar{y})$

3) $\operatorname{Im}(Dg(\bar{x},\bar{y})) = \{0\}$

$\operatorname{rang}(Dg(\bar{x},\bar{y})) = 0$!! (en ce point $(\bar{x},\bar{y})$)

donc on ne peut pas appliquer Lagrange !!

4) $\begin{cases} \bar{x}^2 = \bar{y}^3 \\ 0 - 2\lambda\bar{x} = 0 \\ 1 + 3\lambda\bar{y}^2 = 0 \end{cases}$ n'a pas de solution !

donc $(0,0) = (\bar{x},\bar{y})$ qui pourtant marche, n'est pas trouvé par Lagrange.

Université de Chambery
Maîtrise de Mathématiques
C.D.O

Mars 93

Exercice 1 (Examen, Juin 92)

Soit $J : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction continue, strictement convexe, et telle que : $J(V) \underset{\|V\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, et pour $1 \leq i \leq m$, on se donne $\varphi_i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, continue convexe. On pose $K = \{ v \in \mathbb{R}^N \; ; \; \varphi_i(v) \leq 0 \; 1 \leq i \leq m \}$. On s'intéresse au problème :

$$(1) \quad \begin{cases} u \in K \\ J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in K \end{cases}$$

On suppose qu'il existe $v_0 \in \mathbb{R}^N$ tel que $\varphi_i(v_0) < 0, \forall i$.

1. Démontrer qu'il existe un unique $u \in K$ solution de (1).
2. Montrer que $\mathring{K}$ (intérieur de K) est tel que :
$\mathring{K} = \{ v \in \mathbb{R}^N \; ; \; \varphi_i(v) < 0, \quad 1 \leq i \leq m \}$.
3. Soit $\varepsilon > 0$; on définit, pour $v \in \mathring{K}$:
$$J_\varepsilon(v) = J(v) - \varepsilon \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\varphi_i(v)},$$
et on s'intéresse au problème,
$$(1)_\varepsilon : \quad \begin{cases} u \in \mathring{K} \\ J_\varepsilon(u) \leq J_\varepsilon(v) \quad \forall v \in \mathring{K} \end{cases}$$

3.a. Montrer qu'il existe un unique $u_\varepsilon \in \mathring{K}$ solution de $(1)_\varepsilon$.

3.b. Montrer que u_ε ~~tend~~ vers u, solution de (1), lorsque $\varepsilon \to$

3.c. Montrer que pour $0 < \eta < \varepsilon$, on a :
$J(u) \leq J(u_\eta) \leq J(u_\varepsilon)$.
(u_ε : solution de $(1)_\varepsilon$, u : solution de (1)).

Exercice 1

$J : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continue, strict convexe

$J(v) \to +\infty$ qd $\|v\| \to +\infty$

$1 \leq i \leq m$ $m \in \mathbb{N}^*$

$\varphi_i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continue convexe

$K = \{ v \in \mathbb{R}^N ; \varphi_i(v) \leq 0 \quad 1 \leq i \leq m \}$

(1) $\begin{cases} u \in K \\ J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in K \end{cases}$

$\exists v_0 \in \mathbb{R}^N \ / \ \varphi_i(v_0) < 0 \quad \forall i$

1°) existence : K fermé (car φ_i continues), J continue, $J(x) \to +\infty$ qd $|x| \to +\infty$ $\to$ existence

unicité : K convexe (car φ_i convexes), J strict convexe $\to$ unicité

2°) Posons $A = \{ v, \varphi_i(v) < 0 \quad \forall i \in \{1, .., m\} \}$

montrons : ① $A \subset \mathring{K}$

② $v \in K$, $\exists i, \ \varphi_i(v) = 0 \Rightarrow v \notin \mathring{K}$

$x \in \mathring{K} \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \ B(x, \varepsilon) \subset K \quad \Rightarrow \mathring{K} = \underset{\substack{O \text{ ouvert} \\ O \subset K}}{\cup O}$

① première méthode :

$A = \bigcap_{i=1}^{m} \underbrace{\underbrace{\varphi_i^{-1}(\underbrace{]-\infty, 0[}_{\text{ouvert}})}_{\text{ouvert}}}_{\text{ouvert}}$ ouvert

donc $A \subset K$

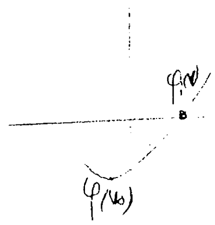
donc $A \subset \mathring{K}$

deuxième méthode : soit $v \in A \Rightarrow \varphi_i(v) < 0 \quad \forall i$

φ_i continue

$\Rightarrow \exists B(v, \varepsilon)$ tq $\forall w \in B(v, \varepsilon) \quad \varphi_i(w) < 0$

② $v \in K$
$\exists i,\ \varphi_i(v) = 0$



Soit $\varepsilon > 0$ et $w = v + \varepsilon(v - v_0)$

on a $w = (1+\varepsilon)v - \varepsilon v_0$

$$v = \frac{w}{1+\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} v_0$$

combinaison convexe

φ_i convexe

$$0 = \varphi_i(v) \leq \frac{1}{1+\varepsilon}\varphi(w) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\varphi_i(v_0)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\varphi_i(w)}{1+\varepsilon} \geq -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\varphi_i(v_0) > 0$$

$\varphi_i(w) > 0$ donc $w \notin K$

$\forall \eta > 0,\ B(v, \eta) \not\subset K$ on a donc $v \notin \mathring{K}$

conséquence $v \in \mathring{K} \Rightarrow \varphi_i(x) < 0 \ \forall i$

$$v \in \mathring{K} \Rightarrow v \in A$$

on a donc $A = \mathring{K}$ $(\ni \{v_0\})$

NB : $\mathring{K} \neq \emptyset$

3) $\varepsilon > 0$

$v \in \mathring{K} = \{v \in \mathbb{R}^N;\ \varphi_i(v) < 0 \quad 1 \leq i \leq m\}$

$$J_\varepsilon(v) = J(v) - \varepsilon \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\varphi_i(v)}$$

ⓐ Existence :

soit $(V_n)_n \subset \mathring{K}$ tq $J_\varepsilon(V_n) \downarrow \inf_{\mathring{K}} J_\varepsilon$

m.q. $(V_n)_n$ bornée (on aura donc $\exists V$ et sc suite, $V_{n_k} \to V$)

$J_\varepsilon(V_n) \downarrow \inf_{\mathring{K}} J$

donc $\exists \beta$, $J_\varepsilon(V_n) \leq \beta \quad \forall n$

$$J(V_n) \leq \beta + \underbrace{\varepsilon \sum \frac{1}{\varphi_i(V_n)}}_{< 0} \leq \beta$$

$\Rightarrow J(V_n) \leq \beta$

or $\exists R > 0$, $\|V\| \geq R \Rightarrow J(V) > \beta$

on a donc $\|V_n\| \leq R \quad \forall n$

$(V_n)_n$ est donc bornée

On peut donc supposer, après extraction d'une sous-suite encore notée $(V_n)_n$, tq $V_n \to V \quad V \in \mathbb{R}^N$

$J(V_n) \to J(V)$

$\varphi_i(V_n) \longrightarrow \varphi_i(V)$

il faut montrer $V \in \mathring{K}$

Si $\exists i$, $\varphi_i(v) = 0$

alors $\varphi_i(V_n) \to 0$

$\frac{1}{\varphi_i(V_n)} \to -\infty$ (car $\varphi_i(V_n) < 0$)

$$J_\varepsilon(V_n) = \underbrace{J(V_n)}_{\geq \inf_{\mathbb{R}^N} J} - \underbrace{\varepsilon \frac{1}{\varphi_i(V_n)}}_{\downarrow +\infty} - \underbrace{\varepsilon \sum_{j \neq i} \frac{1}{\varphi_j(V_n)}}_{\geq 0} \to +\infty$$

impossible car $J_\varepsilon(V_n) \to$

<u>conséquence</u> :
$\varphi_i(v) < 0 \ \forall i$ et donc $v \in \mathring{K}$

$J_\varepsilon(V_n) \longrightarrow J_\varepsilon(V)$ $\qquad$ $J_\varepsilon(V) = \beta = \inf_{\mathring{K}} J$

montrons l'unicité.
Pour cela, il faut montrer que J_ε strict. convexe ?

montrons $\left.\begin{array}{l}\varphi_i \text{ conv sur } \mathring{K} \\ \varphi_i(v) < 0 \quad \forall v \in \mathring{K} \\ \mathring{K} \text{ convexe}\end{array}\right) \Rightarrow -\frac{1}{\varphi_i}$ convexe

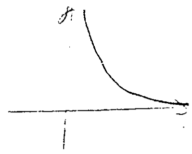
c.à.d $-\frac{1}{\varphi_i(tu + (1-t)v)} \leq -\frac{t}{\varphi_i(u)} - \frac{(1-t)}{\varphi_i(v)}$

$\varphi_i(tu + (1-t)v) \leq t\varphi_i(u) + (1-t)\varphi_i(v)$ $\qquad u, v \in \mathring{K}$ $\quad t \in]0, 1[$

$\underbrace{-\varphi_i(tu + (1-t)v)}_{>0} \geq \underbrace{-t\varphi_i(u) - (1-t)\varphi_i(v)}_{>0}$

$$\Rightarrow \frac{1}{-\varphi_i(tu + (1-t)v)} \leq \frac{1}{t\underbrace{(-\varphi_i(u))}_{x} + (1-t)\underbrace{[-\varphi_i(v)]}_{y}}$$

or pour $x, y > 0$ $\quad \frac{1}{tx+(1-t)y} \le \frac{t}{x} + \frac{1-t}{y}$ $\quad$ grâce à la convexité de $1/x$ sur $\mathbb{R}_+^*$



$\Rightarrow$ J_ε strict. convexe

$\Rightarrow$ unicité de la solution.

3.b)

montrons ① $\overline{\lim}$ $J(u_\varepsilon) \le J(v) \quad \forall v \in \mathring{K}$ $\quad$ lim sup

② $J(u_\varepsilon) \to J(u) = \inf_K J = \inf_{\mathring{K}} J$

③ $u_\varepsilon \to u$

① $$J(u_\varepsilon) \le \overbrace{J(u_\varepsilon) - \varepsilon \sum \frac{1}{\varphi_i(u_\varepsilon)}}^{J_\varepsilon(u_\varepsilon)} \le \underbrace{J(v) - \underbrace{\varepsilon \sum_i \frac{1}{\varphi_i(v)}}_{\downarrow\ 0 \text{ qd } \varepsilon \to 0}}_{\downarrow\ J(v) \text{ qd } \varepsilon \to 0} \quad \forall v \in \mathring{K}$$

donc $\displaystyle \limsup_{\varepsilon \to 0} J(u_\varepsilon) \le J(v)$ $\quad = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\eta < \varepsilon} J(u_\eta)$

② • $J(u) = \inf_K J \le \inf_{\mathring{K}} J$

• NB : $\exists (u_n)_n \subset \mathring{K}$ tq $u_n \to u$

posons $u_n = u + \frac{1}{n}(u_0 - u)$
$= (1-\frac{1}{n})u + \frac{1}{n}u_0$

par convexité de φ_i : $\varphi_i(v_n) \leq \underbrace{(1-\frac{1}{n})\varphi_i(u)}_{\leq 0} + \underbrace{\frac{1}{n}\varphi_i(v_0)}_{<0} < 0$

$\Rightarrow \underline{v_n \in \mathring{K}}$

on a donc $v_n \subset \mathring{K}$ et $v_n \to u \in K$ $\Rightarrow \mathring{K}$ dense dans K

donc $\inf_{\mathring{K}} J \leq \lim J(v_n) = J(u) = \inf_{K} J$

<u>conclusion</u> : $\underline{\inf_{K} J = \inf_{\mathring{K}} J}$

<u>récapitulons</u> : $\begin{cases} \limsup J(u_\varepsilon) \leq J(v) \quad \forall v \in \mathring{K} \\ \inf_{\mathring{K}} J = \inf_{K} J = J(u) \end{cases}$

(3) montrons que $J(u_\varepsilon) \to J(u)$
et donc $u_\varepsilon \to u$

on en déduit $\overline{\lim} J(u_\varepsilon) \leq J(u)$
$J(u_\varepsilon) \geq J(u)$

$J(u) \leq \underline{\lim} J(u_\varepsilon) \leq \overline{\lim} J(u_\varepsilon) \leq J(u)$

donc $J(u_\varepsilon) \to J(u)$

montrons maintenant $u_\varepsilon \to u$.

$J(u_\varepsilon) \xrightarrow{qd\ \varepsilon\to 0} J(u)$

donc $\exists\, \varepsilon_0 > 0$; $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \Rightarrow J(u_\varepsilon) \leqslant J(u) + 1$

$J(v) \to +\infty$ qd $\|v\| \to +\infty$ donc $\exists R$, $\|v\| \geqslant R \Rightarrow J(v) > J(u) + 1$

on a donc $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \Rightarrow \underline{\|u_\varepsilon\| \leqslant R}$

$\Rightarrow \underline{(u_\varepsilon)_{\varepsilon < \varepsilon_0} \text{ bornée}}$ (elle est dans $\overline{B}(0,R)$)

Supposons que $u_\varepsilon \not\to u$

c.à.d $\exists \eta > 0$ / tq $\forall \delta > 0$ $0 < \varepsilon < \delta$ $\|u_\varepsilon - u\| > \eta$

par exemple $\delta = 1/n$ $\exists \eta > 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon_n < 1/n$ $\|u_{\varepsilon_n} - u\| > \eta$

$\varepsilon_n \to 0$ $\|u_{\varepsilon_n} - u\| \geqslant \eta$

$\exists n_0$, $n \geqslant n_0 \Rightarrow \varepsilon_n \leqslant \varepsilon_0$, $\|u_{\varepsilon_n}\| \leqslant R$

la suite (u_{ε_n}) est donc bornée, on peut donc supposer après extraction d'éventuelle d'une sous-suite, encore notée $(\varepsilon_n)_n$, $u_{\varepsilon_n} \to v$ qd $n \to +\infty$

on a donc $J(u_{\varepsilon_n}) \to J(v)$ (car J cont.) qd $n \to +\infty$

or $J(u_\varepsilon) \to J(u)$ qd $\varepsilon \to 0$

on a donc $J(u) = J(v)$ avec $v \in K$, d'où $\underline{v = u}$

Résumé $\left.\begin{array}{l} u_{\varepsilon_n} \to u \\ \|u_{\varepsilon_n} - u\| \geqslant \eta \end{array}\right\}$ impossible

3-c) a-t-on pour $0 < \eta < \varepsilon$ $\quad J(u) \leq J(u_\eta) \leq J(u_\varepsilon)$?

on sait $J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(u_\eta)$

et $J_\eta(u_\eta) \leq J_\eta(u_\varepsilon)$

c.à.d $J(u_\varepsilon) - \varepsilon \sum \frac{1}{\varphi_i(u_\varepsilon)} \leq J(u_\eta) - \varepsilon \sum \frac{1}{\varphi_i(u_\eta)}$

et $J(u_\eta) - \eta \sum \frac{1}{\varphi_i(u_\eta)} \leq J(u_\varepsilon) - \eta \sum \frac{1}{\varphi_i(u_\varepsilon)}$ $\quad (*)$

additionons les 2 inégalités :

$$-\varepsilon \sum \frac{1}{\varphi_i(u_\varepsilon)} - \eta \sum \frac{1}{\varphi_i(u_\eta)} \leq -\varepsilon \sum \frac{1}{\varphi_i(u_\eta)} - \eta \sum \frac{1}{\varphi_i(u_\varepsilon)}$$

$$\Rightarrow (\varepsilon - \eta) \sum_i \frac{1}{\varphi_i(u_\eta)} \leq (\varepsilon - \eta) \sum_i \frac{1}{\varphi_i(u_\varepsilon)}$$

donc en reprenant $(*)$: $J(u_\eta) \leq J(u_\varepsilon) - \eta \underbrace{\left[\sum \frac{1}{\varphi_i(u_\varepsilon)} - \sum \frac{1}{\varphi_i(u_\eta)} \right]}_{\text{on vient de voir que ceci } \geq 0}$

donc ≤ 0

$$\Rightarrow \underline{J(u_\eta) \leq J(u_\varepsilon)}$$

pour $0 < \eta < \varepsilon$.

Université de Chambéry
Maîtrise de Mathématiques

Mars 93

C.D.O. examen de Septembre 92

Soit $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction <u>convexe</u>, de classe C^1 et vérifiant :

$$\exists\, a > 0, \quad (DJ(u) - DJ(v)).(u-v) \geq a|u-v|^2, \quad \forall\, u, v \in \mathbb{R}^n$$
$$\exists\, A > 0, \quad |DJ(u) - DJ(v)| \leq A|u-v|, \quad \forall\, u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Soient U un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$, et $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ une fonction convexe vérifiant

$$\exists\, M > 0, \quad |B(u) - B(v)| \leq M|u-v|, \quad \forall\, u, v \in \mathbb{R}^n.$$

(Les notations sont les notations habituelles ... en cas de doute, demandez à votre voisin ...)

I. 1) Montrer que

$+J(0)+\nabla J(0)(u) + \frac{a}{2}|u|^2 \leq J(u)$
$J(u) \geq \frac{a}{2}|u|^2 - |u|\,|\nabla J(0)| + J(0)$
$\alpha J(0)$
$\geq |u| \left(\frac{a}{2}|u| - \alpha\right) \longrightarrow \infty$

$$DJ(v)(u-v) + \frac{a}{2}|v-u|^2 \leq J(u) - J(v) \leq DJ(v)(u-v) + \frac{A}{2}|v-u|^2, \quad \forall\, u, v \in \mathbb{R}^n.$$

$\Rightarrow$ stricte convexité de J ($\to$ cours)

2) On suppose qu'il existe $v \in \mathbb{R}^n$ t.q. $Bv \leq 0$ et $v \in U$. Montrer que le problème suivant, noté (P), admet une et une seule solution, notée u.

$$(P) \begin{cases} u \in U, \ Bu \leq 0, \\ J(u) \leq J(v), \ \forall\, v \in U, \ Bv \leq 0. \end{cases}$$

3) On pose, pour $v \in \mathbb{R}^n$ et $q \in C^+ = \{q \in \mathbb{R}^m \,/\, q \geq 0\}$

$$L(v,q) = J(v) + q \cdot B(v) .$$

On suppose qu'il existe un point selle de L sur $U \times C^+$, c.a.d. qu'il existe $(u,p) \in U \times C^+$,

$$L(u,q) \leq L(u,p) \leq L(v,p) , \quad \forall\, v \in U, \ \forall\, q \in C^+ .$$

Montrer que u est solution de (P).

4) Pour $x \in \mathbb{R}^m$, on note $P_r(x)$ la projection de x sur $C^+ = \{y \in \mathbb{R}^m, y \geq 0\}$. Soient $\rho > 0$ et $q \in \mathbb{R}^m$. Montrer que

$$q = P_r(q + \rho B v) \iff \begin{cases} q \geq 0, & Bv \leq 0 \\ q \cdot Bv = 0 \end{cases}$$

5) Soient $\rho > 0$ et $(u,p) \in U \times C^+$.
Montrer que (u,p) est un point selle de L sur $U \times C^+$ (L est définie en 3)) si et seulement si

$$\begin{cases} DJ(u)(v-u) + p \cdot Bv \geq 0 & \forall\, v \in U \\ p = P_r(p + \rho B u) . \end{cases}$$

II. On conserve dans cette partie les notations introduites en I. On suppose qu'il existe $(u,p) \in U \times C^+$ point selle de L sur $U \times C^+$ (des sorte que u est l'unique solution de (P) d'après I.3 et I.2). On va construire un algorithme pour approcher u ...

On se donne $\varepsilon > 0$ et $\rho > 0$.

<u>Initialisation</u> : On se donne $u_0 \in U$ et $p_0 \in C^+$.

<u>Itération</u> : Soit $k \geq 0$. Pour $(u_k, p_k) \in U \times C^+$ connu, on calcule $(u_{k+1}, p_{k+1}) \in U \times C^+$ de la manière suivante :

① $u_{k+1} \in U$, $F_k(u_{k+1}) \leq F_k(v)$, $\forall v \in U$,

avec $F_k(v) = \frac{1}{2}|v|^2 + (\varepsilon \nabla J(u_k) - u_k) \cdot v + \varepsilon\, p_k \cdot Bv$.

② $p_{k+1} = P_r\left(p_k + \rho\, B(u_{k+1})\right)$.

1) Pour $(u_k, p_k) \in U \times C^+$ donné, montrer qu'il existe un et un seul élément de U, noté u_{k+1}, tel que $F_k(u_{k+1}) \leq F_k(v)$, $\forall v \in U$.

Montrer que u_{k+1} est également l'unique élément de U vérifiant

$$\begin{cases} u_{k+1} \in U \\ (u_{k+1} - u_k + \varepsilon \nabla J(u_k)) \cdot (v - u_{k+1}) + \varepsilon\, p_k \cdot (Bv - Bu_{k+1}) \geq 0 , \\ \qquad\qquad \forall v \in U \end{cases}$$

2) En utilisant la propriété de contraction de P_r, montrer que

$$2(p_k - p) \cdot (Bu - Bu_{k+1}) \leq \frac{1}{\rho}\left(|p_k - p|^2 - |p_{k+1} - p|^2\right) + \rho M^2 |u_{k+1} - u|^2 .$$

3) En utilisant les questions I.5 et II.1 montrer :

$$(u_{k+1}-u_k)(u-u_{k+1}) + \varepsilon\left(\nabla J(u_k)-\nabla J(u)\right)\cdot(u-u_{k+1}) + \varepsilon(p_k-p)\cdot(Bu-Bu_{k+1}) \geq 0 .$$

4) Avec I.1 montrer

$$\left(\nabla J(u_k)-\nabla J(u)\right)(u-u_{k+1}) \leq \frac{A}{2}|u_k-u_{k+1}|^2 - \frac{a}{2}\left(|u_k-u|^2+|u_{k+1}-u|^2\right)$$

5) Déduire de II.4 et II.2,

$$\frac{1}{2}|u_{k+1}|^2 + u_{k+1}\cdot(u-u_{k+1}) - \frac{1}{2}|u_k|^2 - u_k\cdot(u-u_k) +$$
$$\frac{1}{2}(\varepsilon A-1)|u_k-u_{k+1}|^2 + \frac{\varepsilon a}{2}\left(|u_{k+1}-u|^2-|u_k-u|^2\right) +$$
$$\varepsilon\left(\rho\frac{M^2}{2}-a\right)\left(|u_{k+1}-u|^2\right) + \frac{\varepsilon}{2\rho}\left(|p_k-p|^2-|p_{k+1}-p|^2\right) \geq 0 .$$

6) Si ε et ρ vérifient :

$$0<\varepsilon<\frac{1}{A}, \quad 0<\rho<\frac{2a}{M^2},$$

montrer que $u_k \to u$, $(p_k)_k$ est une suite bornée et $\left(|p_k-p|^2\right)_k$ est une suite convergente.

I

1) posons $\varphi(t) = J(v + t(u-v))$

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\, dt$$

$\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$\varphi(1) - \varphi(0) = J(u) - J(v)$$

$$J(u) - J(v) = \int_0^1 \underbrace{\nabla J\,(v + t(u-v)) \cdot (u-v)}_{\varphi'(t)}\, dt$$

(⚠ : ∇J n'est pas linéaire !!)

$$= \int_0^1 \underbrace{\Big(\nabla J(v + t(u-v)) - \nabla J(v)\Big) \cdot t(u-v)}_{\geq a t^2 |u-v|^2} \frac{dt}{t} + \nabla J(v) \cdot (u-v)$$

$$J(u) - J(v) \geq \int_0^1 a t^2 |u-v|^2 \frac{dt}{t} + \nabla J(v)\,(u-v)$$

$$\geq \frac{a}{2} |u-v|^2 + \nabla J(v) \cdot (u-v)$$

de m̂ :

$$J(u) - J(v) \leq \int_0^1 A\, t\, |u-v|\, |u-v| \frac{dt}{t} + \nabla J(v) \cdot (u-v)$$

$$\leq \frac{A}{2} |u-v|^2 + \nabla J(v) \cdot (u-v)$$

MiM
Mars 93

Calcul différentiel et optimisation

Examen de septembre 91

Soient $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ une matrice s.d.p., $b \in \mathbb{R}^n$, $C \in \mathbb{R}^{p,n}$ ($n \geq 1$, $p \geq 1$). On pose, pour $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$,

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax,x) - (b,x) \qquad (f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}),$$
$$g(x) = Cx \qquad (g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p),$$
$$D = \{x \in \mathbb{R}^n,\ g(x) = 0\},$$
$$L(x,u) = f(x) + (u, g(x)).$$

$(.,.)$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}^p$.

On suppose que $D \neq \emptyset$.

On considère le problème

$$(P) \begin{cases} x \in D \\ f(x) \leq f(y), \ \forall y \in D \end{cases}$$

I. 1) Montrer qu'il existe un et un seul $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, solution de (P).
Dans la suite on notera toujours $\bar{x}$ cette solution.

2) Soit $x \in D$, montrer que

$$f(x) \leq f(y), \ \forall y \in D \iff (Ax - b) \in (\operatorname{Ker} C)^\perp.$$

En déduire qu'il existe $\bar{u} \in \mathbb{R}^p$ t.q.

$$A\bar{x} - b + C^T\bar{u} = 0.$$

Montrer que $(\bar{x}, \bar{u})$ est un point selle de L sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, c.a.d. $(\bar{x},\bar{u}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ et

$$L(\bar{x},u) \leq L(\bar{x},\bar{u}) \leq L(x,\bar{u}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall u \in \mathbb{R}^p$$

3) Si (x,u) est un point selle de L sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, a-t-on nécessairement $x = \bar{x}$ (solution de (P)) ?
(Avouons-le ... la réponse est oui !)

II Pour $u \in \mathbb{R}^p$, on pose $M(u) = \operatorname{Inf}\{L(x,u),\ x \in \mathbb{R}^n\}$.

4) Soit $u \in \mathbb{R}^p$. Montrer qu'il existe un et un seul $x_u \in \mathbb{R}^n$ t.q. $L(x_u, u) = M(u)$.

5) Montrer que M est concave, et que si $(x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ est un point selle de L sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, alors (x,u) est un maximin de L sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, c.a.d. $x = x_u$, défini en 4, et $M(u) = \mathrm{Max}(M(v), v \in \mathbb{R}^p)$

6) On suppose que l'application $u (\in \mathbb{R}^p) \longrightarrow x_u (\in \mathbb{R}$ est dérivable. Calculer $\nabla M(u)$ en fonction de c et u.

III Pour trouver la solution de (P) on propose l'algorithme suivant :

$$(A) \begin{cases} \text{Initialisation} : & u_0 \in \mathbb{R}^p \text{ donné, } \rho > 0 \text{ donné.} \\ \text{Itérations} : & \begin{cases} \text{Calcul de } x_k : & A x_k = b - C^T u_k \\ \text{Calcul de } u_{k+1} : & u_{k+1} = u_k + \rho C x_k \end{cases} \end{cases}$$

7) pourquoi cet algorithme est-il naturellement suggéré par les parties I et II ? (et toc !)

8) Soit $(\bar{x}, \bar{u}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ un point selle de L. Montrer

$$\|u_{k+1} - \bar{u}\|^2 \leq \|u_k - \bar{u}\|^2 - \rho(2\alpha - \rho\|C\|^2)\|x_k - \bar{x}\|^2$$

$(\|x\|^2 = (x,x)$, $\|C\| = \mathrm{Sup}(\|Cx\|, \|x\| = 1))$

(α est la plus petite valeur propre de A).

9) Montrer que pour $\rho > 0$ assez petit (à préciser... on a $x_k \to \bar{x}$, quand $k \to +\infty$, $(u_k)_k$ est une suite bornée et, <u>si rang $C = p$</u> (c.a.d $\dim(\mathrm{Im}\, C) = p$), $u_k \to \bar{u}$, quand $k \to +\infty$, où $\bar{u}$ est <u>l'unique</u> élément de $\mathbb{R}^p$ t.q. $A\bar{x} - b + C^T\bar{u}$.

II Pour trouver la solution de (P) on propose maintenant l'algorithme suivant, ("double gradient").

(B) $\begin{cases} \text{Initialisation : } (x_0,u_0)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p \text{ donné, } \rho_1,\rho_2>0 \text{ donnés.} \\ \text{Itérations : } \begin{cases} \text{Calcul de } x_{k+1} : x_{k+1}=x_k-\rho_1(Ax_k-b+C^Tu_k) \\ \text{Calcul de } u_{k+1} : u_{k+1}=u_k+\rho_1\rho_2\, Cx_{k+1} \end{cases} \end{cases}$

10) pourquoi la recherche d'un point selle de L suggère cet algorithme ?

11) On pose $\beta=\|I-\rho_1A\|$ $\left(=\sup(\|(I-\rho_1A)x\|, \|x\|=1)\right)$, avec $\|x\|^2=(x,x)$). Montrer que, pour $\rho_1>0$ assez petit, on a $\beta<1$.

Dans la suite on choisit un $\rho_1>0$ t.q. $\beta<1$.

12) Soit $(\bar{x},\bar{u})$ un point selle de L sur $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$ (noter que $A\bar{x}+C^T\bar{u}=b$).

a. Montrer, en utilisant la définition de u_{k+1}, que

$$2\left(C^T(u_k-\bar{u}),x_{k+1}-\bar{x}\right)=\frac{1}{\rho_1\rho_2}\left(\|u_{k+1}-\bar{u}\|^2-\|u_k-\bar{u}\|^2\right)-\rho_1\rho_2\|C(x_{k+1}-\bar{x})\|^2$$

b. En utilisant la définition de x_{k+1}, montrer qu'il existe γ (dépendant de β,ρ_1,ρ_2,C, mais pas de k) t.q. :

$$\left(\beta\|x_{k+1}-\bar{x}\|^2+\frac{1}{\rho_2}\|u_{k+1}-\bar{u}\|^2\right)+\gamma\|x_{k+1}-\bar{x}\|^2\le\beta\|x_k-\bar{x}\|^2+\frac{1}{\rho_2}\|u_k-\bar{u}\|^2,$$

et que, pour $\rho_2>0$ assez petit, on a $\gamma>0$.

13) Déduire de (12) que, pour $\rho_1>0$ assez petit pour que $\beta<1$ pour $\rho_2>0$ assez petit pour que $\gamma>0$, on a $x_k\to\bar{x}$ quand $k\to\infty$, $(u_k)_k$ bornée, et, si rang(C) = p, $u_k\to\bar{u}$, où $\bar{u}$ est l'unique élément de $\mathbb{R}^p$ t.q. $A\bar{x}-b+C^T\bar{u}=$

Note : (A) est l'algorithme d'UZAWA
(B) est l'algorithme d'ARROW-HURWICZ.

Mait. Math

Univ. Chambéry

Avril 93

T.G.

Examen de CDO

Exercice 1

Soient $N \geq 1$, $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ une matrice s.d.p., $b \in \mathbb{R}^N$. On définit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2} Ax.x - b.x + \sum_{i=1}^{N} |x_i|$, pour tout $x = (x_1, \dots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$.

On s'intéresse au problème suivant :

$$(P) \begin{cases} x \in \mathbb{R}^N \\ f(x) \leq f(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

1. Montrer que le problème (P) admet une et une seule solution. Dans la suite, on notera $\bar{x}$ cette solution.
2. a- Donner explicitement l'ensemble des points de $\mathbb{R}^N$ pour lesquels f est différentiable.

   b- Donner un exemple de A et b pour lequel f est non différentiable en $\bar{x}$.

On pose $K = \{ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N, \ |\lambda_i| \leq 1 \ \forall i \in \{1, \dots, N\} \}$

pour $x \in \mathbb{R}^N$ et $\lambda \in K$ on pose $L(x, \lambda) = \frac{1}{2} Ax.x - b.x + \lambda . x$.

3. a. Montrer que $f(x) = \sup_{\lambda \in K} L(x, \lambda)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$

   b. Soit $x \in \mathbb{R}^N$. Montrer qu'il existe $\mu \in K$ t.q. $L(x, \mu) = \sup_{\lambda \in K} L(x, \lambda)$, et montrer, en donnant un exemple, que μ n'est pas toujours "unique".

4. Soit $\lambda \in K$. On considère le problème

$$(D_\lambda) \begin{cases} x \in \mathbb{R}^N \\ \dots \end{cases}$$

Montrer que le problème (D_λ) admet une et une seule solution. On notera, dans la suite, x_λ cette solution. Montrer que $Ax_\lambda - b + \lambda = 0$ $(*)$

On pose $M(\lambda) = L(x_\lambda, \lambda)$, $\lambda \in K$.

On considère le problème

$$(D) \begin{cases} \lambda \in K \\ M(\lambda) \geq M(\mu) \quad \forall \mu \in K. \end{cases}$$

5. Montrer que le problème (D) admet une et une seule solution, notée $\bar{\lambda}$ dans la suite.
[On pourra, en particulier, remarquer que M est strictement concave].

6* Montrer que $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ est l'unique point selle de L sur $\mathbb{R}^N \times K$. [On rappelle que (y, μ) est un point selle de L sur $\mathbb{R}^N \times K$ si $(y,\mu) \in \mathbb{R}^N \times K$ et

$$L(y,\lambda) \leq L(y,\mu) \leq L(x,\mu), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \forall \lambda \in K$$

7. a. Soit $\lambda \in K$, Montrer que M est différentiable en λ et calculer $\operatorname{grad} M(\lambda)$ en fonction de x_λ.
(pour cette question on étend en fait la définition de M à tout $\mathbb{R}^N$ en posant $M(\lambda) = L(x_\lambda, \lambda)$, x_λ donné par $(*)$)

b. Soit $z \in \mathbb{R}^N$, donner explicitement $P_K z$ en fonction de z (P_K étant la proj orth. sur K)

8. Soit $\rho > 0$. Pour approcher $\bar{x}$ on propose l'algorithme suivant. utiliser norme euclidienne

On pose $K = \{ u \in H_0^1(\Omega) \, , \, \int_\Omega u(x)dx = 0 \}$, et on définit $f : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ par

$$f(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2(x)\,dx - \int_\Omega g(x)\,u(x)\,dx \, , \qquad u \in H_0^1$$

où $f \in L^2(\Omega)$ est une fonction donnée.

On s'intéresse au problème

$$(P) \quad \begin{cases} u \in K \\ f(u) \leq f(v) & \forall\, v \in K \end{cases}$$

1. Montrer que le problème a une et une seule solution.

2. Soit $u \in K$. Montrer que u est $(\Rightarrow)$ solution de (P) si et seulement si il existe $\mu \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega Du(x)Dv(x) - \int_\Omega g(x)v(x)\,dx = \mu \int_\Omega v(x)\,dx \, , \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

$\Leftarrow$

$(u = v)$

initialisation : $\lambda_0 \in K$

itération : $\lambda_{n+1} = P_K(\lambda_n + \rho x_n)$,
avec $x_n = x_{\lambda_n}$

a. Montrer que pour $0 < \rho < \frac{2\lambda_1}{\lambda_N}$ (où λ_1 est le plus petite vp de A et λ_N la plus grande) l'application $\lambda \to P_K(\lambda + \rho x_\lambda)$ est une contraction stricte de K dans K.
En déduire que, pour $0 < \rho < \frac{2\lambda_1}{\lambda_N}$, $(\lambda_n)_n$ convergent vers un certain $\lambda \in K$ (et donc $x_n \to x_\lambda$ qd $n \to \infty$).

b. (Question indépendante des questions précédentes) Soit $x \in \mathbb{R}^N$, montrer que x est solution de (P) si et seulement si il existe $\mu \in K$ t.q. $Ax - b + {}^t\mu = 0$ et $\mu_i = \mathrm{sgn}(x_i)$ si $x_i \neq 0$ $\forall i \in \{1, \dots, N\}$.

c. En utilisant a et b. Montrer que, si $0 < \rho < \frac{2}{\lambda}$ on a $x_n \to \bar{x}$ quand $n \to \infty$.

Exercice 2 Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.

Rappel : $\exists C > 0$ t.q. $\|u\|_2^2 \leq C \|Du\|_2^2$ (Ineg. de Poincaré) $\forall u \in H_0^1(\Omega)$