Université de Marseille, janvier 2007
Licence de Mathématiques, 1ere année
Analyse, 2eme semestre, TD 1

Exercice 1

Exprimer à l'aide d'intervalles de $\mathbb{R}$ les ensembles suivants :

1. $\{x \in \mathbb{R}\,;\, 2 < |x| < 6\}$, $\{x \in \mathbb{R}\,;\, 3 \leq |x| \leq 7\}$,
2. $\{x \in \mathbb{R}\,;\, |x| > a\}$ ($a \in \mathbb{R}$ est donné, discuter suivant les valeurs de a),
3. $\{x \in \mathbb{R}\,;\, |x| < \varepsilon\}$ (avec $\varepsilon > 0$, donné).

Exercice 2

Soit $x \in [-2, 1]$ et $y \in [2, 3[$. Donner des encadrements des quantités suivantes :
$x + y$, $x - y$, $-2x + y$, $-x - y$, xy.

Exercice 3

Soit a, $b \in \mathbb{R}$. Montrer les implications suivantes :

1. $(\forall \varepsilon > 0,\, |a| < \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.
2. $(\forall \varepsilon > 0,\, a < b + \varepsilon) \Rightarrow a \leq b$.
3. $(\forall \varepsilon > 0,\, |a - b| < \varepsilon) \Rightarrow a = b$.

Pour les exercices suivants, on rappelle que si A est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, il existe un nombre réel, noté $\sup(A)$, qui est le plus petit des majorants de A. De même, si A est une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$, il existe un nombre réel, noté $\inf(A)$, qui est le plus grand des minorants de A.

Exercice 4

Soit A est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. On pose $-A = \{-a,\, a \in A\}$. Montrer que $-A$ est une partie non vide minorée $\mathbb{R}$. Comparer $\inf(-A)$ et $\sup(A)$.

Exercice 5

Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ t.q. $A \subset B$. On suppose que B est majorée. Montrer que A est majorée et que $\sup(A) \leq \sup(B)$. Cette dernière inégalité est-elle nécessairement stricte si l'inclusion de A dans B est stricte ?

Exercice 6

Soit A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. On pose $A + B = \{a + b,\, a \in A$ et $b \in B\}$. Montrer que $A + B$ est majorée et comparer $\sup(A + B)$ et $\sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 7

1. Montrer que toute suite convergente dans $\mathbb{R}$ est bornée (c'est-à-dire majorée et minorée).

2. Montrer que toute suite croissante majorée est convergente dans $\mathbb{R}$.

Exercice 8

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. On suppose que A est majorée et on pose $a = \sup(A)$. Montrer qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a.

2. On suppose que A n'est pas majorée. Montrer qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers l'infini.

Exercice 9

Soit $l \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ecrire à l'aide des quantificateurs les phrases suivantes :

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers l quand n tend vers $+\infty$.

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

3. $f(x)$ ne tend pas vers l quand x tend vers a.

4. $f(x)$ ne tend pas vers l quand x tend vers $+\infty$.

.

Université de Marseille, janvier 2007
Licence de Mathématiques, 1ere année
Analyse, 2eme semestre, TD 2

Exercice 1 (Limite, limite à droite et limite à gauche)

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. Soit f une application définie sur $A = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f admet l comme limite en a si et seulement si f admet (en a) l comme limite à droite et comme limite à gauche.

2. Montrer que f admet l comme limite à gauche en a si et seulement si f vérifie la condition suivante :

   Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A,

   $$x_n \uparrow a, \text{ quand } n \to \infty \Rightarrow f(x_n) \to l, \text{ quand } n \to \infty,$$

   où $x_n \uparrow a$ quand $n \to \infty$ signifie $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ et $x_{n+1} \geq x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Montrer que f admet l comme limite à droite en a si et seulement si f vérifie la condition suivante :

   Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A,

   $$x_n \downarrow a, \text{ quand } n \to \infty \Rightarrow f(x_n) \to l, \text{ quand } n \to \infty.$$

   où $x_n \downarrow a$ quand $n \to \infty$ signifie $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ et $x_{n+1} \leq x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Reprendre les questions 1, 2 et 3 avec $l = \infty$ et avec $l = -\infty$.

Exercice 2 (Opérations sur les limites)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $I =]a, b[$. Soit f et g deux applications de I dans $\mathbb{R}$ et $l, m \in \mathbb{R}$. On suppose que $l = \lim_{x\to a,\, x>a} f(x)$ et $m = \lim_{x\to a,\, x>a} g(x)$.

1. Montrer que $l + m = \lim_{x\to a,\, x>a}(f + g)(x)$.

2. On suppose que $m \neq 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ t.q. $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in J =]a, c[$. Montrer que $\frac{l}{m} = \lim_{x\to a,\, x>a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

3. On suppose que $m = 0$, $l > 0$ et que $g(x) > 0$ pour tout $x \in I$. Montrer que $\lim_{x\to a,\, x>a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

4. On prend ici $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ et $g(x) = x$. Les applications fg et f/g (qui est bien définie sur I) ont-elles une limite à droite en 0 ?

Exercice 3 (Quelques exemples. . .)

Pour les exemples suivants, la fonction f est définie sur $I = \mathbb{R}$.

1. On définit f par $f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. L'application f a-t-elle une limite en 0 ? une limite à droite en 0 ? une limite à gauche en 0 ?

2. On définit f par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - (x + 1)$ pour tout x. Quelle la limite de f en $+\infty$?

3. On définit f par $f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x^2})}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. L'application f a-t-elle une limite en 0 ? une limite à droite en 0 ? une limite à gauche en 0 ?

4. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $E(x) = \sup\{n \in \mathbb{Z};\ n \leq x\}$. On définit f par $f(x) = x - \sqrt{x - E(x)}$ pour tout $x \neq 0$. Soit $n \in \mathbb{Z}$, L'application f a-t-elle une limite en n ? une limite à droite en n ? une limite à gauche en n ?

Exercice 4 (Autres exemples...)

1. $f(x) = \frac{\sqrt{x^3-3x+2}}{2x^2-x-1}$ pour $x \in]0,1[$. Quelle est la limite (à gauche) de f en 1 ?

2. $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+4}}$ pour $x \in]0,1[$. Quelle est la limite (à droite) de f en 0 ?

3. Soit $a > 0$. On définit f par $f(x) = \frac{(1+x)^a}{x}$ pour $x \in]0,1[$. Quelle est la limite (à droite) de f en 0 ?

4. $f(x) = (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$ pour $x \in]0,1[$. Quelle est la limite (à droite) de f en 0 ?

Exercice 5 (Fonction périodique admettant une limite)

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. on suppose qu'il existe $T > 0$ t.q. $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on dit alors que f est périodique de période T). On suppose de plus que f admet une limite finie, notée l, en $+\infty$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|f(x) - l| \leq \varepsilon$.

2. En déduire que f est une fonction constante.

Exercice 6 (Fonctions monotones)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $I =]a, b[$. Soit f une application strictement croissante de I dans $\mathbb{R}$. On pose $A = \{f(x),\ x \in I\}$, $\alpha = \inf A$ et $\beta = \sup A$.

1. Montrer que $f(x) \to \alpha$ quand $x \to a$ (on pourra distinguer les cas $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha = -\infty$). Montrer que $f(x) \to \beta$ quand $x \to b$.

2. Soit $c \in I$. Montrer que f admet une limite à droite en c, notée $f_d(c)$, et une limite à gauche en c, notée $f_g(c)$. Montrer que $f_g(c) \leq f(c) \leq f_d(c)$.

3. On suppose que $f_d(c) = f_g(c)$ pour tout $c \in I$ (avec f_d et f_g définies à la question précédente). Montrer que f est continue et que f est bijective de $]a, b[$ dans $]\alpha, \beta[$.

Université de Marseille, février 2007
Licence de Mathématiques, 1ere année
Analyse, 2eme semestre, TD 3

Exercice 1 (Fonction continue, non nulle en un point)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f est continue en a et que $f(a) \neq 0$. Montrer que f est non nulle sur un intervalle ouvert contenant a.

Exercice 2 (Limite en $+\infty$)

Soit $f\ :\mathbb{R}\ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 3 (Fonction lipschitzienne)

Soit $f\ :\mathbb{R}\ \to \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+$. On suppose que $|f(x)-f(y)| \leq k|x-y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que f est continue (sur tout R).

Exercice 4

Pour quelle valeur de α la fonction f, définie ci-après, est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} \text{ si } x \neq 2 \\ \alpha \text{ si } x = 2. \end{cases}$$

Exercice 5 (Polynôme de degré impair)

Montrer que toute fonction polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de degré impair, s'annule en au moins un point.

Exercice 6 (Existence d'un maximum)

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Montrer que f admet un maximum (c'est-à-dire qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q., pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leq f(a)$).

Exercice 7 (Injectivité et continuité donne monotonie)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et $f\ [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et injective. Montrer que f est monotone. [Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.]

Exercice 8 (Prolongement par continuité)

Soit f l'application de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{1 - |x|}.$$

1. La fonction f est-elle continue en 0 ?

2. Calculer $\lim_{x\to-1} f(x)$ et $\lim_{x\to1} f(x)$.

3. Existe-t-il une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}$ et qui est égale à f sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$?

Exercice 9

Soit f et g deux fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, continues et t.q. $f(0)=g(1)=0$ et $g(0)=f(1)=1$. Montrer que :

$$\forall\lambda\in\mathbb{R}_+,\ \exists x\in[0,1],\ f(x)=\lambda g(x).$$

Exercice 10 (Moyennes harmonique et arithmétique)

1. Montrer que, pour tout $a,b\in\mathbb{R}$ t.q. $0<a<b$, on a :

$$a<\frac{2ab}{a+b}<\frac{a+b}{2}<b.$$

2. Soit $u_0,v_0\in\mathbb{R}$ t.q. $0<u_0<v_0$. On définit, par récurrence, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_{n+1}=\frac{2u_nv_n}{u_n+v_n},\quad v_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}.$$

   (a) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies (c'est-à-dire que $u_n+v_n\neq0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$) et que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes (dans $\mathbb{R}$).

   (b) Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty} v_n$.

   (c) Vérifier que la suite $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

   (d) Donner la limite commune au suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 11 (Valeur intermédiaire)

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $t\in[0,1]$, l'ensemble $\{s\in[0,1]$ t.q. $f(s)=\frac{f(0)+f(t)}{2}\}$ est non vide.

   Pout $t\in[0,1]$, on pose $\varphi(t)=\inf\{s\in[0,1]$ t.q. $f(s)=\frac{f(0)+f(t)}{2}\}$.

2. Montrer que $\varphi(t)\in[0,1]$ et que $f(\varphi(t))=\frac{f(0)+f(t)}{2}$.

3. Montrer que si f est strictement croissante, l'application φ ainsi définie de $[0,1]$ dans $[0,1]$ est continue.

4. Donner un exemple de fonction f pour lequel la fonction φ n'est pas continue.

Université de Marseille, février 2007
Licence de Mathématiques, 1ere année
Analyse, 2eme semestre, td4

Exercice 1 (Fonction dont l'image est discrète)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue (en tout point de $\mathbb{R}$).

1. On suppose que $f(x) \in \{0, 1\}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante. [utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.]
2. On remplace maintenant l'hypothèse "$f(x) \in \{0, 1\}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$" par "$\mathrm{card}\{f(x), x \in \mathbb{R}\} < \infty$". Peut on aussi montrer que f est constante ? (justifier la réponse...)

Exercice 2 (Continuité de "max" et "min")

1. Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ et $\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.
2. Soit f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit les applications $f \top g$ et $f \perp g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :
$$(f \top g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \ (f \perp g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}, \ \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$
Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f et g sont continues en a. Montrer que $f \top g$ et $f \perp g$ sont continues en a.

Exercice 3 (Convexe implique continue)

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est convexe, c'est à dire que $f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$ pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.
On pose $\alpha = f(1) - f(0)$, $\beta = f(0) - f(-1)$ et $\gamma = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

1. Soit $x \in]0, 1[$. Montrer que $\beta x \leq f(x) - f(0) \leq \alpha x$. [Utiliser le fait que $x = t1 + (1 - t)0$, avec $t = x$, et $0 = tx + (1 - t)(-1)$, avec $t = \frac{1}{1+x}$.]
2. Soit $x \in] - 1, 1[$. Montrer que $|f(x) - f(0)| \leq \gamma |x|$. En déduire que f est continue en 0.
3. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (Borne supérieure atteinte)

Soit f une application continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ (on rappelle que $\mathbb{R}_+ = [0, \infty[$). On suppose que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Monter que $\{f(x),\, x \in \mathbb{R}_+\}$ est majoré est qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $f(a) = \sup\{f(x),\, x \in \mathbb{R}_+\}$.

Exercice 5 (Exercice sur les valeurs intermédiaires)

Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $f(0) = f(1)$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. pour $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$, on pose $g(x) = f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$.

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n}) = 0$.
2. Montrer qu'il existe $x_0, x_1 \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ t.q. $g(x_0) \leq 0$ et $g(x_1) \geq 0$.
3. Monter qu'il existe $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ t.q. $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$.

Université de Marseille, février 2007
Licence de Mathématiques, 1ere année
Analyse, 2eme semestre, TD 5

Exercice 1 (Opérations sur les dérivées)

Soit $-\infty \le a < b \le \infty$, $x \in]a,b[$ et f,g deux applications de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et g sont dérivables en x.

1. Montrer que $(f+g)$ est dérivable en x et $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
2. Montrer que fg est dérivable en x et $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
3. On suppose que $g(y) \neq 0$ pour tout $y \in]a,b[$. Montrer que f/g est dérivable en x et que :

$$(f/g)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Exercice 2 (Dérivée en un point)

Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable pour tout $x \neq 0$ et que f' (définie sur $\mathbb{R}^\star$) admet une limite en 0, notée l. Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = l$. [On pourra utiliser le théorème des accroissements finis.]

Exercice 3 (Dérivabilité de $x \mapsto |x|^a$)

Etudier, selon les valeurs du paramètre $a > 0$, la continuité et la dérivabilité de l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|^a$ pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$ et $f(0) = 0$.

Exercice 4 (Dérivée non continue)

On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} &f(x) = 0, \text{ si } x \le 0, \\ &f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}, \text{ si } x > 0. \end{aligned}$$

Montrer que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La dérivée de f est-elle continue ?

Exercice 5 (Dérivée et propriété des valeurs intermédiaires)

Soit $-\infty \le a < b \le \infty$ et f une application de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable pour tout $x \in]a,b[$. On va montrer, dans cet exercice, que f' (définie sur $]a,b[$) vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

Soit $c,d \in]a,b[$, $c < d$, et γ appartenant à l'intervalle ouvert dont les bornes sont $f'(c)$ et $f'(d)$.

1. Montrer qu'il existe $\eta \in]0, d-c[$ t.q. γ appartienne à l'intervalle ouvert dont les bornes sont $\frac{f(c+\eta)-f(c)}{\eta}$ et $\frac{f(d-\eta)-f(d)}{-\eta}$.
2. On définit g de $[c, d-\eta]$ dans $\mathbb{R}$ (avec η donné par la question précédente) par :

$$g(x) = \frac{f(x+\eta) - f(x)}{\eta}, \text{ pour } x \in [c, d-\eta].$$

   Montrer que g est continue sur l'intervalle $[c, d-\eta]$ et en déduire qu'il existe $y \in [c, d-\eta]$ t.q. $g(y) = \gamma$.
3. Montrer qu'il existe $z \in [c,d]$ t.q. $f'(z) = \gamma$.

Exercice 6 (Propriété des valeurs intermédiaires n'implique pas continuité)

En utilisant les deux exercices précédents, donner un exemple d'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires et non continue.

Exercice 7 (Accroissements finis "généralisés")

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit f et g deux applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et g est dérivables pour tout $x \in]a, b[$ et que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

1. Montrer que $g(x) - g(a) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b]$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ t.q. :
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
[On pourra considérer la fonction u définie sur $[a, b]$ par $u(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x)$.]

Exercice 8

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est deux fois dérivable pour tout $x \in]a, b[$ (c'est-à-dire que f est dérivable pour tout $x \in]a, b[$ et que f', qui est donc définie sur $]a, b[$, est aussi dérivable pour tout $x \in]a, b[$). Soit $x_0 \in]a, b[$.

1. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ t.q. :
$$f(x_0) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_0 - a) + \frac{(x_0 - a)(x_0 - b)}{2} A.$$
2. On définit φ sur $[a, b]$ par :
$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - \frac{(x - a)(x - b)}{2} A.$$
Montrer qu'il existe $c \in]a, x_0[$ et $d \in]x_0, b[$ t.q. $\varphi'(c) = \varphi'(d) = 0$.
3. Montrer qu'il existe $\theta \in]a, b[$ t.q. :
$$f(x_0) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_0 - a) + \frac{(x_0 - a)(x_0 - b)}{2} f''(\theta).$$

Exercice 9

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x + e^x$. Montrer que f est strictement croissante, continue et bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note g l'application récirpoque de f. Montrer que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $g'(1)$ et $g''(1)$.

Université de Marseille, mars 2007
Licence de Mathématiques, 1ere année
Analyse, 2eme semestre, TD 6

Exercice 1 (Dérivabilité en un point)

Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que f est dérivable en tout point x différent de a et que f' (définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$) admet une limite en a, notée a_1. Montrer que f est dérivable en a et que $f'(a) = a_1$. [Cette question a été faite au TD 5 avec $a = 0$.]
2. On suppose que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $f^{(n)}$ (définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$) admet une limite en a, notée a_n. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. [On pourra raisonner par récurrence sur n.]

Exercice 2 (Fonction C^∞ non analytique)

On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}, \text{ si } x > 0,$$
$$f(x) = 0, \text{ si } x \leq 0.$$

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, \infty[$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme p_n t.q.
$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}, \text{ si } x > 0.$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Soit $p \in \mathbb{Z}$, Montrer que :
   $$\lim_{x \to 0,\, x > 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^p} = 0.$$
   [On rappelle que $e^u \geq \frac{u^q}{q!}$ pour tout $u > 0$ et tout $q \in \mathbb{N}$.]
   (b) Montrer que $\lim_{x \to 0, x \neq 0} f^{(n)}(x) = 0$.
4. Montrer que f est de classe C^∞ (sur $\mathbb{R}$).
5. Montrer que f n'est pas analytique.

Exercice 3 (DL, exemple 1)

On définit f sur $]-\infty, 1[$ par :

$$f(x) = \arctan \frac{1}{1-x}.$$

Donner le développement limité à l'ordre 3 de f en 0.

Exercice 4 (DL d'un polynôme. . .)

Donner le développement limité à l'ordre 7 en -1 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 1$.

Exercice 5 (Utilisation des DL)

Donner la limite en 0 de f définie sur $]0, \infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

Exercice 6 (Etude de fonction)
Etudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x \arctan x, \ x \in \mathbb{R}.$$

[Montrer que f est paire. Calculer f' et f". Etudier les asymptotes.]

Exercice 7 (DL, exemple 2)
On définit f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est de classe C^∞. [Reprendre un exercice précédent. . . .]
2. Calculer f' et f".
3. Montrer que f est paire, donner son tableau de variation et sa limite en $+\infty$.
4. Donner le développement limité de f en 0.

Exercice 8 (DL, exemple 3, fastidieux. . .)
On définit f sur $]0, \infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{\log(1+x)}{x}}$.

1. Montrer que f admet une limite (finie) en 0, notée l. On pose dans la suite $f(0) = l$.
2. Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de f.

Exercice 9 (DL d'une fonction réciproque)
On définit f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + \sin x$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, strictement croissante. On note, dans la suite, g sa fonction réciproque.
2. Montrer que f et g sont dérivables en tout point de $\mathbb{R}$.
3. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de g.

Exercice 10 (Bolzano-Weierstrass)
Soit $-\infty < a < b < \infty$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $[a, b]$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $a_n = \inf\{x_p, \ p \geq n\}$. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite croissante majorée. En déduire qu'il existe $x \in [a, b]$ t.q. $a_n \to x$ quand $n \to \infty$.
2. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe $\varphi(n) \geq n$ t.q. $|x_{\varphi(n)} - a_n| \leq \frac{1}{n}$ (où a_n est défini à la question précédente). En déduire que $x_{\varphi(n)} \to x$ quand $n \to \infty$ (où x est défini à la question précédente).

Exercice 11 (Théorème de Heine)
Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose que f n'est pas uniformément continue.
   (a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe $x_n, y_n \in [a, b]$ t.q. $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.
   (b) Montrer qu'il existe un point $x \in [a, b]$ t.q. f ne soit pas continue en x. [Utiliser l'exercice précédent.]
2. On suppose que f est continue (sur $[a, b]$). Montrer que f est uniformément continue (sur $[a, b]$).

Université de Marseille, mars 2007
Licence de Mathématiques, 1ere année
Analyse, 2eme semestre, TD 7

Exercice 1 (Condition nécessaire et condition suffisante de minimalité)

Soit f une application $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que f est de classe C^1 et que f admet un minimum local en a. Montrer que $f'(a) = 0$.
2. On suppose que f est de classe C^2, $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$. Montrer que f admet un minimum local en a.
3. Donner un exemple pour lequel f est de classe C^2, $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ et f n'admet pas un minimum local en a.

Exercice 2 (Equivalents)

1. Soit $\alpha > 0$. Montrer que $(1 + x)^\alpha \sim \alpha x$ en 0.
2. Montrer que $(1 + x + x^2) \sim x^2$ en $+\infty$.
3. Soit f, g, h des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On suppose que $f \sim \lambda h$ et $g \sim \mu h$ en 0 et que $\lambda + \mu \neq 0$. Montrer que $(f + g) \sim (\lambda + \mu)h$ en 0. Donner un exemple où ce résultat est faux si $\lambda + \mu = 0$.
4. Soit f et g des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(x) > 0$ et $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f \sim g$ en 0 et $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$. On pose $h(x) = \ln(x)$ our $x > 0$. Montrer que $h \circ f \sim h \circ g$ en 0.
5. Soit f, g, h des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f \sim h$ en 0 et que $g = o(h)$ au voisinage de 0. Montrer que $(f + g) \sim h$ en 0.

Exercice 3 (Limlte à l'infini)

Soit f une fonction dérivable de $]0, \infty[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Montrer que $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Exercice 4 (Prolongement par continuité)

Pour $x \in]0, 1[$, on pose $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$. Peut on prolonger f par continuité en 0 et en 1 ?

Exercice 5 (Calcul de primitives)

1. Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^4 + 3x^2 - x$. Calculer F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $F' = f$ et $F(0) = 0$.
2. Soit f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$. Calculer F de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $F' = f$ et $F(0) = 0$.
3. Soit f de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x^4+x^2-1}{x^2}$. Calculer F de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $F' = f$ et $F(1) = 0$.

Exercice 6 (Limite en 0)

Trouver les limites en 0 des fonctions suivanates, définies sur $\mathbb{R}^\star$:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1+x^2} - \cos(x)\right),\ g(x) = \frac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x},\ h(x) = \frac{e^x - \cos(x) - \sin(x)}{x^2}.$$

Exercice 7 (DL3)

Calculer le DL3 en 0 de f définie pour $x \in]-1,1[$ par $f(x) = \sin(x) - \cos(x) + \tan(x) + \frac{1}{1-x}$.
Calculer le DL3 en $\frac{\pi}{2}$ de f définie pour $x \in]0,\pi[$ par $f(x) = \ln(\sin(x))$.

Exercice 8 (DL4)

Donner le DL4 en 0 des fonctions suivantes (définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) :

$$f(x) = (1 + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{2}},\ g(x) = e^{\cos(x)}.$$

Exercice 9 (DLn)

On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} &f(x) = \tfrac{x}{e^x-1} \text{ si } x \neq 1, \\ &f(1) = 1 \end{aligned} \tag{1}$$

Montrer que f est continue en 0 et admet un DLn en 0, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 10 (Equivalents)

Soit f, g, φ, ψ définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = x^4 + 1$, $\varphi(x) = x^3 - 3x$, $\psi(x) = x^3$.

1. Montrer que $f \sim g$ en 0.
2. Montrer que $\ln(f)$ et $\ln(g)$ sont définies sur $]-1,\infty[$ et que $\ln(f) \sim \ln(g)$ en 0.
3. Montrer que $\varphi \sim \psi$ en $+\infty$.
4. Montrer que $e^\varphi \sim e^\psi$ en $+\infty$.

Exercice 11 (Fonction indéfiniment dérivable et à support compact)

On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} &f(x) = 0, \text{ si } x \leq -1, \\ &f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}, \text{ si } -1 < x < 1, \\ &f(x) = 0, \text{ si } x \geq 1. \end{aligned}$$

1. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$
2. (a) Montrer que f est de classe C^∞ sur $]-1,1[$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer qu'il existe deux polynômes p_n et q_n t.q.:
   $$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{q_n(x)} e^{\frac{1}{x^2-1}},\ \text{pour tout } -1 < x < 1.$$
   (On ne demande de calculer p_n et q_n mais seulement de montrer leur existence.)
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que $\lim_{x\to 1, x<1} f^{(n)}(x) = 0$.
3. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. [On pourra utiliser le résultat suivant, vu en cours et en TD : Soit $\infty \leq b < a < c \leq \infty$ et g une application de $]b,c[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que g est dérivable pour tout $x \in]b,c[$, $x \neq a$, et que g' (définie sur $]b,c[\setminus\{a\}$) admet une limite en a, notée l. Alors, g est dérivable en a et $g'(a) = l$.]
4. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, donner le développement limité de f, à l'ordre n, au point 1.

Université de Marseille, mars 2007
Licence de Mathématiques, 1ere année
Analyse, 2eme semestre, TD 8

Exercice 1 (Formule de la moyenne)

Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On note $A = \{f(x), x \in [a,b]\}$, $m = \inf A$ et $M = \sup A$.

1. Montrer qu'il existe $\mu \in [m,M]$ t.q. :
$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a).$$
2. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ t.q. :
$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Exercice 2 (Intégrale d'une fonction positive)

Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$, et qu'il existe $c \in [a,b]$ t.q. $f(c) > 0$. Montrer que $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Exercice 3 (Intégrale impropre)

On définit l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{array}{l} f(x) = 0, \text{ si } x \leq 0, \\ f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}, \text{ si } x > 0. \end{array}$$

1. Montrer que f est continue et dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f' est continue en tout point sauf 0.
3. Soit $0 < a < b < \infty$. Montrer que :
$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt.$$
4. Soit $a > 0$. Pour $0 < x < a$, on pose, $g(x) = \int_x^a f'(t)dt$. Montrer que $g(x)$ a une limite (dans $\mathbb{R}$) quand $x \to 0$, avec $x > 0$. On note (improprement... car f' n'est pas continue sur $[0,a]$) $\int_0^a f'(t)dt$ cette limite. Montrer que :
$$f(a) - f(0) = \int_0^a f'(t)dt.$$

Exercice 4 (Calcul d'intégrales)

Calculer les intégrales suivantes :
$$\int_0^3 x^3 dx, \qquad \int_1^4 \frac{x^2-1}{x^2}dx, \qquad \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx.$$

Exercice 5 (Convergence de l'intégrale)

Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et φ une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\varphi_n \to \varphi$ simplement quand $n \to \infty$ (c'est-à-dire que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$, pour tout $x \in [0,1]$).

1. Montrer que si $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|\, dx = 0$, alors $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx = \int_0^1 \varphi(x)\, dx$.
2. Montrer que si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ, alors $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx = \int_0^1 \varphi(x)\, dx$.
3. Donner un exemple pour lequel $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers φ et :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx = \int_0^1 \varphi(x)\, dx.$$

4. Donner un exemple pour lequel $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx \neq \int_0^1 \varphi(x)\, dx$.
5. Si la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait les deux conditions :
   (a) Pour tout ε, $0 < \varepsilon < 1$, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ sur $[\varepsilon, 1]$,
   (b) Les φ_n sont à valeurs dans $[-1, +1]$,

   montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx = \int_0^1 \varphi(x)\, dx$.

Topologie -DM1

Exercice 1 Point fixe
$I = [0, 1]$, soit f une application croissante de I dans I.
On pose
$$A = \{x \in I, f(x) \leq x\}.$$
Montrer que
(i)-$A \neq \emptyset$.
(ii)-$x \in A \Rightarrow f(x) \in A$.
(iii)-A possède une borne inférieure $a \in I$.
(iv)-$f(a) = a$.
Enoncer le théorème ainsi démontré.
Exercice 2 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$
Pour toit $x \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$, construire $x_\varepsilon \in \mathbb{Q}$ tel que $|x - x_\varepsilon| \leq \varepsilon$.

Exercice 3 Moyenne de Césaro
1)-Soit une suite de nombres réels (u_n) , on définit la suite $v_n = \frac{u_1+...+u_n}{n}$. On admet que si (u_n)converge vers $l \in C$, alors (v_n) converge vers l.
(a)-Montrer que (u_n) tend vers $+\infty$ implique que v_n diverge vers $+\infty$.
(b)-On suppose que la suite (u_n) est croissante, montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = l \in \overline{R_+} \Rightarrow \lim u_n = l.$$

2)-
(a)-Généralisation. Soit (λ_n) une suite de nombres réels strictement positifs et (u_n) une suite complexe qui converge vers $l \in C$. On suppose que
$$\lim_{n\to+\infty}(\sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k) = +\infty.$$
Montrer que la suite
$$v_n = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k u_k}{\sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k}$$
converge vers l,i;e:
$$\left\{ \lim_{n\to+\infty}(\sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k) = +\infty, \lim_{n\to+\infty} u_n = l \right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k u_k}{\sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k} = l.$$
(b)-En déduire que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + ... + \sqrt[n]{n}}{n} = 1.$$
(c)-En déduire aussi que si $\lim_{n\to+\infty}(x_{n+1} - x_n) = l$ alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = l$.
Exercice 4
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ et vérifiant l'équation fonctionnelle
$$\forall x, y \in R^+ : f(x + y) = f(x)f(y).$$
1- Vérifier que f est à valeurs positives ou nulles.
2- Montrer que si $f(0) = 0$ alors f est identiquement nulle.

Dans ce qui suit on suppose que f n'est pas identiquement nulle.

3- Calculer $f(0)$.

4- Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $f(nx)$ et $f(\frac{x}{n})$ en fonction de $f(x)$ et n.

5- Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et p, q deux entiers naturels strictement positifs. On pose $r = \frac{p}{q}$,En calculant $f(q(rx))$ de deux manières différentes, exprimer $f(rx)$ en fonction de $f(x)$ et r.

6- *Dans cette question on suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $f(\alpha) = 0$.*

(i) Construire une suite (x_n) de réels strictement positifs convergeant vers 0 tellle que $f(x_n) = 0$ pour tout $n \in N$.

(ii) Montrer que la fonction f est nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Dans ce qui suit on suppose que f est à valeurs strictement positives.

7- On suppose dans cette question que f est continue à droite sur $\mathbb{R}^+$. Montrer qu'il existe un réel a tel que $f(x) = e^{ax}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

8- On suppose que f est continue à droite en 0, montrer que f est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}^+$ et conclure.

9-On suppose qu'il existe deux réels A, B vérifiant $0 \leq A < B$ tels que f soit majorée sur $[A, B]$.

(i) Montrer que sur $[0, B - A]$, f est minorée de borne inférieure strictement positive.

(ii) Montrer que f est continue à droite de 0.

8-Enoncer le résultat démontré.

Université de Provence, Licence premiére année Année 2006-2007

Correction du DM Analyse L1

Exercice 1
1.1
– $f : I \to I$ donc $f(1) \leq 1$ donc $1 \in A$ et par suite $A \neq \emptyset$
1.2
– Soit $x \in A$, on a donc $f(x) \leq x$. Par croissance de la fonction f on en déduit que $f[f(x)] \leq f(x)$. ie : $f(x) \in A$.
1.3
– A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée par 0 donc A admet une borne inf. Notons $a = \inf A$.

1.4
– Supposons $f(a) < a$, alors par croissance de f on a :$f[f(a)] \leq f(a)$. ie : $f(a) \in A$ avec $f(a) < a$, ce qui est absurde puisque a est la borne inf de A. Donc $a \leq f(a)$.
– Supposons que $a < f(a)$. Par définition de la borne inf on a :

$$\forall x \in A, \quad a \leq x,$$

donc

$$\forall x \in A, \quad f(a) \leq f(x),$$

or $f(x) \leq x$ car $x \in A$, donc

$$\forall x \in A, \quad f(a) \leq x.$$

Donc $f(a)$ est un minorant de A, supérieur à $a = \inf A$, absurde.
– Conclusion : $f(a) = a$.
– On a ainsi montré que tout application croissante de $[0, 1]$ dans lui même admet un point fixe.
Exercice 2
Soit $\epsilon > 0$, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\epsilon \leq 10^{-N}$. Posons :

$$x_\epsilon = \frac{E[10^N x]}{10^N},$$

où $E[.]$ désigne la partie entière. Par définition de la partie entière on a :

$$E[10^N x] \leq 10^N x < E[10^N x] + 1.$$

ie :

$$0 \leq x - x_\epsilon < 10^{-N} \leq \epsilon,$$

Ainsi, x_ϵ répond à la question.
Exercice 3
3.1a
Traduisons l'hypothèse : $\lim_{n->+\infty} u_n = +\infty$.

$$\forall M > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq M) \tag{1}$$

Soit $M > 0$ et N_0 le rang associé dans (1). On a pour tout $n \geq N_0$:

$$\frac{1}{n}(u_0 + u_1 + ... + u_{N_0-1} + u_{N_0} + ... + u_n) \geq \frac{n_0 - 1}{n} \min_{1 \leq k \leq N_0 - 1} u_k \ + \ (\frac{n - N_0}{n})M.$$

-Le premier terme du membre de droite tend vers 0 quand n tend vers l'infini donc est plus grand par exemple que -1 à partir d'un certain rang.

- Le deuxième terme tend vers M donc est plus grand que $M/2$ à partir d'un certain rang.

Finalement, il existe un $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N_1$, on ait :

$$v_n \geq M/2 - 1.$$

D'où $\lim_{n->+\infty} v_n = +\infty$.

3.1b

- 1 er cas $l = +\infty$. Par croissance de u on a pour tout $k \leq n, \quad u_k \leq u_n$. D'où $v_n \leq u_n$. Par suite $\lim_{n->+\infty} v_n = +\infty$ implique $\lim_{n->+\infty} u_n = +\infty$

- 2 er cas $l < +\infty$. Toujours par croissance de u et en décomposant v on a :

$$\begin{aligned} v_{2n} &\geq \frac{u_1 + ...u_n + u_{n+1} + ...u_{2n}}{2n} & (2) \\ &\geq \frac{v_n}{2} + \frac{u_n}{2} & (3) \end{aligned}$$

  v converge vers $l < \infty$ donc le membre de gauche et le premier terme du membre de droite sont bornés. Par suite u est majorée, or u est croissante donc u converge vers l'. Par ce qui précéde necessairement $l' = l$.

3.2a

On a par hypothèse :

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \epsilon) \tag{4}$$

Soit $\epsilon > 0$ et N_2 le rang associé dans (4)

$$\begin{aligned} |v_n - l| &= |\frac{\sum_{k=1...n} \lambda_k (u_k - l)}{\sum_{k=1...n} \lambda_k}| & (5) \\ &\leq \frac{\sum_{k=1...N_2-1} \lambda_k |u_k - l|}{\sum_{k=1...n} \lambda_k} + \frac{\sum_{k=N_2...n} \lambda_k |u_k - l|}{\sum_{k=1...n} \lambda_k}. & (6) \end{aligned}$$

-Le premier terme tend vers 0 car $\lim_{n->+\infty} \sum_{k=1...n} \lambda_k = +\infty$.
-Le deuxième terme est plus petit que ϵ car chaque terme dans la somme est plus petit que ϵ.
Ainsi, il existe un rang N_2 tel que pour $n \geq N_2$ on ait : $|v_n - l| \leq \epsilon$. cqfd.

3.2b

Prenons pour tout n, $\lambda_n = 1$ et $u_n = n^{1/n}$. On a $\lim_{n->+\infty} u_n = 1$ (passer à la forme exponentielle). D'où, par ce qui précéde, on déduit que $\lim_{n->+\infty} v_n = 1$.

3.2c

Prenons encore pour tout n, $\lambda_n = 1$ et $u_n = x_{n+1} - x_n$. $\lim_{n->+\infty} u_n = l$, d'où $\lim_{n->+\infty} v_n = l$. Or un petit calcul donne que $v_n = \frac{\sum_{k=1...n} u_k}{n} = \frac{x_{n+1} - x_0}{n}$. De $\lim_{n->+\infty} x_0/n = 0$, on déduit que $\lim_{n->+\infty} x_n/n = l$.

Exercice 4

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ et vérifiant l'équation fonctionnelle

$$\forall x, y \in R^+ : f(x+y) = f(x)f(y). \tag{7}$$

4.1
$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(2x) = (f(x))^2 \geq 0.$
4.2

$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) = f(x+0) = f(0)f(x) = 0.$
Dans ce qui suit on suppose que f n'est pas identiquement nulle.
4.3

On a $f(0+0) = f(0)^2$. Les seules solutions de cette équation sont $f(0 = 0$ ou $f(0) = 1$. La première des solutions conduit à f identiquement nulle, donc $f(0) = 1$.
4.4
- Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $f(nx)$ et $f(\frac{x}{n})$ en fonction de $f(x)$ et n.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ la propriété P_n suivante : $f(nx) = (f(x))^n$
   P_1 est vraie. Supposons P_n . De l'équation fonctionnelle, on déduit que $f((n+1)x) = f(nx)f(x)$, et de P_n on déduit que : $f((n+1)x) = (f(x))^{(n+1)}$, c'est-à-dire que P_{n+1} est vraie et donc P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a $f(x) = f(n\frac{x}{n}) = f(\frac{x}{n})^n$. Donc $f(\frac{x}{n}) = \sqrt[n]{f(x)}$.

4.5
On a : $f(qrx) = f(rx)^q = f(px) = f(x)^p$. D'où $f(rx) = f(x)^r$.
4.6
- *Dans cette question on suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $f(\alpha) = 0$.*
Soit $x_n = \frac{\alpha}{n+1}$. On a bien $x_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et de ce qui précède on déduit que : $f(x_n) = f(\alpha)^{\frac{1}{n+1}} = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
Soit $x > 0$. Par définition de la limite :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que : } n \geq N_\varepsilon \Rightarrow\ \ |x_n| < \varepsilon.$$

En particulier pour $\varepsilon = x > 0$ il existe $N_x \in \mathbb{N}$ tel que $x_{N_x} < x$. Posons $y_{N_x} = x - x_{N_x}$. On aura $y_{N_x} > 0$ et donc

$$f(x) = f(x_{N_x} + y_{N_x}) = f(x_{N_x})f(y_{N_x}) = 0!$$

Dans ce qui suit on suppose que f est à valeurs strictement positives.
4.7
Si $x \in \mathbb{Q}^*$, on a montré que $f(x) = f(1)^x = e^{x \ln f(1)}$. Posons $a = \ln f(1)$. Soit $x > 0$ quelconque, il existe une suite $(x_n) \subset \mathbb{Q}^*$ telle que $x_n \searrow x$, par continuité à droite de x on obtient

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} e^{ax_n} = e^{ax},$$

puisque la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.
4.8
Soit $x > 0$, on va montrer que f est continue à droite de x. Soit $(x_n) \subset \mathbb{R}^+$ telle que $x_n \searrow x$. Il faut montrer que $f(x_n) \to_{n\to+\infty} f(x)$. Posons $y_n = x_n - x$. Comme $x_n \searrow x$, $y_n \geq 0$ et $y_n \searrow 0$. Par continuité à droite de 0, on a $\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = f(0)$ et $f(x_n) = f(y_n + x) = f(y_n)f(x) \to f(0)f(x)$. Mais, comme f est à valeurs strictement positives, de la question 2 on a $f(0) = 1$. Donc $f(x_n) \to_{n\to+\infty} f(x)$.
4.9
-On suppose qu'il existe deux réels A, B vérifiant $0 \leq A < B$ tels que f soit majorée sur $[A, B]$.
(i)

Appelons M un majorant de f sur $[A, B]$. Comme f est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, $M > 0$ et f est minorée par 0 sur $[0, B - A]$. Il reste à montrer que la borne inf est strictement positive.

Pour tout $x \in [0, B - A]$, on a $B = B - x + x$ et

$$f(B) = f(B - x)f(x).$$

Mais si $x \in [0, B - A]$ alors $B - x \in [A, B]$ et donc $f(B - x) \leq M$ et donc $f(x) \geq \frac{f(B)}{M} > 0$. On a aussi $A + x \in [A, B]$ et donc

$$f(A + x) = f(A)f(x),$$

et donc

$$f(x) \leq \frac{M}{f(A)}.$$

Donc il existe $\alpha, \beta > 0$ tel que $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ pour tout $x \in [0, B - A]$.

(ii)

On a montré que $f(0) = 1$. On va montrer que $f(x) \rightarrow_{x \rightarrow 0^+} 1$. Soit $x \in [0, \frac{B-A}{n}]$ alors $nx \in [0, B - A]$

$$\alpha \leq f(nx) \leq \beta \Rightarrow \alpha \leq f(x)^n \leq \beta \Rightarrow \alpha^{\frac{1}{n}} \leq f(x) \leq \beta^{\frac{1}{n}}.$$

Mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta^{\frac{1}{n}} = 1$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \max\{\left|\beta^{\frac{1}{n}} - 1\right|, \left|\alpha^{\frac{1}{n}} - 1\right|\} \leq \varepsilon$. Donc il existe $\delta_\varepsilon = \frac{B-A}{N_\varepsilon} > 0$ tel que

$$0 \leq x \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - 1| \leq \varepsilon.$$

Ce qui prouve la continuité à droite de 0.

4.10

Si une fonction f de R^+ dans $\mathbb{R}^{+*}$ vérifie l'équation fonctionnelle (7) et si elle est majorée sur un intervalle de longueur strictement positive, alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = e^{ax}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

Université de Marseille, mars 2007
Licence de Mathématiques, 1ere année
Analyse, 2eme semestre, dm2. A rendre la semaine 9-13 avril

Exercice 1 (Exercice de rédaction...)

Soit φ une application de $]0,\infty[$ dans $\mathbb{R}$, dérivable (en tout point de $]0,\infty[$) et t.q. $\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=0$.

1. On suppose que $\varphi'(x)\le 0$ pour tout $x>0$. Montrer que $\varphi(x)\ge 0$ pour tout $x>0$.
2. On suppose que $\varphi'(x)<0$ pour tout $x>0$. Montrer que $\varphi(x)>0$ pour tout $x>0$.

Exercice 2 (Etude d'une fonction)

Soit $a>0$. On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$f(x)=(1+\tfrac{a}{|x|})^x,\ \text{si } x\neq 0,$$
$$f(0)=1.$$

(On rappelle que $b^x=e^{x\ln b}$, pour $b>0$ et $x\in\mathbb{R}$.)

1. (Continuité de f)
   (a) Montrer que $e^z\ge 1+\dfrac{z^2}{2}$ pour tout $z\in\mathbb{R}_+$.
   En déduire que $\ln(1+y)\le\sqrt{2y}$, pour tout $y\in\mathbb{R}_+$.
   (b) En utilisant la question précédente, montrer que $1\le f(x)\le e^{\sqrt{2ax}}$, pour tout $x\in]0,\infty[$.
   (c) Montrer que $\lim_{x\to 0,x>0}f(x)=1$.
   (d) Montrer que f est continue en 0. [On pourra remarquer que $f(x)f(-x)=1$, pour tout $x\in\mathbb{R}$.]
2. (Dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^\star$) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\star$ et que $f'(x)>0$ pour tout $x\neq 0$. [Pour $x>0$, on pourra mettre $f'(x)$ sour la forme $f(x)\varphi(x)$ et utiliser l'exercice 1.] Montrer que f est strictement croissante.
3. (Dérivabilité en 0 ?) Montrer que $\lim_{x\to 0,x\neq 0}f'(x)=+\infty$. L'application f est-elle dérivable en 0 ? (Justifier la réponse...)
4. (Limites en $\pm\infty$) Donner (en fonction de a) les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de f.

   Dans la suite, on note l et m ces limites.
5. (Fonction réciproque) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]m,l[$. On note g la fonction réciproque de f (de sorte que g est une application de $]m,l[$ dans $\mathbb{R}$). Montrer que g est dérivable en 1 (noter que $1\in]m,l[$) et calculer $g'(1)$. [Pour $h\neq 0$, on pourra appliquer le théorème des Accoissements Finis à la fonction f entre les points $g(1+h)$ et $g(1)$.]
6. (Régularité de la fonction réciproque) Montrer que la fonction réciproque de f est de classe C^1 sur $]m,l[$ mais que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Université de Marseille, mars 2007
Licence de Mathématiques 1ère année
Analyse, 2ème semestre, dm2. Corrigé

Exercice 1

1. On suppose qu'il existe $x_0 \in R \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que $\varphi(x_0) < 0$. On a $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$, donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que : $\forall x \geq R, \varphi(x) \geq -\varepsilon$.

   En particulier, pour $\varepsilon = -\frac{\varphi(x_0)}{2}$, il existe $R > x_0$ tel que $\varphi(R) > \varphi(x_0)$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x_0, R[$ tel que : $\varphi(x_0) - \varphi(R) = \varphi'(c)(x_0 - R)$. En particulier, $\varphi'(c) > 0$, ce qui contredit l'hypothèse : $\forall x \in]0, +\infty[, \varphi'(x) \leq 0$.
2. D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\varphi(x) \geq 0$. Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que $\varphi(x_0) = 0$. Alors φ admet un minimum en x_0, donc $\varphi'(x_0) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse : $\forall x \in]0, +\infty[, \varphi'(x) < 0$.

Exercice 2

Soit $a > 0$. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} (1 + \frac{a}{|x|})^x, \text{ si } x \neq 0, \\ 1 \text{ si } x = 0. \end{cases}$

1. (a) On définit la fonction g infiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+$ par $g(z) = e^z - 1 - \frac{z^2}{2}$. Alors pour tout $z \in \mathbb{R}_+$, $g'(z) = e^z - z$, $g"(z) = e^z - 1 \geq 0$. Donc g' est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et $g'(0) = 1$, donc $g'(z) \geq 1$ pour tout $z \geq 0$, et g est strictement croissante. Comme $g(0) = 0$, on a $g(z) \geq 0$ pour tout $z \geq 0$.

   Soit $y \in \mathbb{R}_+$, on a d'après ce qui précède : $e^{\sqrt{2y}} \geq 1 + y$. La fonction $s \mapsto \ln(s)$ étant croissante, on a : $\sqrt{2y} \geq \ln(1 + y)$.

   (b) Pour tout $x > 0$, on a $\frac{a}{x} > 0$, donc, par croissance de ln, on a : $\ln(1) \leq \ln(1+\frac{a}{x}) \leq \sqrt{\frac{2a}{x}}$. En multipliant par $x > 0$, on obtient : $0 \leq x\ln(1 + \frac{a}{x}) \leq \sqrt{2ax}$, puis en utilisant la croissance de $t \mapsto e^t$, on obtient : $1 \leq f(x) \leq e^{\sqrt{2ax}}$, pour tout $x > 0$.

   (c) On a $\lim_{x\to 0, x>0} \sqrt{2ax} = 0$, alors, par continuité de la fonction $t \mapsto e^t$, on a : $lim_{x\to 0, x>0}\ e^{\sqrt{2ax}} = 1$. En utilisant le théorème des gendarmes sur l'inégalité obtenue à la question précédente, on obtient $lim_{x\to 0, x>0}\ f(x) = 1$.

   (d) Soit $x \neq 0$. $f(-x)f(x) = (1 + \frac{a}{|x|})^{-x}(1 + \frac{a}{|x|})^x = (1 + \frac{a}{|x|})^0 = 1$.

   Pour tout $x < 0$, $f(x) = \frac{1}{f(-x)}$. Or $\lim_{x\to 0, x<0} \frac{1}{f(-x)} = \lim_{x\to 0, x>0} \frac{1}{f(x)} = 1$ d'après la question précédente. Donc les limites à gauche et à droite en 0 sont égales à $f(0)$, et f est continue en 0.
2. On a $f(x) = e^{x\ln(1+\frac{a}{|x|})}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$. La fonction $x \mapsto 1 + \frac{a}{|x|}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^\star$ à valeurs dans $]1, +\infty[$, la fonction ln est infiniment dérivable sur $]1, +\infty[$, donc la fonction $x \mapsto x\ln(1 + \frac{a}{|x|})$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^\star$ comme produit et composée de fonctions de classe C^∞. La fonction $t \mapsto e^t$ étant elle même de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, f est donc infiniment dérivable sur $\mathbb{R}^\star$, donc f est en particulier de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\star$.

   Soit $x > 0$. Posons $g(x) = x\ln(1 + \frac{a}{x})$. g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^\star$ comme composée de fonctions de classe C^1. En utilisant la formule qui donne la dérivée d'une fonction composée, on a : $f'(x) = g'(x)e^{g(x)} = g'(x)f(x)$. En utilisant une nouvelle fois la formule de dérivation d'une fonction composée, on a $g'(x) = -\frac{a}{x+a} + \ln(1+\frac{a}{x})$.

On a $\lim_{x\to\infty} g'(x) = 0$, et $g"(x) = \frac{a}{(x+a)^2} - \frac{a}{x^2}\cdot\frac{x}{x+a} = a\left(\frac{1}{(x+a)^2} - \frac{1}{x(x+a)}\right)$. Or, comme $a > 0$, $x + a > x$ et $\frac{1}{(x+a)^2} < \frac{1}{x(x+a)}$, ce qui implique $g"(x) < 0$ pour tout $x > 0$. En utilisant l'exercice 1 avec g' à la place de φ, on en déduit que $g'(x) > 0$ pour tout x dans $]0, +\infty[$. Comme $f'(x) = g'(x)e^{g(x)} > 0$, on en déduit que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, et en particulier que $f(x) > 1$ sur $]0, +\infty[$.

Soit $x < 0$, on a $f(x) = \frac{1}{f(-x)}$, donc en dérivant : $f'(x) = \frac{f'(-x)}{(f(-x))^2} > 0$. f est donc strictement croissante sur $]-\infty, 0[$, et pour tout $x < 0$, $f(x) < 1$. On en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $x > 0$. On a $f'(x) = g'(x)f(x)$, avec $g'(x) = -\frac{a}{x+a} + \ln(1+\frac{a}{x})$. Comme $a > 0$, $\lim_{x\to 0, x>0} \ \frac{a}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x\to 0, x>0} \ g'(x) = +\infty$. On a vu à la question (1c) que $\lim_{x\to 0, x>0} \ f(x) = 1$, donc $\lim_{x\to 0, x>0} \ f'(x) = +\infty$.

   Soit $x < 0$. On a alors $f'(x) = \frac{f'(-x)}{(f(-x))^2} > 0$, et $\lim_{x\to 0, x<0} \ f'(x) = +\infty$. Les limites à gauche et à droite coincident donc $\lim_{x\to 0} \ f'(x) = +\infty$.

   Soit $h > 0$. La fonction f est continue sur $[0, h]$, dérivable sur $]0, h[$, donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_h \in]0, h[$ tel que $\frac{f(h)-f(0)}{h} = f'(c_h)$. On vérifie que $\lim_{h\to 0} \ c_h = 0$, donc d'après ce qui précède, $\lim_{h\to 0} \ \frac{f(h)-f(0)}{h} = +\infty$, donc f n'est pas dérivable en 0.

4. On repart de l'écriture de $f(x) = e^{x\ln(1+\frac{a}{|x|})}$. On a $\ln(1+\frac{a}{|x|}) = \frac{a}{|x|} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ quand x tend vers $\pm\infty$, c'est à dire quand $\frac{a}{|x|}$ tend vers 0. On a donc $x\ln(1+\frac{a}{|x|}) = \pm a + o(1)$ quand x tend vers $\pm\infty$. Par continuité de la fonction $t \mapsto e^t$, on a donc : $\lim_{+\infty} f(x) = e^a$ et $\lim_{-\infty} f(x) = e^{-a}$.

5. Montrons que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]e^{-a}, e^a[$:
   - <u>*injectivité :*</u> La fonction f étant strictement croissante, pour tous réels x, y, $x > y$ implique $f(x) > f(y)$, donc $f(x) \le f(y)$ implique $x \le y$. De même, $f(x) \ge f(y)$ implique $x \ge y$. Donc $f(x) = f(y)$ implique $x = y$ et f est injective.
   - <u>*surjectivité :*</u> Soit $y \in]e^{-a}, e^a[$. Comme $\lim_{x\to-\infty} f(x) = e^{-a} < y$, il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) < y$. De même, il existe un réel x_1 tel que $f(x_1) > y$. La fonction f étant continue sur l'intervalle $[x_0, x_1] \ni y$, il existe x dans $]x_0, x_1[\subset \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

   On note g (différente de celle introduite à la question 2) la fonction réciproque de f définie sur $]e^{-a}, e^a[\ni 1$. Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$, et $f'(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$, on a g dérivable sur $f(\mathbb{R}^\star) = \{f(x), x \in \mathbb{R}^\star\} =]e^{-a}, 1[\cup]1, e^a[$.

   Soit $h > 0$ suffisamment petit. La fonction g est continue sur $[1, 1+h]$, dérivable sur $]1, 1+h[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe d_h dans $]1, 1+h[$ tel que $\frac{g(1+h)-g(1)}{h} = g'(d_h) = \frac{1}{f'(g(d_h))}$. Lorsque h tend vers 0, d_h tend vers 1, $g(d_h)$ tend vers 0, $f'(g(d_h))$ tend vers $+\infty$, et $\frac{g(1+h)-g(1)}{h}$ tend vers 0.

   La même démonstration reste vraie avec $h < 0$ en inversant le sens des intervalles. On en déduit que g est dérivable en 1 et $g'(1) = 0$.

6. La fonction f n'est clairement pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, car elle n'est pas dérivable en 0. Comme g est de classe C^1 sur $]e^{-a}, e^a[\setminus\{1\}$, et dérivable en 1, il suffit de montrer que g' est continue en 1 pour montrer que g est de classe C^1 sur $]e^{-a}, e^a[$.
Soit $x \neq 1$. $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$. Quand x tend vers 1, $g(x)$ tend vers 0 par continuité de g, $f'(g(x))$ tend vers $+\infty$, et $g'(x)$ tend vers 0. Donc on a bien $\lim_{x\to 1} g'(x) = 0 = g'(1)$.

Université de Marseille, mars 2007
Licence de Mathématiques, 1ere année
Analyse, 2eme semestre, partiel

Exercice 1 (Borne supérieure d'une fonction)

On définit la fonction f de $]0,\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{x}\cos(x)$ pour $x \in]0,\infty[$. On pose $A = \{f(x), x \in]0,\infty[\}$.

1. Calculer les limites de f en 0 et $+\infty$.

corrigé

$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

---

2. Montrer que la fonction f n'est pas minorée (i.e. la partie A n'est pas minorée).

corrigé

La fonction f n'est pas minorée car $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

---

3. (a) Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < \beta$, t.q., pour tout $x \in]0,\infty[$, $f(x) \le \sup B$ avec $B = \{f(y); y \in [\alpha,\beta]\}$.

corrigé

On prend $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $\beta = \pi$. La fonction f est continue sur $[\alpha,\beta]$ qui est un intervalle fermé borné. La fonction f est donc bornée sur $[\alpha,\beta]$ et atteint ses bornes. il existe donc $c \in [\alpha,\beta]$ t.q. $f(c) = \sup B$ (et donc, pour tout $x \in [\alpha,\beta]$, $f(c) \ge f(x)$).

On a, en particulier, $f(c) \ge f(\beta) = f(\pi) = \frac{1}{\pi}$.
Pour $x \in]0,\frac{\pi}{2}[$, on a $f(x) \le 0 < \frac{1}{\pi} \le f(c)$.
Pour $x > \pi$, on a $f(x) \le |f(x)| \le \frac{1}{x} < \frac{1}{\pi} \le f(c)$.
On a donc bien, pour tout $x \in]0,\infty[$, $f(x) \le f(c) = \sup B$ (ce qui donne $\sup A = \sup B$).

(b) En déduire que la fonction f est majorée (i.e. la partie A est majorée) et que la borne supérieure de f est atteinte.

corrigé

La démonstration précédente donne que $f(c) = \sup A$. La fonction f est donc majorée (i.e. la partie A est majorée) et la borne supérieure de f est atteinte.

Soit $a \in]0,\infty[$ t.q. $f(a) = \sup A$ (c'est-à-dire $f(a) \ge f(x)$ pour tout $x \in]0,\infty[$).

4. Montrer que $f(a) > 0$ et que $a < 2\pi$.

corrigé

On a, en particulier, $f(a) \ge f(\pi) = \frac{1}{\pi} > 0$.

La démonstration de la question 3(a) donne que $a \in [\frac{\pi}{2},\pi]$ (car $f(x) < \sup B$ si $x \notin [\frac{\pi}{2},\pi]$ et $f(a) = \sup B$). On a donc $a \le \pi < 2\pi$. Mais on peut aussi démontrer que $a < 2\pi$ en utilisant la périodicité de la fonction $x \mapsto \cos(x)$. En effet, on remarque que d'abord que $f(2\pi) < 0$, donc $a \ne 2\pi$. Puis, si $a > 2\pi$, on a $f(a-2\pi) = \frac{-\cos(a)}{a-2\pi} > \frac{-\cos(a)}{a}$ car $\cos(a) > 0$. On en déduit $f(a-2\pi) > f(a)$, en contradiction avec la définition de a. On a donc bien montré que $a < 2\pi$.

---

5. Montrer que $\frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{2}$ et que $f'(a) = 0$.

corrigé

On sait déjà que $a \in]0, 2\pi[$. Comme $f(a) > 0$ et que $f(x) \leq 0$ si $x \in]0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$, on en déduit que $a \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

Le fait que $f'(a) = 0$ a été vu en cours (il suffit de remarquer que $f(a + h) - f(a) \leq 0$ pour tout $h \neq 0$ t.q. $a + h > 0$ et d'utiliser la définition de $f'(a)$).

---

6. Pour $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, on pose $g(x) = x \sin(x) + \cos(x)$. Montrer qu'il existe un unique $b \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ t.q. $g(b) = 0$. Montrer que $b \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$. Montrer que $a = b$ et en déduire que f atteint son maximum en un unique point.

corrigé

Pour $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, on a $g'(x) = x \cos(x) < 0$. La fonction g est donc continue et strictement décroissante (ceci a été vu en cours) sur $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Comme $g(\frac{\pi}{2}) > 0$ et $g(\frac{3\pi}{2}) < 0$, il existe un unique $b \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ t.q. $g(b) = 0$ (l'existence de b découle du théorème des valeurs intermédiaires et l'unicité de b découle de la stricte décroissance de g).

Comme $g(\pi) < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires (appliqué avec l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \pi]$) permet de dire que cet unique b appartient à l'intervalle $]\frac{\pi}{2}, \pi[$.

Comme $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, pour tout $x \in]0, \infty[$, et comme l'on sait que $a \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ et $f'(a) = 0$, on a nécessairement $a = b$. Ceci prouve que b est l'unique point de $]0, \infty[$ pour lequel f atteint son maximum.

Exercice 2 (Valeur intermédiaire)

Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Soit f une fonction continue de $[0, \alpha[$ dans $\mathbb{R}$, t.q. $f(0) < 0$ et $\lim_{x \to \alpha, x < \alpha} f(x) = +\infty$.

Soit g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, t.q. $g(0) < 0$ et $g(\beta) > 0$.

Montrer qu'il existe $x \in]0, \min(\alpha, \beta)[$ t.q. $f(x)(x - \beta) - g(x) = 0$. [On pourra distinguer les cas $\beta < \alpha$, $\beta > \alpha$ et $\beta = \alpha$.]

corrigé

Pour $x \in [0, \alpha[$, on pose $\varphi(x) = f(x)(x - \beta) - g(x)$. La fonction φ est donc continue sur $[0, \alpha[$.

Cas $\beta < \alpha$**.** Dans ce cas, la fonction φ est continue sur $[0, \beta]$. On remarque que $\varphi(0) > 0$ et $\varphi(\beta) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne donc l'existence de $x \in]0, \beta[$ t.q. $\varphi(x) = 0$.

Cas $\beta > \alpha$**.** Dans ce cas, on a $\lim_{x \to \alpha, x < \alpha} \varphi(x) = -\infty$. Il existe donc, par exemple, $\eta > 0$ t.q. :

$$x \in [0, \alpha[,\ x \geq \alpha - \eta \Rightarrow \varphi(x) < 0.$$

On en déduit l'existence de $\gamma \in]0, \alpha[$ t.q. $\varphi(\gamma) < 0$. Comme $\varphi(0) > 0$, le théorème des valeurs intermédiaires donne donc l'existence de $x \in]0, \gamma[\subset]0, \alpha[$ t.q. $\varphi(x) = 0$.

Cas $\beta = \alpha$**.** On modifie légèrement le raisonnement précédent. Comme $\lim_{x \to \alpha, x < \alpha} f(x) = +\infty$. Il existe $\eta > 0$ t.q. :

$$x \in [0, \alpha[,\ x \geq \alpha - \eta \Rightarrow f(x) > 0.$$

Comme $x - \beta < 0$ si $x < \alpha = \beta$, on a donc

$$x \in [0, \alpha[,\ x \geq \alpha - \eta \Rightarrow \varphi(x) < 0.$$

On conclut alors comme dans le cas précédent.

Exercice 3 (TAF. . .)

Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable pour tout $x \neq 0$ et que $\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$.

1. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

corrigé

Pour tout $h \neq 0$, le théorème des accroissements finis donne l'existence de $c_h \in]\min(0,h), \max(0,h)[$ t.q. :

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(c_h).$$

Comme $\lim_{h\to 0} c_h = 0$, on en déduit que $\lim_{h\to 0} f'(c_h) = +\infty$ et donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = +\infty.$$

Ceci montre que f n'est pas dérivable en 0.

---

2. On suppose maintenant que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, strictement croissante et que $f(0) = 0$. On note g la fonction réciproque de f [l'existence de la function g a été vue en cours]. Montrer que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = 0$.

corrigé

On reprend ici la démonstration faite en cours pour montrer la dérivabilité d'une fonction réciproque.

Soit $h \neq 0$. Comme $f \circ g(h) = h$, $f(0) = 0$ et $g(0) = 0$, on a :

$$\frac{g(h) - g(0)}{h} = \frac{g(h)}{f(g(h)) - f(0)}.$$

Le théorème des accroissements finis donne alors l'existence de $d_h \in]\min(0, g(h)), \max(0, g(h))[$ t.q. $f(g(h)) - f(0) = g(h) f'(d_h)$. On a donc :

$$\frac{g(h) - g(0)}{h} = \frac{1}{f'(d_h)}.$$

Comme g est continue (ceci a été vu en cours). On a $\lim_{h\to 0} g(h) = 0$ et donc $\lim_{h\to 0} d_h = 0$, ce qui donne $\lim_{h\to 0} f'(d_h) = +\infty$ et finalement :

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = 0.$$

Ceci prouve bien que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = 0$.

Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 1ere année
Analyse, 2eme semestre, examen du 7 mai 2007

Notes de cours et de td autorisées.

Exercice 1 (Etude d'une fonction)

On définit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + \dfrac{\cos(x)}{x^2+1}$.

1. Montrer que f est dérivable et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que f est strictement croissante.
3. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

   Dans la suite, on note g la fonction réciproque de f (la fonction g est donc aussi une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
4. Montrer que f admet un développement limité d'ordre 2 en 0 et donner ce développement. Donner l'équation de la tangente (à la courbe de f) en 0 et la position locale de la courbe de f par rapport à cette tangente.
5. Montrer que g admet un développement limité d'ordre 2 en 1 et donner ce développement.
6. Donner les asymptotes de f en $\pm\infty$.
7. montrer que $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ et donner les asymptotes de g en $\pm\infty$.

Exercice 2 (Points fixes de f, si $f \circ f = f$)
Soit $-\infty < a < b < +\infty$ et f une fonction continue de $[a,b]$ dans $[a,b]$. On rappelle que $x \in [a,b]$ est un point fixe de f si $f(x) = x$.

1. Montrer que f admet au moins un point fixe. [On pourra considérer la fonction g définie sur $[a,b]$ par $g(x) = f(x) - x$.]

   On suppose dans la suite que $f \circ f = f$. On pose $\mathrm{Im}(f) = \{f(x),\, x \in [a,b]\}$.
2. Montrer que tout élément de $\mathrm{Im}(f)$ est un point fixe de f.
3. On suppose, dans cette question, que f admet un seul point fixe. Montrer que f est constante.

   On suppose dans la suite que f admet au moins 2 points fixes (disctints) et que f est dérivable (c'est-à-dire dérivable en tout point de $]a,b[$).
4. Montrer qu'il existe $m, M \in [a,b]$ t.q. $\mathrm{Im}(f) = [m,M]$ et $m < M$.
5. Montrer que $f'(x) = 1$ pour tout $x \in]m,M[$ (ici et dans la suite, m et M sont donnés par la question précédente).
6. On suppose, dans cette question, que $m > a$.
   (a) Montrer que $f'(m) = 1$.
   (b) Montrer qu'il existe $x \in]a,m[$ t.q. $f(x) < m$.
   (c) En déduire que l'hypothèse $m > a$ est en contradiction avec la définition de m.
7. Montrer que $m = a$, $M = b$ et $f(x) = x$ pour tout $x \in [a,b]$.
8. Montrer que le résultat de la question précédente peut être faux si on retire l'hypothèse "f dérivable". [On cherche donc f continue de $[a,b]$ dans $[a,b]$ t.q. $f \circ f = f$, f admet au moins deux points fixes distincts et il existe $x \in [a,b]$ t.q. $f(x) \neq x$.]

Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 1ere année
Analyse, 2eme semestre, examen du 15 juin 2007

Notes de cours et de td autorisées.

Exercice 1 (Etude d'une fonction)
Soit la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+\tan x)}{\sin x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue et dérivable en 0.
2. Donner le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.
3. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 et la position locale de la courbe de f par rapport à cette tangente.

Exercice 2 (Limite en $+\infty$)
Pour $x > 0$ on pose $f(x) = x^2(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}})$. Déterminer $\lim_{x\to\infty} f(x)$. [On pourra, sur une une fonction convenable, utiliser un développement limité ou le théorème des accroissements finis.]

Exercice 3 (Sur le TAF...)
Rappel (TAF) : Soit $-\infty < a < b < \infty$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors, pour tout $h \in]0, b-a[$, il existe $\theta \in]0,1[$ t.q. :

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a+\theta h). \tag{1}$$

1. Dans les quatre cas suivants, montrer que, pour tout $h \in]0, b-a[$, il existe un *unique* θ vérifiant (1) (les valeurs de a et b étant fixés). On note θ_h cette valeur de θ. Calculer θ_h (en fonction de a et h) et déterminer $\lim_{h\to 0, h>0} \theta_h$.
   (a) $0 < a < b < \infty$ et $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \in [a,b]$.
   (b) $0 < a < b < \infty$ et $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ pour $x \in [a,b]$.
   (c) $-\infty < a < b < \infty$ et $f(x) = e^x$ pour $x \in [a,b]$.
   (d) $-\infty < a < b < \infty$ et $f(x) = x^2 + x + 1$ pour $x \in [a,b]$.
2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est de classe C^2. Soit $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}^\star$ il existe $\theta \in]0,1[$ vérifiant (1) et donner un exemple de fonction f (et de valeurs de $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$) pour laquelle θ n'est pas unique.
   (b) On suppose que $f''(a) \neq 0$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^\star$, on choisit une valeur de $\theta \in]0,1[$ pour laquelle (1) est vérifiée. On note θ_h cette valeur de θ. Montrer que $\lim_{h\to 0, h>0} \theta_h = \frac{1}{2}$. [On pourra utiliser la formule de Taylor-Lagrange.]
3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable (en tout point de $\mathbb{R}$) et que, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$, (1) est vérifiée avec $\theta = \frac{1}{2}$.
   (a) Montrer que $f(a+h) - f(a-h) = 2hf'(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$.
   (b) Montrer que f est de classe C^∞. [On pourra, par exemple, utiliser (a) avec $h = 1$.]
   (c) Montrer que $f'''(a) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. En déduire qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ t.q. :

   $$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

   On suppose que (1) est, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$, vérifiée seulement pour $\theta = \frac{1}{2}$. Montrer que $\alpha \neq 0$.