Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 1ere année
Analyse, 2eme semestre, mars 2008

Notes de cours et de td autorisées.

Exercice 1 (Calculs de limites)

Calculer $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{2x}}{x}$ et $\lim_{x\to 0, x>0} \frac{x}{(\ln(1+x))^2}$.

corrigé

$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$ car $|\frac{\sin(x)}{x}| \le \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $fx) = e^x - e^{2x}$. La fonction f est dérivable en 0 et $f(0) = 0$. On en déduit $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{2x}}{x} = f'(0) = -1$.

Pour $x \in]-1, \infty[$,, on pose $g(x) = \ln(1+x)^2$. La fonction g est dérivable en 0 et $g(0) = 0$. On en déduit $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)^2}{x} = g'(0) = 0$. Comme $g(x) > 0$ quand $x > 0$, on a donc $\lim_{x\to 0, x>0} \frac{x}{(\ln(1+x))^2} = +\infty$.

Exercice 2 (TVI)

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$.

1. Montrer qu'il existe $x_2 \in [0,1]$ tel que $f(x_2) = (x_2)^2$. [On pourra considérer la fonction $g(x) = f(x) - x^2$.]

   corrigé

   La fonction g est continue sur $[0,1]$. On a $g(0) = f(0) \ge 0$ (car f prend ses valeurs dans $[0,1]$) et $g(1) = f(1) - 1 \le 0$ (car f prend ses valeurs dans $[0,1]$). Le théorème des valeurs intermédiaires donne alors qu'il existe x_2 t.q. $g(x_2) = 0$, c'est-à-dire $f(x_2) = (x_2)^2$.

   ---

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer qu'il existe $x_n \in [0,1]$ tel que $f(x_n) = (x_n)^n$.

   corrigé

   Pour $x \in [0,1]$, on pose $h_n(x) = f(x) - x^n$. La fonction h_n est continue sur $[0,1]$ et on a, comme à la question précédente, $h_n(0) = f(0) \ge 0$ et $h_n(1) = f(1) - 1 \le 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne alors qu'il existe x_n t.q. $h_n(x_n) = 0$, c'est-à-dire $f(x_n) = (x_n)^n$.

   ---

3. On suppose maintenant que f est strictement décroissante. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in [0,1]$, on pose $h_n(x) = f(x) - x^n$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que h_n est strictement décroissante sur $[0,1]$ et qu'il existe un unique $x_n \in [0,1]$ tel que $f(x_n) = (x_n)^n$.

   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $h_{n+1}(x_n) > 0$. En déduire $x_{n+1} > x_n$.

   Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente et que $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. Quelle est la limite de $(x_n)^n$ quand $n \to \infty$?

   corrigé

   La fonction $x \mapsto -x^n$ est aussi strictement décroissante sur $[0,1]$. La fonction h_n est donc strictement décroissante comme somme de deux fonctions strictement décroissantes. L'existence de $x_n \in [0,1]$ t.q. $h_n(x_n) = 0$ est donnée par la question précédente. L'unicité de x_n vient de la strict décroissance de h_n car si $x_n \in [0,1]$ est t.q. $h_n(x_n) = 0$, on a, pour tout $x \in [0,1] \setminus \{x_n\}$, $h_n(x) > 0$ si $x < x_n$ et $h_n(x) < 0$ si $x > x_n$, et donc $h_n(x) \neq 0$. Le point x_n est donc le seul élément de $[0,1]$ pour lequel h_n s'annule.

Comme f est strictement décroissante, on $f(1) < f(0)$. Puis, comme $f(0), f(1) \in [0,1]$, on a donc $f(0) > 0$ et $f(1) < 1$. On en déduit $x_n \neq 0$ (car $h_n(0) = f(0) > 0$) et $x_n \neq 1$ (car $h_n(1) = f(1) - 1 < 0$). Ce qui montre que $0 < x_n < 1$. On a donc $h_{n+1}(x_n) = f(x_n) - (x_n)^{n+1} = h_n(x_n) + (x_n)^n - (x_n)^{n+1} = (x_n)^n(1 - x_n) > 0$. Comme $h_{n+1}(x_{n+1}) = 0 < h_{n+1}(x_n)$ et que h_{n+1} est strictement décroissante, on a nécessairement $x_{n+1} > x_n$.

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante majorée (par 1), elle est donc convergente. On note a la limite de cette suite. Comme $0 < x_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a donc $a \in [0,1]$. On remarque maintenant que $\lim_{n\to\infty}(x_n)^n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ (car f est continue en a). Si $a \in [0,1[$, on a $\lim_{n\to\infty}(x_n)^n = 0$ et donc $f(a) = 0$, ce qui est impossible car la décroissance strict de f donne $f(a) > f(1) \geq 0$. On a donc nécessairement $a = 1$ (et donc $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$). Enfin, on a $\lim_{n\to\infty}(x_n)^n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(1)$.

Exercice 3 (Fonction sous linéaire)

Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et t.q. $f(0) = 0$. On définit la fonction g de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ (avec $\mathbb{R}_+ = [0,\infty[$) par :

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \text{ si } x > 0,$$
$$g(0) = f'(0).$$

1. Montrer que g est continue en tout point de $\mathbb{R}_+$.

corrigé

La fonction g est continue sur $]0,\infty[$ car c'est le quotient de deux fonctions continues et que son dénominateur ne s'annule par (sur $]0,\infty[$). On peut aussi noter que g est dérivable sur $]0,\infty[$

Comme f est dérivable en 0 et que $f(0) = 0$, On a $\lim_{x\to 0, x>0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$. La fonction g est donc continue en 0 (et donc continue sur tout $\mathbb{R}+ = [0,\infty[$).

On suppose maintenant qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, t.q., pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leq \alpha x + \beta$.

2. Montrer que g est majorée (c'est-à-dire que l'ensemble $\{g(x),\, x \in \mathbb{R}_+\}$ est majoré)

corrigé

La fonction g est continue sur $[0,1]$. La restriction de g à $[0,1]$ est donc majorée (car $[0,1]$ est fermé et borné). Il existe donc M t.q., pour tout $x \in [0,1]$, $g(x) \leq M$.

Puis, pour $x > 1$, on remarque que $g(x) \leq \alpha + \frac{\beta}{x} \leq \alpha + |\beta|$. On a donc finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) \leq C = \max\{M, \alpha + |b|\}$, ce qui prouve que g est majorée.

---

3. On suppose, dans cette question, que $\alpha < f'(0)$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $g(a) = \sup\{g(x),\, x \in \mathbb{R}_+\}$. Montrer que $g(a) = f'(a)$.

corrigé

On choisit $\varepsilon = f'(0) - \alpha > 0$, et on pose $A = \frac{|\beta|}{\varepsilon} \geq 0$. Pour $x \geq A$, on a donc $g(x) \leq \alpha + \frac{\beta}{x} \leq \alpha + \varepsilon = f'(0)$.

La fonction g est continue sur l'intervalle fermé borné $[0,A]$, il existe donc $a \in [0,A] \subset \mathbb{R}_+$ t.q. $g(a) = \sup\{g(x),\, x \in [0,A]\}$. Mais, comme $\sup\{g(x),\, x \in [0,A]\} \geq g(0) = f'(0)$ et que pour $x > A$ on a $g(x) \leq f'(0)$, on a donc $g(a) = \sup\{g(x),\, x \in \mathbb{R}_+\}$.

Si $a = 0$, on a bien $g(a) = f'(a)$. Si $a > 0$, le fait que $g(a) = \sup\{g(x),\, x \in \mathbb{R}_+\}$ et que g soit dérivable en a permet de montrer que $g'(a) = 0$ (comme dans la démonstration du théorème des accroissements finis). Comme $xg(x) = f(x)$ pour tout $x > 0$, on a $g(x) + xg'(x) = f'(x)$ pour tout $x > 0$ et donc $g(a) = f'(a)$.

---

4. On suppose, dans cette question, que $f(x) = x - \frac{x^3}{1+x^2}$.

   (a) La fonction f vérifie-t-elle les hypothèses données au début de l'exercice ?

   corrigé

   Oui... f est dérivable et $f(0) = 0$.

   (b) Donner des valeurs de α et β pour lesquelles, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leq \alpha x + \beta$.

   corrigé

   Comme $\frac{x^3}{1+x^2} \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, les valeurs suivantes conviennent : $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

   (c) Montrer qu'il existe un unique $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $g(a) = \sup\{g(x),\, x \in \mathbb{R}_+\}$ et donner cette valeur de a.

   corrigé

   On a $g(x) < 1$, pour tout $x \in]0, \infty[$, et $g(0) = 1$. Il existe donc un unique $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $g(a) = \sup\{g(x),\, x \in \mathbb{R}_+\}(= 1)$ et $a = 0$.

5. On suppose, dans cette question, que $\alpha = f'(0)$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $g(a) = \sup\{g(x),\, x \in \mathbb{R}_+\}$ et que $g(a) = f'(a)$.

   corrigé

   On pose $\gamma = \sup\{g(x),\, x \in \mathbb{R}_+\}$. On a $\gamma \geq g(0) = f'(0)$ et donc distingue deux cas ;

   Premier cas : $\gamma = f'(0)$. Dans ce cas, $a = 0$ convient car $g(0) = f'(0) = \gamma$.

   Deuxième cas : $\gamma > f'(0)$.

   On choisit alors $\varepsilon = \frac{\gamma - f'(0)}{2} > 0$, et on pose $A = \frac{|\beta|}{\varepsilon} \geq 0$. Pour $x \geq A$, on a donc $g(x) \leq \alpha + \frac{\beta}{x} \leq \alpha + \varepsilon = f'(0) + \varepsilon = \frac{\gamma + f'(0)}{2} < \gamma$. On a donc $\sup\{g(x),\, x \in [A, \infty[\} < \gamma$ et donc :

   $$\gamma = \sup\{g(x), x \in \mathbb{R}_+\} = \max\{\sup\{g(x), x \in [0, A]\}, \sup\{g(x), x \in [A, \infty[\}\} = \sup\{g(x), x \in [0, A]\}.$$

   La fonction g est continue sur l'intervalle fermé borné $[0, A]$, il existe donc $a \in [0, A] \subset \mathbb{R}_+$ t.q. $g(a) = \sup\{g(x),\, x \in [0, A]\}$. Ce qui donne bien $g(a) = \gamma$.

   La démonstration de $g(a) = f'(a)$ est identique à celle de la question 3.

6. Montrer, en donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenable f) qu'il peut ne pas exister $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $g(a) = \sup\{g(x), x \in \mathbb{R}_+\}$ (pour cet exemple, on aura donc nécessairement $\alpha > f'(0)$).

   corrigé

   On peut prendre, par exemple, f définie par $f(x) = x + \frac{x^3}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a bien f dérivable, $f(0) = 0$. Comme $\frac{x^2}{1+x^2} < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, les valeurs $\alpha = 2$ et $\beta = 0$ conviennent et on a $g(x) < 2$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Enfin, on a $\lim_{x \to \infty} g(x) = 2$. on en déduit que $\sup\{g(x),\, x \in \mathbb{R}_+\}$ =2 et qu'il n'existe pas d'élément a de $\mathbb{R}_+$ t.q. $g(a) = \sup\{g(x),\, x \in \mathbb{R}_+\}$.