Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 1ere année, 2007/8
Analyse, 2eme semestre, dm2 (examen de juin 2007)

Devoir à rendre (en TD) pendant la première semaine d'avril.

Exercice 1 (Etude d'une fonction)

Soit la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$ par

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+\tan x)}{\sin x} \text{ si } x\neq 0\\ 1 \text{ si } x=0.\end{cases}$$

1. Montrer que f est continue et dérivable en 0.

corrigé

On montre ci dessous continuité et dérivabilité de f en 0 en faisant un DL2 en 0 du numérateur et du dénominateur de la fraction définissant f (mais, bien sûr, d'autres preuves sont possibles).

Pour $x\in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$, on a $\tan x\in]-1,1[$ et $\tan x) = x+x^2\varepsilon_1(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x)=0$. Pour $u\in]-1,1[$, on a $\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+u^2\varepsilon_2(u)$ avec $\lim_{u\to 0}\varepsilon_2(u)=0$. On en déduit, pour $x\in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$:

$$\ln(1+\tan x)=x+x^2\varepsilon_1(x)-\frac{(x+x^2\varepsilon_1(x))^2}{2}+(x+x^2\varepsilon_1(x))^2\varepsilon_2(x+x^2\varepsilon_1(x)),$$

et donc :

$$\ln(1+\tan x)=x-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_3(x),\ \text{avec}\ \lim_{x\to 0}\varepsilon_3(x)=0.$$

Pour $x\in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$, on a $\sin x=x+x^2\varepsilon_4(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon_4(x)=0$, ce qui donne, pour $x\in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$, $x\neq 0$:

$$f(x)=\frac{x-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_3(x)}{x+x^2\varepsilon_4(x)}=\frac{1-\frac{x}{2}+x\varepsilon_3(x)}{1+x\varepsilon_4(x)}.$$

On en déduit que $\lim_{x\to 0}f(x)=1$ et donc que f est continue (car $f(0)=1$). Puis, pour $x\in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$, $x\neq 0$, on a :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)-1}{x}=\frac{-\frac{x}{2}+x\varepsilon_3(x)-x\varepsilon_4(x)}{x(1+x\varepsilon_4(x))}=\frac{-\frac{1}{2}+\varepsilon_3(x)-\varepsilon_4(x)}{1+x\varepsilon_4(x)}$$

On a donc $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\frac{1}{2}$. Ce qui prouve que f est dérivable en 0 et $f'(0)=-\frac{1}{2}$.

---

2. Donner le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.

corrigé

Pour avoir un DL2 de f en 0, il suffit de faire un DL3 en 0 du numérateur et du dénominateur de la fraction définissant f. On procède comme à la question précédente.

Pour $x\in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$, on a $\tan x=x+\frac{x^3}{3}+x^3\eta_1(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\eta_1(x)=0$. Pour $u\in]-1,1[$, on a $\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+u^3\eta_2(u)$ avec $\lim_{u\to 0}\eta_2(u)=0$. On en déduit, pour $x\in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$:

$$\ln(1+\tan x)=x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3\eta_3(x),\ \text{avec}\ \lim_{x\to 0}\eta_3(x)=0.$$

c'est-à-dire :

$$\ln(1+\tan x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+x^3\eta_3(x).$$

Pour $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, on a $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3\eta_4(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\eta_4(x) = 0$, ce qui donne, pour $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, $x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + x^3\eta_3(x)}{x - \frac{x^3}{6} + x^3\eta_4(x)} = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{2x^2}{3} + x^2\eta_3(x)}{1 - \frac{x^2}{6} + x^2\eta_4(x)}.$$

On utilise maintenant que, pour $u \neq 1$, $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u\eta_5(u)$, avec $\lim_{u\to 0}\eta_5(u) = 0$. On obtient, pour $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, $x \neq 0$:

$$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + x^2\eta_4(x)} = 1 + \frac{x^2}{6} + x^2\eta_6(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0}\eta_6(x) = 0.$$

Ce qui donne :

$$f(x) = (1 - \frac{x}{2} + \frac{2x^2}{3} + x^2\eta_3(x))(1 + \frac{x^2}{6} + x^2\eta_6(x)) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{5x^2}{6} + x^2\eta_7(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0}\eta_7(x) = 0.$$

On a ainsi obtenu le DL2 de f en 0.

---

3. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 et la position locale de la courbe de f par rapport à cette tangente.

corrigé

La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 a pour équation $g(x) = 1 - \frac{x}{2}$. La question précédente donne $f(x) - g(x) = \frac{5x^2}{6} + x^2\eta_7(x)$, avec $\lim_{x\to 0}\eta_7(x) = 0$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ t.q.

$$|x| \leq \varepsilon \Rightarrow |\eta_7(x)| \leq \frac{5}{6} \Rightarrow f(x) - g(x) \geq 0.$$

Ceci prouve que la courbe de f est, au voisinage de 0, au dessus de celle de g (qui est sa tangente en 0).

Exercice 2 (Limite en $+\infty$)

Pour $x > 0$ on pose $f(x) = x^2(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}})$. Déterminer $\lim_{x\to\infty} f(x)$. [On pourra, sur une une fonction convenable, utiliser un développement limité ou le théorème des accroissements finis.]

corrigé

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $y \mapsto e^y$ donne l'existence de $c \in]a, b[$ t.q. $e^b - e^a = (b-a)e^c$.

Pour tout $x > 0$, en prenant $a = \frac{1}{x+1}$ et $b = \frac{1}{x}$, il existe donc $c_x \in]\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x}[$ t.q. :

$$f(x) = x^2(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}) = x^2(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1})e^{c_x} = \frac{x^2}{x(x+1)}e^{c_x}.$$

On a $\lim_{x\to\infty} c_x = 0$ (car $c_x \in]\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x}[$ et donc $\lim_{x\to\infty} e^{c_x} = 1$.

On a aussi $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$. On en déduit que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.

Exercice 3 (Sur le TAF...)

Rappel (TAF) : Soit $-\infty < a < b < \infty$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors, pour tout $h \in]0, b-a[$, il existe $\theta \in]0, 1[$ t.q. :

$$f(a + h) - f(a) = hf'(a + \theta h). \tag{1}$$

1. Dans les quatre cas suivants, montrer que, pour tout $h \in]0, b-a[$, il existe un *unique* θ vérifiant (1) (les valeurs de a et b étant fixés). On note θ_h cette valeur de θ. Calculer θ_h (en fonction de a et h) et déterminer $\lim_{h\to 0, h>0} \theta_h$.

   (a) $0 < a < b < \infty$ et $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \in [a, b]$.

   corrigé

   Soit $\theta \in]0, 1[$ vérifiant (1) (l'existence d'au moins un θ est donnée par le TAF, on veut montrer ici son unicité et on cherche la limite de θ quand $h \to 0$, $h > 0$). La relation (1) donne :

$$\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} = hf'(a+\theta h) = \frac{-h}{(a+\theta h)^2},$$

   et donc $(a+\theta h)^2 = a(a+h)$, ce qui donne :

$$\theta = \frac{\sqrt{a(a+h)} - a}{h}.$$

   Ceci prouve bien l'unicité de θ. En posant, pour $y > -a$, $\varphi(y) = \sqrt{a(a+y)}$, on a aussi $\theta_h = \frac{\sqrt{a(a+h)}-a}{h} = \frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{h}$ et donc :

$$\lim_{h\to 0, h>0} \theta_h = \varphi'(0) = \frac{1}{2}.$$

   (b) $0 < a < b < \infty$ et $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ pour $x \in [a, b]$.

   corrigé

   Soit $\theta \in]0, 1[$ vérifiant (1). La relation (1) donne :

$$\frac{1}{\sqrt{a+h}} - \frac{1}{\sqrt{a}} = hf'(a+\theta h) = \frac{-h}{2(a+\theta h)^{\frac{3}{2}}}.$$

   On trouve donc ici

$$\theta = \frac{1}{h}\left[\left(\frac{h}{2}\frac{\sqrt{a}\sqrt{a+h}}{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}\right)^{\frac{2}{3}} - a\right].$$

   Ceci prouve bien l'unicité de θ.

   Pour trouver la limite quand h tend vers 0, avec $h > 0$, de θ_h, on peut utiliser des DL en a et la formule

$$\frac{1}{\sqrt{a+h}} - \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{-h}{2(a+\theta_h h)^{\frac{3}{2}}}. \tag{2}$$

   En effet, on a, en faisant un DL2 en a de $y \mapsto \frac{1}{\sqrt{y}}$ et un DL1 en a de $y \mapsto \frac{1}{y^{\frac{3}{2}}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{a+h}} - \frac{1}{\sqrt{a}} = -\frac{1}{2a^{\frac{3}{2}}}h + \frac{3}{8a^{\frac{5}{2}}}h^2 + h^2\varepsilon_1(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon_1(h) = 0,$$

$$\frac{1}{(a+\bar{h})^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2a^{\frac{5}{2}}}\bar{h} + \bar{h}\varepsilon_2(\bar{h}) \text{ avec } \lim_{\bar{h}\to 0}\varepsilon_2(\bar{h}) = 0,$$

   ce qui donne aussi, comme $\theta_h \in]0, 1[$,

$$\frac{1}{(a+\theta_h h)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2a^{\frac{5}{2}}}\theta_h h + h\varepsilon_3(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon_3(h) = 0.$$

En portant ces relations dans (2), on obtient :

$$-\frac{1}{2a^{\frac{3}{2}}}h + \frac{3}{8a^{\frac{5}{2}}}h^2 + h^2\varepsilon_1(h) = \frac{-h}{2}\left(\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2a^{\frac{5}{2}}}\theta_h h + h\varepsilon_3(h)\right),$$

ce qui donne, en divisant par h^2 :

$$\frac{3}{4a^{\frac{5}{2}}}(\frac{1}{2} - \theta_h) = -\varepsilon_1(h) - \frac{\varepsilon_3(h)}{2},$$

et donc $\lim_{h\to 0, h>0} \theta_h = \frac{1}{2}$. Cette question était plus difficile...

(c) $-\infty < a < b < \infty$ et $f(x) = e^x$ pour $x \in [a, b]$.

corrigé

Soit $\theta \in]0, 1[$ vérifant (1). La relation (1) donne :

$$e^a(e^h - 1) = e^{a+h} - e^a = hf'(a + \theta h) = he^{a+\theta h} = he^a e^{\theta h}.$$

On a donc $e^{\theta h} = \frac{e^h-1}{h}$, ce qui donne

$$\theta = \frac{1}{h}\ln(\frac{e^h - 1}{h}).$$

Ceci prouve bien l'unicité de θ. On utilise maintenant un DL2 de $y \mapsto e^y$ en 0 :

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon_1(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon_1(h) = 0,$$

et donc

$$\frac{e^h - 1}{h} = 1 + \frac{h}{2} + h\varepsilon_1(h).$$

Comme $\theta_h \in]0, 1[$, le DL1 de $y \mapsto e^y$ en 0 donne aussi

$$e^{\theta_h h} = 1 + \theta_h h + h\varepsilon_2(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon_2(h) = 0.$$

On a donc (comme $e^{\theta h} = \frac{e^h-1}{h}$) :

$$1 + \theta_h h + h\varepsilon_2(h) = 1 + \frac{h}{2} + h\varepsilon_1(h).$$

d'où :

$$\theta_h - \frac{1}{2} = \varepsilon_1(h) - \varepsilon_2(h).$$

On obtient, finalement, $\lim_{h\to 0, h>0} \theta_h = \frac{1}{2}$.

(d) $-\infty < a < b < \infty$ et $f(x) = x^2 + x + 1$ pour $x \in [a, b]$.

corrigé

Soit $\theta \in]0, 1[$ vérifant (1). La relation (1) donne :

$$(a + h)^2 + h - a^2 = hf'(a + \theta h) = 2h(a + \theta h) + h,$$

ce qui donne

$$h^2 = 2h^2\theta,$$

et donc $\theta = \frac{1}{2}$. Ceci donne l'unicité de θ et $\lim_{h\to 0, h>0} \theta_h = \frac{1}{2}$.

---

2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est de classe C^2. Soit $a \in \mathbb{R}$.

   (a) Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}^\star$ il existe $\theta \in]0,1[$ vérifiant (1) et donner un exemple de fonction f (et de valeurs de $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$) pour laquelle θ n'est pas unique.

   corrigé

   Si $h > 0$; on applique le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[a, a+h]$, il donne l'existence de $\theta \in]0,1[$ vérifiant (1). Si $h < 0$, on obtient le même résultat en appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[a+h, a]$.

   En prenant, par exemple, $f(x) = x$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$), on obtient un exemple pour lequel (1) est vraie pour tout $\theta \in]0,1[$ (et quelquesoit $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$).

   (b) On suppose que $f''(a) \neq 0$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^\star$, on choisit une valeur de $\theta \in]0,1[$ pour laquelle (1) est vérifiée. On note θ_h cette valeur de θ. Montrer que $\lim_{h\to 0, h>0} \theta_h = \frac{1}{2}$. [On pourra utiliser la formule de Taylor-Lagrange.]

   corrigé

   Soit $h \in \mathbb{R}^\star$. On appilque la formule de Taylor-Lagrange à la fonction f. On obtient l'existence de $\varphi_h \in]0,1[$ t.q. :

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + \frac{f''(a+\varphi_h h)}{2} h^2.$$

   En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction f', on obtient aussi l'existence de $\psi_h \in]0,1[$ t.q. :

$$f'(a+\theta_h h) = f'(a) + f''(a + \psi_h \theta_h h)\theta_h h.$$

   Comme $f(a+h) - f(a) = hf'(a+\theta_h h)$, on a donc $\frac{f''(a+\varphi_h h)}{2} = f''(a+\psi_h\theta_h h)\theta_h$. Comme $f''(a) \neq 0$ et f'' continue, il existe $\eta > 0$ t.q., pour tout $y \in [a-\eta, a+\eta$, $f''(y) \neq 0$. On peut écrire, pour $h \in [-\eta, \eta]$:

$$\theta_h = \frac{f''(a+\varphi_h h)}{2f''(a+\psi_h\theta_h h)}.$$

   La continuité de f'' et le fait que $f''(a) \neq 0$ permet alors d'en déduire que $\lim_{h\to 0, h>0} \theta_h = \frac{1}{2}$.

   ---

3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable (en tout point de $\mathbb{R}$) et que, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$, (1) est vérifiée avec $\theta = \frac{1}{2}$.

   (a) Montrer que $f(a+h) - f(a-h) = 2hf'(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$.

   corrigé

   Comme (1) est vraie avec $\theta = \frac{1}{2}$, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$, on peut l'appliquer (si $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$) avec $a-h$ et $2h$. on obtient

$$f(a-h+2h) - f(a-h) = 2hf'(a-h+\frac{1}{2}2h),$$

   ce qui donne bien $f(a+h) - f(a-h) = 2hf'(a)$.

   (b) Montrer que f est de classe C^∞. [On pourra, par exemple, utiliser (a) avec $h = 1$.]

   corrigé

   La question (a) donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$;

$$f'(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1)).$$

   On déduit de cette formule, par récurrence sur n que f est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. En effet, comme f est continue, la formule donne bien que f' est continue, donc f est de classe

C^1. Puis, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, si f est de classe C^n, la formule donne que f' est de classe C^n et donc f est de classe C^{n+1}.

On a bien montré ainsi, par récurrence, que f est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. c'est-à-dire que f est de classe C^∞.

(c) Montrer que $f'''(a) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. En déduire qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ t.q. :

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On suppose que (1) est, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$, vérifiée seulement pour $\theta = \frac{1}{2}$. Montrer que $\alpha \neq 0$.

corrigé

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$. Comme f est de classe C^3, la formule de Taylor-Lagrange donne l'existence de $\varphi_h, \psi_h \in]0,1[$ t.q. :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a+\varphi_h h)}{6}h^3,$$

$$f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(a-\psi_h h)}{6}h^3.$$

Comme $f(a+h) - f(a-h) = 2hf'(a)$, on en déduit :

$$f'''(a+\varphi_h h) + f'''(a-\psi_h h) = 0.$$

En faisant tendre h vers 0, ceci donne $f'''(a) = 0$.

La formule de Taylor-Lagrange (en 0, à l'ordre 3) donne alors l'existence de $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ t.q. :

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Si $\alpha = 0$, la formule (1) est vérifiée pour tout $\theta \in]0,1[$.Donc, si, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$, (1) est vérifiée seulement pour $\theta = \frac{1}{2}$, on a nécessairement $\alpha \neq 0$.
