

Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 1ère année, 2007/8
Analyse, 2ème semestre, dm 3 (examen de mai 2007)

Devoir à rendre (en TD) pendant la dernière semaine d'avril.

Exercice 1 (Etude d'une fonction)

On définit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + \frac{\cos(x)}{x^2 + 1}$.

1. Montrer que f est dérivable et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

—————**corrigé**—————

La fonction $x \mapsto \frac{\cos(x)}{x^2+1}$ est dérivable (et même de classe C^∞) car elle le quotient de deux fonctions dérivables (et de classe C^∞) et que la fonction au dénominateur ne s'annule pas. La fonction f est alors dérivable (et de classe C^∞) comme somme de fonctions dérivables (et de classe C^∞).

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on trouve $f'(x) = 3 - \frac{\sin(x)}{x^2+1} - \frac{2x \cos(x)}{(x^2+1)^2}$.

—————**corrigé**—————

2. Montrer que f est strictement croissante.

—————**corrigé**—————

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{|\sin(x)|}{x^2 + 1} \leq 1$$

et

$$\frac{2|x \cos(x)|}{(x^2 + 1)^2} \leq \frac{2|x|}{(x^2 + 1)} \leq 1$$

car $2|x| \leq x^2 + 1$. On en déduit $f'(x) \geq 3 - 1 - 1 = 1 > 0$. Ce qui prouve que f est strictement croissante.

3. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

—————**corrigé**—————

La fonction f est strictement croissante, c'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image, notée $\text{Im}(f)$. Pour montrer que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$, il suffit de remarquer que f est continue et que :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Dans la suite, on note g la fonction réciproque de f (la fonction g est donc aussi une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

4. Montrer que f admet un développement limité d'ordre 2 en 0 et donner ce développement.

—————**corrigé**—————

La fonction f est de classe C^2 , elle admet donc un développement limité d'ordre 2 en 0. Pour le trouver, on remarque que :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_1(x) \text{ et } \frac{1}{x^2 + 1} = 1 - x^2 + x^2 \varepsilon_2(x), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_i(x) = 0 \text{ pour } i = 1, 2.$$

On en déduit $f(x) = 1 + 3x - \frac{3}{2}x^2 + x^2 \varepsilon_3(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_3(x) = 0$.

Donner l'équation de la tangente (à la courbe de f) en 0 et la position locale de la courbe de f par rapport à cette tangente.

corrigé

La tangente (à la courbe de f) en 0 est $t(x) = 3x + 1$. On remarque que $f(x) - t(x) = \frac{\cos(x)}{x^2+1} - 1 \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La courbe de f est donc localement (et même globalement) en dessous de sa tangente en 0.

5. Montrer que g admet un développement limité d'ordre 2 en 1 et donner ce développement.

corrigé

La fonction f est de classe C^∞ et f' ne s'annule pas, on en déduit que la fonction g est aussi de classe C^∞ . Pour avoir le développement limité de g d'ordre 2 en 1, on calcule $g(1)$, $g'(1)$ et $g''(1)$.

Comme $f(0) = 1$, on a $g(1) = 0$. puis $f'(x)g'(f(x)) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En prenant $x = 0$, comme $f'(0) = 3$, on a donc $3g'(1) = 1$ et $g'(1) = 1/3$. Enfin, on a $f''(x)g'(f(x)) + f'(x)^2g''(f(x)) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En prenant $x = 0$, comme $f''(0) = -3$, on a donc $-3g'(1) + 9g''(1) = 0$, ce qui donne $g''(1) = 1/9$.

Le développement limité d'ordre 2 en 1 de g est donc $g(x) = \frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{18}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 1} \varepsilon(x) = 0$.

6. Donner les asymptotes de f en $\pm\infty$.

corrigé

Comme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1} = 0$, la fonction f admet pour asymptote en $\pm\infty$ la droite d'équation $x \mapsto 3x$.

7. montrer que $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ et donner les asymptotes de g en $\pm\infty$.

corrigé

La fonction g est (comme f) une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $g(x_0) = A$ et on a :

$$x \geq x_0 \Rightarrow g(x) \geq A.$$

Ceci prouve que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. De manière analogue, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$.

Pour trouver les asymptotes de g , il suffit alors de remarquer que (comme $f \circ g(x) = x$) :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (g(x) - \frac{1}{3}x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [g(x) - \frac{1}{3}f(g(x))] = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} (y - \frac{1}{3}f(y)) = \frac{1}{3} \lim_{y \rightarrow \pm\infty} (3y - f(y)) = 0.$$

La fonction g admet donc pour asymptote en $\pm\infty$ la droite d'équation $x \mapsto \frac{1}{3}x$.

Exercice 2 (Points fixes de f , si $f \circ f = f$)

Soit $-\infty < a < b < +\infty$ et f une fonction continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$. On rappelle que $x \in [a, b]$ est un point fixe de f si $f(x) = x$.

1. Montrer que f admet au moins un point fixe. [On pourra considérer la fonction g définie sur $[a, b]$ par $g(x) = f(x) - x$.]

corrigé

On remarque que $g(a) = f(a) - a \geq 0$ (car $f(a) \geq a$) et $g(b) = f(b) - b \leq 0$ (car $f(b) \leq b$). Comme g est continue sur $[a, b]$ et $g(a) \geq 0 \geq g(b)$, le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence de $c \in [a, b]$ t.q. $g(c) = 0$.

On suppose dans la suite que $f \circ f = f$. On pose $\text{Im}(f) = \{f(x), x \in [a, b]\}$.

2. Montrer que tout élément de $\text{Im}(f)$ est un point fixe de f .

corrigé

Soit $y \in \text{Im}(f)$. Il existe $x \in [a, b]$ t.q. $y = f(x)$. On a donc $f(y) = f(f(x)) = f \circ f(x) = f(x) = y$.
Ce qui prouve que y est un point fixe de f .

3. On suppose, dans cette question, que f admet un seul point fixe. Montrer que f est constante.

corrigé

Puisque f admet un seul point fixe, la question précédente donne que $\text{Im}(f)$ ne peut contenir que un seul point. Ce qui prouve que f est constante.

On suppose dans la suite que f admet au moins 2 points fixes (disctints) et que f est dérivable (c'est-à-dire dérivable en tout point de $]a, b[$).

4. Montrer qu'il existe $m, M \in [a, b]$ t.q. $\text{Im}(f) = [m, M]$ et $m < M$.

corrigé

L'image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue est encore un intervalle fermé borné. Il existe donc $m, M \in \mathbb{R}$ t.q. $m \leq M$ et $\text{Im}(f) = [m, M]$. Comme f admet au moins 2 points fixes, $\text{Im}(f)$ contient au moins deux points. Donc, $m < M$.

5. Montrer que $f'(x) = 1$ pour tout $x \in]m, M[$ (ici et dans la suite, m et M sont donnés par la question précédente).

corrigé

Pour tout $x \in]m, M[$, on a $f(x) = x$ (car $]m, M[\subset \text{Im}(f)$). On a donc, pour tout $x \in]m, M[$, $f'(x) = 1$.

6. On suppose, dans cette question, que $m > a$.

- (a) Montrer que $f'(m) = 1$.

corrigé

On a $a < m < M \leq b$. La fonction f est donc dérivable en m . Pour $0 < h < M - m$, on a $f(m) = m$ et $f(m+h) = m+h$ (car m et $(m+h)$ sont dans $\text{Im}(f)$ et sont donc des points fixes de f). On a donc :

$$\frac{f(m+h) - f(m)}{h} = 1.$$

On en déduit que :

$$f'(m) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(m+h) - f(m)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{f(m+h) - f(m)}{h} = 1.$$

- (b) Montrer qu'il existe $x \in]a, m[$ t.q. $f(x) < m$.

corrigé

Le DL1 de f est m donne $f(x) = f(m) + (x - m) + (x - m)\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow m} \varepsilon(x) = 0$. Il existe donc $\eta > 0$ t.q. :

$$|x - m| \leq \eta \Rightarrow |\varepsilon(x)| < 1.$$

Pour $x \in [a, m[$ avec $m - x < \eta$ on a donc :

$$f(x) < f(m) + (x - m) + |x - m| = f(m).$$

(c) En déduire que l'hypothèse $m > a$ est en contradiction avec la définition de m .

corrigé

Si $m > a$, on vient de montrer l'existence de $x \in [a, b]$ t.q. $f(x) < f(m)$, ce qui est impossible car $f(x) \in \text{Im}(f) = [m, M]$ et $f(m) = m$ (car $m \in \text{Im}(f)$ et donc m est un point fixe de f).

7. Montrer que $m = a$, $M = b$ et $f(x) = x$ pour tout $x \in [a, b]$.

corrigé

La question précédente donne $m \leq a$ et donc finalement $m = a$ (car $[m, M] = \text{Im}(f) \subset [a, b]$). De manière analogue, on peut montrer que $M = b$. On a donc $\text{Im}(f) = [a, b]$ et donc $f(x) = x$ pour tout $x \in [a, b]$.

8. Montrer que le résultat de la question précédente peut être faux si on retire l'hypothèse " f dérivable". [On cherche donc f continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$ t.q. $f \circ f = f$, f admet au moins deux points fixes distincts et il existe $x \in [a, b]$ t.q. $f(x) \neq x$.]

corrigé

On peut prendre, par exemple, $a = 0$, $b = 3$, $f(x) = 1$ si $0 \leq x < 1$, $f(x) = x$ si $1 \leq x \leq 2$, $f(x) = 2$ si $2 < x \leq 3$.
