Université de Marseille, janvier 2008
Licence de Mathématiques, 1ere année
Analyse, 2eme semestre, TD 1

Exercice 1

Exprimer à l'aide d'intervalles de $\mathbb{R}$ les ensembles suivants :

1. $\{x \in \mathbb{R}\,;\, 2 < |x| < 6\}$, $\{x \in \mathbb{R}\,;\, 3 \leq |x| \leq 7\}$,
2. $\{x \in \mathbb{R}\,;\, |x| > a\}$ ($a \in \mathbb{R}$ est donné, discuter suivant les valeurs de a),
3. $\{x \in \mathbb{R}\,;\, |x| < \varepsilon\}$ (avec $\varepsilon > 0$, donné).

Exercice 2

Soit $x \in [-2, 1]$ et $y \in [2, 3[$. Donner des encadrements des quantités suivantes :
$x + y$, $x - y$, $-2x + y$, $-x - y$, xy.

Exercice 3

Soit a, $b \in \mathbb{R}$. Montrer les implications suivantes :

1. $(\forall \varepsilon > 0,\ |a| < \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.
2. $(\forall \varepsilon > 0,\ a < b + \varepsilon) \Rightarrow a \leq b$.
3. $(\forall \varepsilon > 0,\ |a - b| < \varepsilon) \Rightarrow a = b$.

Pour les exercices suivants, on rappelle que si A est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, il existe un nombre réel, noté $\sup(A)$, qui est le plus petit des majorants de A. De même, si A est une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$, il existe un nombre réel, noté $\inf(A)$, qui est le plus grand des minorants de A.

Exercice 4

Soit A est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. On pose $-A = \{-a,\ a \in A\}$. Montrer que $-A$ est une partie non vide minorée $\mathbb{R}$. Comparer $\inf(-A)$ et $\sup(A)$.

Exercice 5

Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ t.q. $A \subset B$. On suppose que B est majorée. Montrer que A est majorée et que $\sup(A) \leq \sup(B)$. Cette dernière inégalité est-elle nécessairement stricte si l'inclusion de A dans B est stricte ?

Exercice 6

Soit A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. On pose $A + B = \{a + b,\ a \in A \text{ et } b \in B\}$. Montrer que $A + B$ est majorée et comparer $\sup(A + B)$ et $\sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 7

1. Montrer que toute suite convergente dans $\mathbb{R}$ est bornée (c'est-à-dire majorée et minorée).
2. Montrer que toute suite croissante majorée est convergente dans $\mathbb{R}$.

Exercice 8

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. On suppose que A est majorée et on pose $a = \sup(A)$. Montrer qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a.
2. On suppose que A n'est pas majorée. Montrer qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers l'infini.

Exercice 9

Soit $l \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ecrire à l'aide des quantificateurs les phrases suivantes :

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers l quand n tend vers $+\infty$.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
3. $f(x)$ ne tend pas vers l quand x tend vers a.
4. $f(x)$ ne tend pas vers l quand x tend vers $+\infty$.

.

Université de Marseille, janvier 2008
Licence de Mathématiques, 1ere année
Analyse, 2eme semestre, TD 2

Exercice 10 (Limite, limite à droite et limite à gauche)

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. Soit f une application définie sur $A = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f admet l comme limite en a si et seulement si f admet (en a) l comme limite à droite et comme limite à gauche.
2. Montrer que f admet l comme limite à gauche en a si et seulement si f vérifie la condition suivante : Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A,
$$x_n \uparrow a, \text{ quand } n \to \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = l,$$
où $x_n \uparrow a$ quand $n \to \infty$ signifie $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ et $x_{n+1} \geq x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Reprendre les questions 1 et 2 avec $l = \infty$ et avec $l = -\infty$.

Exercice 11 (Opérations sur les limites)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $I =]a, b[$. Soit f et g deux applications de I dans $\mathbb{R}$ et $l, m \in \mathbb{R}$. On suppose que $l = \lim_{x\to a,\, x>a} f(x)$ et $m = \lim_{x\to a,\, x>a} g(x)$.

1. Montrer que $l + m = \lim_{x\to a,\, x>a}(f + g)(x)$.
2. On suppose que $m \neq 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ t.q. $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in J =]a, c[$. Montrer que $\frac{l}{m} = \lim_{x\to a,\, x>a} \frac{f(x)}{g(x)}$.
3. On suppose que $m = 0$, $l > 0$ et que $g(x) > 0$ pour tout $x \in I$. Montrer que $\lim_{x\to a,\, x>a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.
4. On prend ici $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ et $g(x) = x$. Les applications fg et f/g (qui est bien définie sur I) ont-elles une limite à droite en 0 ?

Exercice 12 (Quelques exemples. . .)

Pour les exemples suivants, la fonction f est définie sur $I = \mathbb{R}$.

1. On définit f par $f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. L'application f a-t-elle une limite en 0 ? une limite à droite en 0 ? une limite à gauche en 0 ?
2. On définit f par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - (x + 1)$ pour tout x. Quelle la limite de f en $+\infty$?
3. On définit f par $f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x^2})}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. L'application f a-t-elle une limite en 0 ? une limite à droite en 0 ? une limite à gauche en 0 ?
4. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $E(x) = \sup\{n \in \mathbb{Z};\ n \leq x\}$. On définit f par $f(x) = x - \sqrt{x - E(x)}$ pour tout $x \neq 0$. Soit $n \in \mathbb{Z}$, L'application f a-t-elle une limite en n ? une limite à droite en n ? une limite à gauche en n ?

Exercice 13 (Autres exemples. . .)

1. $f(x) = \frac{\sqrt{x^3-3x+2}}{2x^2-x-1}$ pour $x \in]0,1[$. Quelle est la limite (à gauche) de f en 1 ?
2. $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+4}}$ pour $x \in]0,1[$. Quelle est la limite (à droite) de f en 0 ?
3. Soit $a > 0$. On définit f par $f(x) = \frac{(1+x)^a}{x}$ pour $x \in]0,1[$. Quelle est la limite (à droite) de f en 0 ?
4. $f(x) = (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$ pour $x \in]0,1[$. Quelle est la limite (à droite) de f en 0 ?

Exercice 14 (Fonction périodique admettant une limite)

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. on suppose qu'il existe $T > 0$ t.q. $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on dit alors que f est périodique de période T). On suppose de plus que f admet une limite finie, notée l, en $+\infty$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|f(x) - l| \leq \varepsilon$.
2. En déduire que f est une fonction constante.

Exercice 15 (Fonctions monotones)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $I =]a,b[$. Soit f une application strictement croissante de I dans $\mathbb{R}$. On pose $A = \{f(x),\ x \in I\}$, $\alpha = \inf A$ et $\beta = \sup A$. (Si A est non minorée, on pose $\inf A = -\infty$. Si A est non majorée, on pose $\sup A = +\infty$.)

1. Montrer que $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ (on pourra distinguer les cas $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha = -\infty$). Montrer que $\lim_{x \to b} f(x) = \beta$.
2. Soit $c \in I$. Montrer que f admet une limite à droite en c, notée $f_d(c)$, et une limite à gauche en c, notée $f_g(c)$. Montrer que $f_g(c) \leq f(c) \leq f_d(c)$.
3. On suppose que $f_d(c) = f_g(c)$ pour tout $c \in I$ (avec f_d et f_g définies à la question précédente). Montrer que f est continue et que f est bijective de $]a,b[$ dans $]\alpha,\beta[$.

Université de Marseille, février 2008
Licence de Mathématiques, 1ere année
Analyse, 2eme semestre, TD 3

Exercice 16 (Fonction continue, non nulle en un point)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f est continue en a et que $f(a) \neq 0$. Montrer que f est non nulle sur un intervalle ouvert contenant a.

Exercice 17 (Limite en $+\infty$)

Soit $f\ : \mathbb{R}\ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 18 (Fonction lipschitzienne)

Soit $f\ : \mathbb{R}\ \to \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+$. On suppose que $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que f est continue (sur tout R).

Exercice 19

Pour quelle valeur de α la fonction f, définie ci-après, est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} \text{ si } x \neq 2 \\ \alpha \text{ si } x = 2. \end{cases}$$

Exercice 20 (Polynôme de degré impair)

Montrer que toute fonction polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de degré impair, s'annule en au moins un point.

Exercice 21 (Existence d'un maximum)

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Montrer que f admet un maximum (c'est-à-dire qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q., pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leq f(a)$).

Exercice 22 (Injectivité et continuité donne monotonie)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et $f\ [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et injective. Montrer que f est monotone. [Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.]

Exercice 23 (Prolongement par continuité)

Soit f l'application de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{1 - |x|}.$$

1. La fonction f est-elle continue en 0 ?
2. Calculer $\lim_{x\to-1} f(x)$ et $\lim_{x\to1} f(x)$.
3. Existe-t-il une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}$ et qui est égale à f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$?

Exercice 24

Soit f et g deux fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, continues et t.q. $f(0) = g(1) = 0$ et $g(0) = f(1) = 1$. Montrer que :

$$\forall\lambda \in \mathbb{R}_+,\ \exists x \in [0, 1],\ f(x) = \lambda g(x).$$

Exercice 25 (Moyennes harmonique et arithmétique)

1. Montrer que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $0 < a < b$, on a :

$$a < \frac{2ab}{a+b} < \frac{a+b}{2} < b.$$

2. Soit $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $0 < u_0 < v_0$. On définit, par récurrence, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n},\ \ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

   (a) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies (c'est-à-dire que $u_n + v_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) et que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes (dans $\mathbb{R}$).
   (b) Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n$.
   (c) Vérifier que la suite $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
   (d) Donner la limite commune au suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 26 (Valeur intermédiaire)

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, l'ensemble $\{s \in [0, 1]$ t.q. $f(s) = \frac{f(0)+f(t)}{2}\}$ est non vide.

   Pout $t \in [0, 1]$, on pose $\varphi(t) = \inf\{s \in [0, 1]$ t.q. $f(s) = \frac{f(0)+f(t)}{2}\}$.
2. Montrer que $\varphi(t) \in [0, 1]$ et que $f(\varphi(t)) = \frac{f(0)+f(t)}{2}$.
3. Montrer que si f est strictement croissante, l'application φ ainsi définie de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ est continue.
4. Donner un exemple de fonction f pour lequel la fonction φ n'est pas continue.

Université de Marseille, février 2008
Licence de Mathématiques, 1ere année
Analyse, 2eme semestre, td4

Exercice 27 (Fonction dont l'image est discrète)

Soit $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue (en tout point de $\mathbb{R}$).

1. On suppose que $f(x) \in \{0, 1\}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante. [utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.]
2. On remplace maintenant l'hypothèse "$f(x) \in \{0, 1\}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$" par "$\mathrm{card}\{f(x), x \in \mathbb{R}\} < \infty$". Peut on aussi montrer que f est constante ? (justifier la réponse. . .)

Exercice 28 (Continuité de "max" et "min")

1. Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ et $\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.
2. Soit f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit les applications $f \top g$ et $f \perp g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :
$$(f \top g)(x) = \max\{f(x), g(x)\},\ (f \perp g)(x) = \min\{f(x), g(x)\},\ \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$
Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f et g sont continues en a. Montrer que $f \top g$ et $f \perp g$ sont continues en a.

Exercice 29 (Convexe implique continue)

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est convexe, c'est à dire que $f(tx + (1 - t)y) \le tf(x) + (1 - t)f(y)$ pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

On pose $\alpha = f(1) - f(0)$, $\beta = f(0) - f(-1)$ et $\gamma = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

1. Soit $x \in]0, 1[$. Montrer que $\beta x \le f(x) - f(0) \le \alpha x$. [Utiliser le fait que $x = t1 + (1 - t)0$, avec $t = x$, et $0 = tx + (1 - t)(-1)$, avec $t = \frac{1}{1+x}$.]
2. Soit $x \in] - 1, 1[$. Montrer que $|f(x) - f(0)| \le \gamma|x|$. En déduire que f est continue en 0.
3. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 30 (Borne supérieure atteinte)

Soit f une application continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ (on rappelle que $\mathbb{R}_+ = [0, \infty[$). On suppose que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Monter que $\{f(x),\ x \in \mathbb{R}_+\}$ est majoré est qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $f(a) = \sup\{f(x),$ $x \in \mathbb{R}_+\}$.

Exercice 31 (Exercice sur les valeurs intermédiaires)

Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $f(0) = f(1)$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. pour $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$, on pose $g(x) = f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$.

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n}) = 0$.
2. Montrer qu'il existe $x_0, x_1 \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ t.q. $g(x_0) \le 0$ et $g(x_1) \ge 0$.
3. Monter qu'il existe $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ t.q. $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$.

Université de Marseille, février 2008
Licence de Mathématiques, 1ere année
Analyse, 2eme semestre, TD 5

Exercice 32 (Opérations sur les dérivées)

Soit $-\infty \le a < b \le \infty$, $x \in]a, b[$ et f, g deux applications de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et g sont dérivables en x.

1. Montrer que $(f + g)$ est dérivable en x et $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

2. Montrer que fg est dérivable en x et $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
3. On suppose que $g(y) \neq 0$ pour tout $y \in]a, b[$. Montrer que f/g est dérivable en x et que :

$$(f/g)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Exercice 33 (Dérivée en un point)

Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable pour tout $x \neq 0$ et que f' (définie sur $\mathbb{R}^\star$) admet une limite en 0, notée l. Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = l$. [On pourra utiliser le théorème des accroissements finis.]

Exercice 34 (Dérivabilité de $x \mapsto |x|^a$)

Etudier, selon les valeurs du paramètre $a > 0$, la continuité et la dérivabilité de l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|^a$ pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$ et $f(0) = 0$.

Exercice 35 (Dérivée non continue)

On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 0, \text{ si } x \leq 0,$$
$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}, \text{ si } x > 0.$$

Montrer que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La dérivée de f est-elle continue ?

Exercice 36 (Dérivée et propriété des valeurs intermédiaires)

Soit $-\infty \leq a < b \leq \infty$ et f une application de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable pour tout $x \in]a, b[$. On va montrer, dans cet exercice, que f' (définie sur $]a, b[$) vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

Soit $c, d \in]a, b[$, $c < d$, et γ appartenant à l'intervalle ouvert dont les bornes sont $f'(c)$ et $f'(d)$.

1. Montrer qu'il existe $\eta \in]0, d - c[$ t.q. γ appartienne à l'intervalle ouvert dont les bornes sont $\frac{f(c+\eta)-f(c)}{\eta}$ et $\frac{f(d-\eta)-f(d)}{-\eta}$.
2. On définit g de $[c, d - \eta]$ dans $\mathbb{R}$ (avec η donné par la question précédente) par :

$$g(x) = \frac{f(x + \eta) - f(x)}{\eta}, \text{ pour } x \in [c, d - \eta].$$

   Montrer que g est continue sur l'intervalle $[c, d - \eta]$ et en déduire qu'il existe $y \in [c, d - \eta]$ t.q. $g(y) = \gamma$.
3. Montrer qu'il existe $z \in [c, d]$ t.q. $f'(z) = \gamma$.

Exercice 37 (Propriété des valeurs intermédiaires n'implique pas continuité)

En utilisant les deux exercices précédents, donner un exemple d'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires et non continue.

Exercice 38 (Accroissements finis "généralisés")

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit f et g deux applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et g est dérivables pour tout $x \in]a, b[$ et que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

1. Montrer que $g(x) - g(a) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b]$.

2. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ t.q. :
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
[On pourra considérer la fonction u définie sur $[a,b]$ par $u(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x)$.]

Exercice 39

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est deux fois dérivable pour tout $x \in]a,b[$ (c'est-à-dire que f est dérivable pour tout $x \in]a,b[$ et que f', qui est donc définie sur $]a,b[$, est aussi dérivable pour tout $x \in]a,b[$). Soit $x_0 \in]a,b[$.

1. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ t.q. :
$$f(x_0) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0 - a) + \frac{(x_0-a)(x_0-b)}{2} A.$$
2. On définit φ sur $[a,b]$ par :
$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - \frac{(x-a)(x-b)}{2} A.$$
Montrer qu'il existe $c \in]a, x_0[$ et $d \in]x_0, b[$ t.q. $\varphi'(c) = \varphi'(d) = 0$.
3. Montrer qu'il existe $\theta \in]a,b[$ t.q. :
$$f(x_0) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0 - a) + \frac{(x_0-a)(x_0-b)}{2} f''(\theta).$$

Exercice 40

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x + e^x$. Montrer que f est strictement croissante, continue et bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note g l'application récirpoque de f. Montrer que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $g'(1)$ et $g''(1)$.

Université de Marseille, mars 2008
Licence de Mathématiques, 1ere année
Analyse, 2eme semestre, TD 6

Exercice 41 (Dérivabilité en un point)

Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que f est dérivable en tout point x différent de a et que f' (définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$) admet une limite en a, notée a_1. Montrer que f est dérivable en a et que $f'(a) = a_1$. [Cette question a été faite au TD 5 avec $a = 0$.]
2. On suppose que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $f^{(n)}$ (définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$) admet une limite en a, notée a_n. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. [On pourra raisonner par récurrence sur n.]

Exercice 42 (Fonction C^∞ non analytique)

On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}, \text{ si } x > 0,$$
$$f(x) = 0, \text{ si } x \leq 0.$$

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, \infty[$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme p_n t.q.
$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}, \text{ si } x > 0.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Soit $p \in \mathbb{Z}$, Montrer que :
   $$\lim_{x\to 0,\, x>0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^p} = 0.$$
   [On rappelle que $e^u \geq \frac{u^q}{q!}$ pour tout $u > 0$ et tout $q \in \mathbb{N}$.]
   (b) Montrer que $\lim_{x\to 0, x\neq 0} f^{(n)}(x) = 0$.
4. Montrer que f est de classe C^∞ (sur $\mathbb{R}$).
5. Montrer que f n'est pas analytique.

Exercice 43 (DL, exemple 1)
On définit f sur $]-\infty, 1[$ par :
$$f(x) = \arctan \frac{1}{1-x}.$$
Donner le développement limité à l'ordre 3 de f en 0.

Exercice 44 (DL d'un polynôme. . .)
Donner le développement limité à l'ordre 7 en -1 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 1$.

Exercice 45 (Utilisation des DL)
Donner la limite en 0 de f définie sur $]0, \infty[$ par :
$$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

Exercice 46 (Etude de fonction)
Etudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x \arctan x,\ x \in \mathbb{R}.$$
[Montrer que f est paire. Calculer f' et f". Etudier les asymptotes.]

Exercice 47 (DL, exemple 2)
On définit f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
1. Montrer que f est de classe C^∞. [Reprendre un exercice précédent. . . .]
2. Calculer f' et f".
3. Montrer que f est paire, donner son tableau de variation et sa limite en $+\infty$.
4. Donner le développement limité de f en 0.

Exercice 48 (DL, exemple 3, fastidieux. . .)
On définit f sur $]0, \infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{\log(1+x)}{x}}$.
1. Montrer que f admet une limite (finie) en 0, notée l. On pose dans la suite $f(0) = l$.
2. Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de f.

Exercice 49 (DL d'une fonction réciproque)
On définit f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + \sin x$.
1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, strictement croissante. On note, dans la suite, g sa fonction réciproque.

2. Montrer que f et g sont dérivables en tout point de $\mathbb{R}$.
3. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de g.

Exercice 50 (Bolzano-Weierstrass)

Soit $-\infty < a < b < \infty$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $[a,b]$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $a_n = \inf\{x_p,\ p \geq n\}$. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite croissante majorée. En déduire qu'il existe $x \in [a,b]$ t.q. $a_n \to x$ quand $n \to \infty$.
2. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe $\varphi(n) \geq n$ t.q. $|x_{\varphi(n)} - a_n| \leq \frac{1}{n}$ (où a_n est défini à la question précédente). En déduire que $x_{\varphi(n)} \to x$ quand $n \to \infty$ (où x est défini à la question précédente).

Exercice 51 (Théorème de Heine, vu au DM1)

Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose que f n'est pas uniformément continue.
   (a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe $x_n, y_n \in [a,b]$ t.q. $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.
   (b) Montrer qu'il existe un point $x \in [a,b]$ t.q. f ne soit pas continue en x. [Utiliser l'exercice précédent.]
2. On suppose que f est continue (sur $[a,b]$). Montrer que f est uniformément continue (sur $[a,b]$).

Université de Marseille, mars 2008
Licence de Mathématiques, 1ere année
Analyse, 2eme semestre, TD 7

Exercice 52 (Condition nécessaire et condition suffisante de minimalité)

Soit f une application $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que f est de classe C^1 et que f admet un minimum local en a. Montrer que $f'(a) = 0$.
2. On suppose que f est de classe C^2, $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$. Montrer que f admet un minimum local en a.
3. Donner un exemple pour lequel f est de classe C^2, $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ et f n'admet pas un minimum local en a.

Exercice 53 (Equivalents)

1. Soit $\alpha > 0$. Montrer que $((1+x)^\alpha - 1) \sim \alpha x$ en 0.
2. Montrer que $(1 + x + x^2) \sim x^2$ en $+\infty$.
3. Soit f, g, h des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On suppose que $f \sim \lambda h$ et $g \sim \mu h$ en 0 et que $\lambda + \mu \neq 0$. Montrer que $(f+g) \sim (\lambda+\mu)h$ en 0. Donner un exemple où ce résultat est faux si $\lambda + \mu = 0$.
4. Soit f et g des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(x) > 0$ et $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f \sim g$ en 0 et $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$. On pose $h(x) = \ln(x)$ pour $x > 0$. Montrer que $h \circ f \sim h \circ g$ en 0.
5. Soit f, g, h des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f \sim h$ en 0 et que $g = o(h)$ au voisinage de 0. Montrer que $(f+g) \sim h$ en 0.

Exercice 54 (Limlte à l'infini)

Soit f une fonction dérivable de $]0,\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Montrer que $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Exercice 55 (Prolongement par continuité)

Pour $x \in]0,1[$, on pose $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$. Peut on prolonger f par continuité en 0 et en 1 ?

Exercice 56 (Calcul de primitives)

1. Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^4 + 3x^2 - x$. Calculer F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $F' = f$ et $F(0) = 0$.
2. Soit f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$. Calculer F de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $F' = f$ et $F(0) = 0$.
3. Soit f de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x^4+x^2-1}{x^2}$. Calculer F de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $F' = f$ et $F(1) = 0$.

Exercice 57 (Limite en 0)

Trouver les limites en 0 des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^\star$:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}(\frac{1}{1+x^2} - \cos(x)),\ g(x) = \frac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x},\ h(x) = \frac{e^x - \cos(x) - \sin(x)}{x^2}.$$

Exercice 58 (DL3)

Calculer le DL3 en 0 de f définie pour $x \in]-1,1[$ par $f(x) = \sin(x) - \cos(x) + \tan(x) + \frac{1}{1-x}$.
Calculer le DL3 en $\frac{\pi}{2}$ de f définie pour $x \in]0,\pi[$ par $f(x) = \ln(\sin(x))$.

Exercice 59 (DL4)

Donner le DL4 en 0 des fonctions suivantes (définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) :

$$f(x) = (1 + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{2}},\ g(x) = e^{\cos(x)}.$$

Exercice 60 (DLn)

On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{l} f(x) = \frac{x}{e^x-1} \text{ si } x \neq 0, \\ f(0) = 1 \end{array} \tag{1}$$

Montrer que f est continue en 0 et admet un DLn en 0, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 61 (Equivalents)

Soit f, g, φ, ψ définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = x^4 + 1$, $\varphi(x) = x^3 - 3x$, $\psi(x) = x^3$.

1. Montrer que $f \sim g$ en 0.
2. Montrer que $\ln(f)$ et $\ln(g)$ sont définies sur $]-1,\infty[$ et que $\ln(f) \not\sim \ln(g)$ en 0.
3. Montrer que $\varphi \sim \psi$ en $+\infty$.
4. Montrer que $e^\varphi \not\sim e^\psi$ en $+\infty$.

Exercice 62 (Fonction indéfiniment dérivable et à support compact)

On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{l} f(x) = 0, \text{ si } x \leq -1, \\ f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}, \text{ si } -1 < x < 1, \\ f(x) = 0, \text{ si } x \geq 1. \end{array}$$

1. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$
2. (a) Montrer que f est de classe C^∞ sur $]-1,1[$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer qu'il existe deux polynômes p_n et q_n t.q. :

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{q_n(x)} e^{\frac{1}{x^2-1}},\ \text{pour tout } -1 < x < 1.$$

(On ne demande de calculer p_n et q_n mais seulement de montrer leur existence.)

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que $\lim_{x \to 1, x<1} f^{(n)}(x) = 0$.

3. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. [On pourra utiliser le résultat suivant, vu en cours et en TD : Soit $-\infty \le b < a < c \le \infty$ et g une application de $]b, c[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que g est dérivable pour tout $x \in]b, c[$, $x \neq a$, et que g' (définie sur $]b, c[\setminus\{a\}$) admet une limite en a, notée l. Alors, g est dérivable en a et $g'(a) = l$.]
4. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, donner le développement limité de f, à l'ordre n, au point 1.

Université de Marseille, avril 2008
Licence de Mathématiques, 1ere année
Analyse, 2eme semestre, TD 8

Exercice 63 (Formule de la moyenne)

Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On note $\mathrm{Im}(f) = \{f(x), x \in [a, b]\}$, $m = \inf(\mathrm{Im}(f))$ et $M = \sup(\mathrm{Im}(f))$.

1. Montrer qu'il existe $\mu \in [m, M]$ t.q. :

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a).$$

2. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ t.q. :

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Exercice 64 (Intégrale d'une fonction positive)

Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(x) \ge 0$ pour tout $x \in [a, b]$, et qu'il existe $c \in [a, b]$ t.q. $f(c) > 0$. Montrer que $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Exercice 65 (Intégrale impropre)

On définit l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{l} f(x) = 0, \text{ si } x \le 0, \\ f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}, \text{ si } x > 0. \end{array}$$

1. Montrer que f est continue et dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f' est continue en tout point sauf 0.
3. Soit $0 < a < b < \infty$. Montrer que :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt.$$

4. Soit $a > 0$. Pour $0 < x < a$, on pose, $g(x) = \int_x^a f'(t)dt$. Montrer que $g(x)$ a une limite (dans $\mathbb{R}$) quand $x \to 0$, avec $x > 0$. On note (improprement... car f' n'est pas continue sur $[0, a]$) $\int_0^a f'(t)dt$ cette limite. Montrer que :

$$f(a) - f(0) = \int_0^a f'(t)dt.$$

Exercice 66 (Calcul d'intégrales)

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^3 x^3 dx, \qquad \int_1^4 \frac{x^2-1}{x^2} dx, \qquad \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx.$$

Exercice 67 (Convergence de l'intégrale)

Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et φ une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\varphi_n \to \varphi$ simplement quand $n \to \infty$ (c'est-à-dire que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$, pour tout $x \in [0,1]$).

1. Montrer que si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|\,dx = 0$, alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\,dx = \int_0^1 \varphi(x)\,dx$.
2. Montrer que si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ, alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\,dx = \int_0^1 \varphi(x)\,dx$.
3. Donner un exemple pour lequel $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers φ et :
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\,dx = \int_0^1 \varphi(x)\,dx.$$
4. Donner un exemple pour lequel $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \varphi(x)\,dx$.
5. Si la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait les deux conditions :
   (a) Pour tout ε, $0 < \varepsilon < 1$, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ sur $[\varepsilon, 1]$,
   (b) Les φ_n sont à valeurs dans $[-1,+1]$,

   montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\,dx = \int_0^1 \varphi(x)\,dx$.

Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 1ere année, 2007/8
Analyse, 2eme semestre, dm2 (examen de juin 2007)

Devoir à rendre (en TD) pendant la première semaine d'avril.

Exercice 68 (Etude d'une fonction)

Soit la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+\tan x)}{\sin x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue et dérivable en 0.

corrigé

On montre ci dessous continuité et dérivabilité de f en 0 en faisant un DL2 en 0 du numérateur et du dénominateur de la fraction définissant f (mais, bien sûr, d'autres preuves sont possibles).

Pour $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, on a $\tan x \in]-1,1[$ et $\tan x) = x + x^2\varepsilon_1(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$. Pour $u \in]-1,1[$, on a $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon_2(u)$ avec $\lim_{u\to 0} \varepsilon_2(u) = 0$. On en déduit, pour $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$:

$$\ln(1+\tan x) = x + x^2\varepsilon_1(x) - \frac{(x + x^2\varepsilon_1(x))^2}{2} + (x + x^2\varepsilon_1(x))^2\varepsilon_2(x + x^2\varepsilon_1(x)),$$

et donc :

$$\ln(1+\tan x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_3(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0.$$

Pour $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, on a $\sin x = x + x^2\varepsilon_4(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_4(x) = 0$, ce qui donne, pour $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, $x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_3(x)}{x + x^2\varepsilon_4(x)} = \frac{1 - \frac{x}{2} + x\varepsilon_3(x)}{1 + x\varepsilon_4(x)}.$$

On en déduit que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ et donc que f est continue (car $f(0) = 1$). Puis, pour $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, $x \neq 0$, on a :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)-1}{x} = \frac{-\frac{x}{2} + x\varepsilon_3(x) - x\varepsilon_4(x)}{x(1+x\varepsilon_4(x))} = \frac{-\frac{1}{2} + \varepsilon_3(x) - \varepsilon_4(x)}{1+x\varepsilon_4(x)}$$

On a donc $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\frac{1}{2}$. Ce qui prouve que f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

---

2. Donner le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.

corrigé

Pour avoir un DL2 de f en 0, il suffit de faire un DL3 en 0 du numérateur et du dénominateur de la fraction définissant f. On procède comme à la question précédente.

Pour $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, on a $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + x^3\eta_1(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\eta_1(x) = 0$. Pour $u \in]-1, 1[$, on a $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + u^3\eta_2(u)$ avec $\lim_{u\to 0}\eta_2(u) = 0$. On en déduit, pour $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$:

$$\ln(1+\tan x) = x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\eta_3(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0}\eta_3(x) = 0.$$

c'est-à-dire :

$$\ln(1+\tan x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + x^3\eta_3(x).$$

Pour $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, on a $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3\eta_4(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\eta_4(x) = 0$, ce qui donne, pour $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, $x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + x^3\eta_3(x)}{x - \frac{x^3}{6} + x^3\eta_4(x)} = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{2x^2}{3} + x^2\eta_3(x)}{1 - \frac{x^2}{6} + x^2\eta_4(x)}.$$

On utilise maintenant que, pour $u \neq 1$, $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u\eta_5(u)$, avec $\lim_{u\to 0}\eta_5(u) = 0$. On obtient, pour $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, $x \neq 0$:

$$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + x^2\eta_4(x)} = 1 + \frac{x^2}{6} + x^2\eta_6(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0}\eta_6(x) = 0.$$

Ce qui donne :

$$f(x) = (1 - \frac{x}{2} + \frac{2x^2}{3} + x^2\eta_3(x))(1 + \frac{x^2}{6} + x^2\eta_6(x)) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{5x^2}{6} + x^2\eta_7(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0}\eta_7(x) = 0.$$

On a ainsi obtenu le DL2 de f en 0.

---

3. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 et la position locale de la courbe de f par rapport à cette tangente.

corrigé

La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 a pour équation $g(x) = 1 - \frac{x}{2}$. La question précédente donne $f(x) - g(x) = \frac{5x^2}{6} + x^2\eta_7(x)$, avec $\lim_{x\to 0}\eta_7(x) = 0$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ t.q.

$$|x| \leq \varepsilon \Rightarrow |\eta_7(x)| \leq \frac{5}{6} \Rightarrow f(x) - g(x) \geq 0.$$

Ceci prouve que la courbe de f est, au voisinage de 0, au dessus de celle de g (qui est sa tangente en 0).

Exercice 69 (Limite en $+\infty$)

Pour $x > 0$ on pose $f(x) = x^2(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}})$. Déterminer $\lim_{x\to\infty} f(x)$. [On pourra, sur une une fonction convenable, utiliser un développement limité ou le théorème des accroissements finis.]

corrigé

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $y \mapsto e^y$ donne l'existence de $c \in]a, b[$ t.q. $e^b - e^a = (b-a)e^c$.

Pour tout $x > 0$, en prenant $a = \frac{1}{x+1}$ et $b = \frac{1}{x}$, il existe donc $c_x \in]\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x}[$ t.q. :

$$f(x) = x^2(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}) = x^2(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1})e^{c_x} = \frac{x^2}{x(x+1)}e^{c_x}.$$

On a $\lim_{x\to\infty} c_x = 0$ (car $c_x \in]\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x}[$ et donc $\lim_{x\to\infty} e^{c_x} = 1$.

On a aussi $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$. On en déduit que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.

Exercice 70 (Sur le TAF...)

Rappel (TAF) : Soit $-\infty < a < b < \infty$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors, pour tout $h \in]0, b-a[$, il existe $\theta \in]0, 1[$ t.q. :

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a+\theta h). \tag{2}$$

1. Dans les quatre cas suivants, montrer que, pour tout $h \in]0, b-a[$, il existe un *unique* θ vérifiant (2) (les valeurs de a et b étant fixés). On note θ_h cette valeur de θ. Calculer θ_h (en fonction de a et h) et déterminer $\lim_{h\to 0, h>0} \theta_h$.

   (a) $0 < a < b < \infty$ et $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \in [a, b]$.

   corrigé

   Soit $\theta \in]0, 1[$ vérifiant (2) (l'existence d'au moins un θ est donnée par le TAF, on veut montrer ici son unicité et on cherche la limite de θ quand $h \to 0$, $h > 0$). La relation (2) donne :

   $$\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} = hf'(a+\theta h) = \frac{-h}{(a+\theta h)^2},$$

   et donc $(a+\theta h)^2 = a(a+h)$, ce qui donne :

   $$\theta = \frac{\sqrt{a(a+h)} - a}{h}.$$

   Ceci prouve bien l'unicité de θ. En posant, pour $y > -a$, $\varphi(y) = \sqrt{a(a+y)}$, on a aussi $\theta_h = \frac{\sqrt{a(a+h)}-a}{h} = \frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{h}$ et donc :

   $$\lim_{h\to 0, h>0} \theta_h = \varphi'(0) = \frac{1}{2}.$$

   (b) $0 < a < b < \infty$ et $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ pour $x \in [a, b]$.

   corrigé

   Soit $\theta \in]0, 1[$ vérifiant (2). La relation (2) donne :

   $$\frac{1}{\sqrt{a+h}} - \frac{1}{\sqrt{a}} = hf'(a+\theta h) = \frac{-h}{2(a+\theta h)^{\frac{3}{2}}}.$$

   On trouve donc ici

   $$\theta = \frac{1}{h}\left[\left(\frac{h}{2}\frac{\sqrt{a}\sqrt{a+h}}{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}\right)^{\frac{2}{3}} - a\right].$$

Ceci prouve bien l'unicité de θ.

Pour trouver la limite quand h tend vers 0, avec $h > 0$, de θ_h, on peut utiliser des DL en a et la formule
$$\frac{1}{\sqrt{a+h}} - \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{-h}{2(a+\theta_h h)^{\frac{3}{2}}}. \tag{3}$$
En effet, on a, en faisant un DL2 en a de $y \mapsto \frac{1}{\sqrt{y}}$ et un DL1 en a de $y \mapsto \frac{1}{y^{\frac{3}{2}}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{a+h}} - \frac{1}{\sqrt{a}} = -\frac{1}{2a^{\frac{3}{2}}}h + \frac{3}{8a^{\frac{5}{2}}}h^2 + h^2\varepsilon_1(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon_1(h) = 0,$$
$$\frac{1}{(a+\bar{h})^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2a^{\frac{5}{2}}}\bar{h} + \bar{h}\varepsilon_2(\bar{h}) \text{ avec } \lim_{\bar{h}\to 0}\varepsilon_2(\bar{h}) = 0,$$

ce qui donne aussi, comme $\theta_h \in]0,1[$,

$$\frac{1}{(a+\theta_h h)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2a^{\frac{5}{2}}}\theta_h h + h\varepsilon_3(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon_3(h) = 0.$$

En portant ces relations dans (3), on obtient :

$$-\frac{1}{2a^{\frac{3}{2}}}h + \frac{3}{8a^{\frac{5}{2}}}h^2 + h^2\varepsilon_1(h) = \frac{-h}{2}\left(\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2a^{\frac{5}{2}}}\theta_h h + h\varepsilon_3(h)\right),$$

ce qui donne, en divisant par h^2 :

$$\frac{3}{4a^{\frac{5}{2}}}(\frac{1}{2} - \theta_h) = -\varepsilon_1(h) - \frac{\varepsilon_3(h)}{2},$$

et donc $\lim_{h\to 0, h>0}\theta_h = \frac{1}{2}$. Cette question était plus difficile...

(c) $-\infty < a < b < \infty$ et $f(x) = e^x$ pour $x \in [a,b]$.

corrigé

Soit $\theta \in]0,1[$ vérifiant (2). La relation (2) donne :

$$e^a(e^h - 1) = e^{a+h} - e^a = hf'(a+\theta h) = he^{a+\theta h} = he^a e^{\theta h}.$$

On a donc $e^{\theta h} = \frac{e^h - 1}{h}$, ce qui donne

$$\theta = \frac{1}{h}\ln(\frac{e^h-1}{h}).$$

Ceci prouve bien l'unicité de θ. On utilise maintenant un DL2 de $y \mapsto e^y$ en 0 :

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon_1(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon_1(h) = 0,$$

et donc
$$\frac{e^h-1}{h} = 1 + \frac{h}{2} + h\varepsilon_1(h).$$
Comme $\theta_h \in]0,1[$, le DL1 de $y \mapsto e^y$ en 0 donne aussi

$$e^{\theta_h h} = 1 + \theta_h h + h\varepsilon_2(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon_2(h) = 0.$$

On a donc (comme $e^{\theta h} = \frac{e^h - 1}{h}$) :

$$1 + \theta_h h + h\varepsilon_2(h) = 1 + \frac{h}{2} + h\varepsilon_1(h).$$

d'où :

$$\theta_h - \frac{1}{2} = \varepsilon_1(h) - \varepsilon_2(h).$$

On obtient, finalement, $\lim_{h\to 0, h>0} \theta_h = \frac{1}{2}$.

(d) $-\infty < a < b < \infty$ et $f(x) = x^2 + x + 1$ pour $x \in [a, b]$.

corrigé

Soit $\theta \in]0, 1[$ vérifiant (2). La relation (2) donne :

$$(a + h)^2 + h - a^2 = hf'(a + \theta h) = 2h(a + \theta h) + h,$$

ce qui donne

$$h^2 = 2h^2\theta,$$

et donc $\theta = \frac{1}{2}$. Ceci donne l'unicité de θ et $\lim_{h\to 0, h>0} \theta_h = \frac{1}{2}$.

---

2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est de classe C^2. Soit $a \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}^\star$ il existe $\theta \in]0, 1[$ vérifiant (2) et donner un exemple de fonction f (et de valeurs de $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$) pour laquelle θ n'est pas unique.

corrigé

Si $h > 0$; on applique le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[a, a + h]$, il donne l'existence de $\theta \in]0, 1[$ vérifiant (2). Si $h < 0$, on obtient le même résultat en appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[a + h, a]$.

En prenant, par exemple, $f(x) = x$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$), on obtient un exemple pour lequel (2) est vraie pour tout $\theta \in]0, 1[$ (et quelquesoit $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$).

(b) On suppose que $f''(a) \neq 0$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^\star$, on choisit une valeur de $\theta \in]0, 1[$ pour laquelle (2) est vérifiée. On note θ_h cette valeur de θ. Montrer que $\lim_{h\to 0, h>0} \theta_h = \frac{1}{2}$. [On pourra utiliser la formule de Taylor-Lagrange.]

corrigé

Soit $h \in \mathbb{R}^\star$. On appilque la formule de Taylor-Lagrange à la fonction f. On obtient l'existence de $\varphi_h \in]0, 1[$ t.q. :

$$f(a + h) - f(a) = f'(a)h + \frac{f''(a + \varphi_h h)}{2} h^2.$$

En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction f', on obtient aussi l'existence de $\psi_h \in]0, 1[$ t.q. :

$$f'(a + \theta_h h) = f'(a) + f''(a + \psi_h \theta_h h)\theta_h h.$$

Comme $f(a + h) - f(a) = hf'(a + \theta_h h)$, on a donc $\frac{f''(a+\varphi_h h)}{2} = f''(a + \psi_h \theta_h h)\theta_h$. Comme $f''(a) \neq 0$ et f'' continue, il existe $\eta > 0$ t.q., pour tout $y \in [a - \eta, a + \eta$, $f''(y) \neq 0$. On peut écrire, pour $h \in [-\eta, \eta]$:

$$\theta_h = \frac{f''(a + \varphi_h h)}{2f''(a + \psi_h \theta_h h)}.$$

La continuité de f'' et le fait que $f''(a) \neq 0$ permet alors d'en déduire que $\lim_{h\to 0, h>0} \theta_h = \frac{1}{2}$.

---

3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable (en tout point de $\mathbb{R}$) et que, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$, (2) est vérifiée avec $\theta = \frac{1}{2}$.

   (a) Montrer que $f(a+h) - f(a-h) = 2hf'(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$.

   corrigé

   Comme (2) est vraie avec $\theta = \frac{1}{2}$, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$, on peut l'appliquer (si $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$) avec $a - h$ et $2h$. on obtient

   $$f(a-h+2h) - f(a-h) = 2hf'(a-h+\frac{1}{2}2h),$$

   ce qui donne bien $f(a+h) - f(a-h) = 2hf'(a)$.

   (b) Montrer que f est de classe C^∞. [On pourra, par exemple, utiliser (a) avec $h = 1$.]

   corrigé

   La question (a) donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$;

   $$f'(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1)).$$

   On déduit de cette formule, par récurrence sur n que f est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. En effet, comme f est continue, la formule donne bien que f' est continue, donc f est de classe C^1. Puis, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, si f est de classe C^n, la formule donne que f' est de classe C^n et donc f est de classe C^{n+1}.

   On a bien montré ainsi, par récurrence, que f est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. c'est-à-dire que f est de classe C^∞.

   (c) Montrer que $f'''(a) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. En déduire qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ t.q. :

   $$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

   On suppose que (2) est, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$, vérifiée seulement pour $\theta = \frac{1}{2}$. Montrer que $\alpha \neq 0$.

   corrigé

   Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$. Comme f est de classe C^3, la formule de Taylor-Lagrange donne l'existence de $\varphi_h, \psi_h \in]0,1[$ t.q. :

   $$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a+\varphi_h h)}{6}h^3,$$

   $$f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(a-\psi_h h)}{6}h^3.$$

   Comme $f(a+h) - f(a-h) = 2hf'(a)$, on en déduit :

   $$f'''(a+\varphi_h h) + f'''(a-\psi_h h) = 0.$$

   En faisant tendre h vers 0, ceci donne $f'''(a) = 0$.

   La formule de Taylor-Lagrange (en 0, à l'ordre 3) donne alors l'existence de $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ t.q. :

   $$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

   Si $\alpha = 0$, la formule (2) est vérifiée pour tout $\theta \in]0,1[$.Donc, si, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$, (2) est vérifiée seulement pour $\theta = \frac{1}{2}$, on a nécessairement $\alpha \neq 0$.

Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 1ere année, 2007/8
Analyse, 2eme semestre, dm 3 (examen de mai 2007)

Devoir à rendre (en TD) pendant la dernière semaine d'avril.

Exercice 71 (Etude d'une fonction)

On définit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + \dfrac{\cos(x)}{x^2+1}$.

1. Montrer que f est dérivable et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

corrigé

La fonction $x \mapsto \frac{\cos(x)}{x^2+1}$ est dérivable (et même de classe C^∞) car elle le quotient de deux fonctions dérivables (et de classe C^∞) et que la fonction au dénominateur ne s'annule pas. La fonction f est alors dérivable (et de classe C^∞) comme somme de fonctions dérivables (et de classe C^∞).

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on trouve $f'(x) = 3 - \frac{\sin(x)}{x^2+1} - \frac{2x\cos(x)}{(x^2+1)^2}$.

corrigé

2. Montrer que f est strictement croissante.

corrigé

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{|\sin(x)|}{x^2+1} \le 1$$

et

$$\frac{2|x\cos(x)|}{(x^2+1)^2} \le \frac{2|x|}{(x^2+1)} \le 1$$

car $2|x| \le x^2+1$. On en déduit $f'(x) \ge 3 - 1 - 1 = 1 > 0$. Ce qui prouve que f est strictement croissante.

3. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

corrigé

La fonction f est strictement croissante, c'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image, notée $\mathrm{Im}(f)$. Pour montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$, il suffit de remarquer que f est continue et que :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Dans la suite, on note g la fonction réciproque de f (la fonction g est donc aussi une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

4. Montrer que f admet un développement limité d'ordre 2 en 0 et donner ce développement.

corrigé

La fonction f est de classe C^2, elle admet donc un développement limité d'ordre 2 en 0. Pour le trouver, on remarque que :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x) \text{ et } \frac{1}{x^2+1} = 1 - x^2 + x^2\varepsilon_2(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon_i(x) = 0 \text{ pour } i = 1, 2.$$

On en déduit $f(x) = 1 + 3x - \frac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon_3(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon_3(x) = 0$.

Donner l'équation de la tangente (à la courbe de f) en 0 et la position locale de la courbe de f par rapport à cette tangente.

corrigé

La tangente (à la courbe de f) en 0 est $t(x) = 3x + 1$. O remarque que $f(x) - t(x) = \frac{\cos(x)}{x^2+1} - 1 \le 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La courbe de f est donc localement (et même globalement) en dessous de sa tangente en 0.

---

5. Montrer que g admet un développement limité d'ordre 2 en 1 et donner ce développement.

corrigé

La fonction f est de classe C^∞ et f' ne s'annule pas, on en déduit que la fonction g est aussi de classe C^∞. Pour avoir le développement limité de g d'ordre 2 en 1, on calcul $g(1)$, $g'(1)$ et $g"(1)$.

Comme $f(0) = 1$, on a $g(1) = 0$. puis $f'(x)g'(f(x)) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En prenant $x = 0$, comme $f'(0) = 3$, on a donc $3g'(1) = 1$ et $g'(1) = 1/3$. Enfin, on a $f"(x)g'(f(x)) + f'(x)^2 g"(f(x)) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En prenant $x = 0$, comme $f"(0) = -3$, on a donc $-3g'(1) + 9g"(1) = 0$, ce qui donne $g"(1) = 1/9$.

Le développement limité d'ordre 2 en 1 de g est donc $g(x) = \frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{18}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 1} \varepsilon(x) = 0$.

---

6. Donner les asymptotes de f en $\pm\infty$.

corrigé

Comme $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - 3x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1} = 0$, la fonction f admet pour asymptote en $\pm\infty$ la droite d'équation $x \mapsto 3x$.

---

7. montrer que $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ et donner les asymptotes de g en $\pm\infty$.

corrigé

La fonction g est (comme f) une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $g(x_0) = A$ et on a :

$$x \ge x_0 \Rightarrow g(x) \ge A.$$

Ceci prouve que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. De manière analogue, on a $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

Pour trouver les asymptotes de g, il suffit alors de remarquer que (comme $f \circ g(x) = x$) :

$$\lim_{x\to\pm\infty}(g(x) - \frac{1}{3}x) = \lim_{x\to\pm\infty}[g(x) - \frac{1}{3}f(g(x))] = \lim_{y\to\pm\infty}(y - \frac{1}{3}f(y)) = \frac{1}{3}\lim_{y\to\pm\infty}(3y - f(y)) = 0.$$

La fonction g admet donc pour asymptote en $\pm\infty$ la droite d'équation $x \mapsto \frac{1}{3}x$.

Exercice 72 (Points fixes de f, si $f \circ f = f$)

Soit $-\infty < a < b < +\infty$ et f une fonction continue de $[a,b]$ dans $[a,b]$. On rappelle que $x \in [a,b]$ est un point fixe de f si $f(x) = x$.

1. Montrer que f admet au moins un point fixe. [On pourra considérer la fonction g définie sur $[a,b]$ par $g(x) = f(x) - x$.]

corrigé

On remarque que $g(a) = f(a) - a \ge 0$ (car $f(a) \ge a$) et $g(b) = f(b) - b \le 0$ (car $f(b) \le b$). Comme g est continue sur $[a,b]$ et $g(a) \ge 0 \ge g(b)$, le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence de $c \in [a,b]$ t.q. $g(c) = 0$.

On suppose dans la suite que $f \circ f = f$. On pose $\mathrm{Im}(f) = \{f(x),\, x \in [a,b]\}$.

2. Montrer que tout élément de $\mathrm{Im}(f)$ est un point fixe de f.

corrigé

Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe $x \in [a,b]$ t.q. $y = f(x)$. On a donc $f(y) = f(f(x)) = f \circ f(x) = f(x) = y$. Ce qui prouve que y est un point fixe de f.

---

3. On suppose, dans cette question, que f admet un seul point fixe. Montrer que f est constante.

corrigé

Puisque f admet un seul point fixe, la question précédente donne que $\mathrm{Im}(f)$ ne peut contenir que un seul point. Ce qui prouve que f est constante.

On suppose dans la suite que f admet au moins 2 points fixes (disctints) et que f est dérivable (c'est-à-dire dérivable en tout point de $]a,b[$).

4. Montrer qu'il existe $m, M \in [a,b]$ t.q. $\mathrm{Im}(f) = [m,M]$ et $m < M$.

corrigé

L'image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue est encore un intervalle fermé borné. Il existe donc $m, M \in \mathbb{R}$ t.q. $m \leq M$ et $\mathrm{Im}(f) = [m,M]$. Comme f admet au moins 2 points fixes, $\mathrm{Im}(f)$ contient au moins deux points. Donc, $m < M$.

---

5. Montrer que $f'(x) = 1$ pour tout $x \in]m,M[$ (ici et dans la suite, m et M sont donnés par la question précédente).

corrigé

Pour tout $x \in]m,M[$, on a $f(x) = x$ (car $]m,M[\subset \mathrm{Im}(f)$). On a donc, pour tout $x \in]m,M[$, $f'(x) = 1$.

---

6. On suppose, dans cette question, que $m > a$.

   (a) Montrer que $f'(m) = 1$.

   corrigé

   On a $a < m < M \leq b$. La fonction f est donc dérivable en m. Pour $0 < h < M - m$, on a $f(m)$=m et $f(m+h) = m+h$ (car m et $(m+h)$ sont dans $\mathrm{Im}(f)$ et sont donc des points fixes de f). On a donc :

   $$\frac{f(m+h) - f(m)}{h} = 1.$$

   On en déduit que :

   $$f'(m) = \lim_{h \to 0} \frac{f(m+h) - f(m)}{h} = \lim_{h \to 0, h > 0} \frac{f(m+h) - f(m)}{h} = 1.$$

   (b) Montrer qu'il existe $x \in]a,m[$ t.q. $f(x) < m$.

   corrigé

   Le DL1 de f est m donne $f(x) = f(m) + (x-m) + (x-m)\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to m} \varepsilon(x) = 0$. Il existe donc $\eta > 0$ t.q. :

   $$|x - m| \leq \eta \Rightarrow |\varepsilon(x)| < 1.$$

   Pour $x \in [a,m[$ avec $m - x < \eta$ on a donc :

   $$f(x) < f(m) + (x-m) + |x-m| = f(m).$$

   (c) En déduire que l'hypothèse $m > a$ est en contradiction avec la définition de m.

   corrigé

   Si $m > a$, on vient de montrer l'existence de $x \in [a,b]$ t.q. $f(x) < f(m)$, ce qui impossible car $f(x) \in \mathrm{Im}(f) = [m,M]$ et $f(m) = m$ (car $m \in \mathrm{Im}(f)$ et donc m est un point fixe de f).

   ---

7. Montrer que $m = a$, $M = b$ et $f(x) = x$ pour tout $x \in [a,b]$.

corrigé

La question précédente donne $m \leq a$ et donc finalement $m = a$ (car $[m, M] = \text{Im}(f) \subset [a, b]$). De manière analogue, on peut montrer que $M = b$. On a donc $\text{Im}(f) = [a, b]$ et donc $f(x) = x$ pour tout $x \in [a, b]$.

---

8. Montrer que le résultat de la question précédente peut être faux si on retire l'hypothèse "f dérivable". [On cherche donc f continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$ t.q. $f \circ f = f$, f admet au moins deux points fixes distincts et il existe $x \in [a, b]$ t.q. $f(x) \neq x$.]

corrigé

On peut prendre, par exemple, $a = 0$, $b = 3$, $f(x) = 1$ si $0 \leq x < 1$, $f(x) = x$ si $1 \leq x \leq 2$, $f(x) = 2$ si $2 < x \leq 3$.

Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 1ere année
Analyse, 2eme semestre, mars 2008

Notes de cours et de td autorisées.

Exercice 73 (Calculs de limites)

Calculer $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin(x)}{x}$, $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{2x}}{x}$ et $\lim_{x \to 0, x > 0} \frac{x}{(\ln(1+x))^2}$.

corrigé

$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$ car $|\frac{\sin(x)}{x}| \leq \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $fx) = e^x - e^{2x}$. La fonction f est dérivable en 0 et $f(0) = 0$. On en déduit $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{2x}}{x} = f'(0) = -1$.
Pour $x \in]-1, \infty[$,, on pose $g(x) = \ln(1 + x)^2$. La fonction g est dérivable en 0 et $g(0) = 0$. On en déduit $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)^2}{x} = g'(0) = 0$. Comme $g(x) > 0$ quand $x > 0$, on a donc $\lim_{x \to 0, x > 0} \frac{x}{(\ln(1+x))^2} = +\infty$.

Exercice 74 (TVI)

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.

1. Montrer qu'il existe $x_2 \in [0, 1]$ tel que $f(x_2) = (x_2)^2$. [On pourra considérer la fonction $g(x) = f(x) - x^2$.]

   corrigé

   La fonction g est continue sur $[0, 1]$. On a $g(0) = f(0) \geq 0$ (car f prend ses valeurs dans $[0, 1]$) et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ (car f prend ses valeurs dans $[0, 1]$). Le théorème des valeurs intermédiaires donne alors qu'il existe x_2 t.q. $g(x_2) = 0$, c'est-à-dire $f(x_2) = (x_2)^2$.

---

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer qu'il existe $x_n \in [0, 1]$ tel que $f(x_n) = (x_n)^n$.

   corrigé

   Pour $x \in [0, 1]$, on pose $h_n(x) = f(x) - x^n$. La fonction h_n est continue sur $[0, 1]$ et on a, comme à la question précédente, $h_n(0) = f(0) \geq 0$ et $h_n(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne alors qu'il existe x_n t.q. $h_n(x_n) = 0$, c'est-à-dire $f(x_n) = (x_n)^n$.

---

3. On suppose maintenant que f est strictement décroissante. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in [0, 1]$, on pose $h_n(x) = f(x) - x^n$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que h_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$ et qu'il existe un unique $x_n \in [0, 1]$ tel que $f(x_n) = (x_n)^n$.

   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $h_{n+1}(x_n) > 0$. En déduire $x_{n+1} > x_n$.

Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente et que $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. Quelle est la limite de $(x_n)^n$ quand $n \to \infty$?

corrigé

La fonction $x \mapsto -x^n$ est aussi strictement décroissante sur $[0,1]$. La fonction h_n est donc strictement décroissante comme somme de deux fonctions strictement décroissantes. L'existence de $x_n \in [0,1]$ t.q. $h_n(x_n) = 0$ est donnée par la question précédente. L'unicité de x_n vient de la strict décroissance de h_n car si $x_n \in [0,1]$ est t.q. $h_n(x_n) = 0$, on a, pour tout $x \in [0,1] \setminus \{x_n\}$, $h_n(x) > 0$ si $x < x_n$ et $h_n(x) < 0$ si $x > x_n$, et donc $h_n(x) \neq 0$. Le point x_n est donc le seul élément de $[0,1]$ pour lequel h_n s'annule.

Comme f est strictement décroissante, on $f(1) < f(0)$. Puis, comme $f(0), f(1) \in [0,1]$, on a donc $f(0) > 0$ et $f(1) < 1$. On en déduit $x_n \neq 0$ (car $h_n(0) = f(0) > 0$) et $x_n \neq 1$ (car $h_n(1) = f(1) - 1 < 0$). Ce qui montre que $0 < x_n < 1$. On a donc $h_{n+1}(x_n) = f(x_n) - (x_n)^{n+1} = h_n(x_n) + (x_n)^n - (x_n)^{n+1} = (x_n)^n(1 - x_n) > 0$. Comme $h_{n+1}(x_{n+1}) = 0 < h_{n+1}(x_n)$ et que h_{n+1} est strictement décroissante, on a nécessairement $x_{n+1} > x_n$.

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante majorée (par 1), elle est donc convergente. On note a la limite de cette suite. Comme $0 < x_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a donc $a \in [0,1]$. On remarque maintenant que $\lim_{n\to\infty}(x_n)^n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ (car f est continue en a). Si $a \in [0,1[$, on a $\lim_{n\to\infty}(x_n)^n = 0$ et donc $f(a) = 0$, ce qui est impossible car la décroissance strict de f donne $f(a) > f(1) \geq 0$. On a donc nécessairement $a = 1$ (et donc $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$). Enfin, on a $\lim_{n\to\infty}(x_n)^n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(1)$.

Exercice 75 (Fonction sous linéaire)

Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et t.q. $f(0) = 0$. On définit la fonction g de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ (avec $\mathbb{R}_+ = [0,\infty[$) par :

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \text{ si } x > 0,$$

$$g(0) = f'(0).$$

1. Montrer que g est continue en tout point de $\mathbb{R}_+$.

corrigé

La fonction g est continue sur $]0,\infty[$ car c'est le quotient de deux fonctions continues et que son dénominateur ne s'annule par (sur $]0,\infty[$). On peut aussi noter que g est dérivable sur $]0,\infty[$

Comme f est dérivable en 0 et que $f(0) = 0$, On a $\lim_{x\to 0, x>0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$. La fonction g est donc continue en 0 (et donc continue sur tout $\mathbb{R}+ = [0,\infty[$).

On suppose maintenant qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, t.q., pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leq \alpha x + \beta$.

2. Montrer que g est majorée (c'est-à-dire que l'ensemble $\{g(x),\, x \in \mathbb{R}_+\}$ est majoré)

corrigé

La fonction g est continue sur $[0,1]$. La restriction de g à $[0,1]$ est donc majorée (car $[0,1]$ est fermé et borné). Il existe donc M t.q., pour tout $x \in [0,1]$, $g(x) \leq M$.

Puis, pour $x > 1$, on remarque que $g(x) \leq \alpha + \frac{\beta}{x} \leq \alpha + |\beta|$. On a donc finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) \leq C = \max\{M, \alpha + |b|\}$, ce qui prouve que g est majorée.

---

3. On suppose, dans cette question, que $\alpha < f'(0)$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $g(a) = \sup\{g(x),\, x \in \mathbb{R}_+\}$. Montrer que $g(a) = f'(a)$.

corrigé

On choisit $\varepsilon = f'(0) - \alpha > 0$, et on pose $A = \frac{|\beta|}{\varepsilon} \geq 0$. Pour $x \geq A$, on a donc $g(x) \leq \alpha + \frac{\beta}{x} \leq \alpha + \varepsilon = f'(0)$.

La fonction g est continue sur l'intervalle fermé borné $[0, A]$, il existe donc $a \in [0, A] \subset \mathbb{R}_+$ t.q. $g(a) = \sup\{g(x),\ x \in [0, A]\}$. Mais, comme $\sup\{g(x),\ x \in [0, A]\} \geq g(0) = f'(0)$ et que pour $x > A$ on a $g(x) \leq f'(0)$, on a donc $g(a) = \sup\{g(x),\ x \in \mathbb{R}_+\}$.

Si $a = 0$, on a bien $g(a) = f'(a)$. Si $a > 0$, le fait que $g(a) = \sup\{g(x),\ x \in \mathbb{R}_+\}$ et que g soit dérivable en a permet de montrer que $g'(a) = 0$ (comme dans la démonstration du théorème des accroissements finis). Comme $xg(x) = f(x)$ pour tout $x > 0$, on a $g(x) + xg'(x) = f'(x)$ pour tout $x > 0$ et donc $g(a) = f'(a)$.

---

4. On suppose, dans cette question, que $f(x) = x - \frac{x^3}{1+x^2}$.
   (a) La fonction f vérifie-t-elle les hypothèses données au début de l'exercice ?

   corrigé

   Oui... f est dérivable et $f(0) = 0$.

   (b) Donner des valeurs de α et β pour lesquelles, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leq \alpha x + \beta$.

   corrigé

   Comme $\frac{x^3}{1+x^2} \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, les valeurs suivantes conviennent : $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

   (c) Montrer qu'il existe un unique $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $g(a) = \sup\{g(x),\ x \in \mathbb{R}_+\}$ et donner cette valeur de a.

   corrigé

   On a $g(x) < 1$, pour tout $x \in]0, \infty[$, et $g(0) = 1$. Il existe donc un unique $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $g(a) = \sup\{g(x),\ x \in \mathbb{R}_+\}(= 1)$ et $a = 0$.

   ---

5. On suppose, dans cette question, que $\alpha = f'(0)$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $g(a) = \sup\{g(x),\ x \in \mathbb{R}_+\}$ et que $g(a) = f'(a)$.

   corrigé

   On pose $\gamma = \sup\{g(x),\ x \in \mathbb{R}_+\}$. On a $\gamma \geq g(0) = f'(0)$ et donc distingue deux cas ;

   Premier cas : $\gamma = f'(0)$. Dans ce cas, $a = 0$ convient car $g(0) = f'(0) = \gamma$.

   Deuxième cas : $\gamma > f'(0)$.
   On choisit alors $\varepsilon = \frac{\gamma - f'(0)}{2} > 0$, et on pose $A = \frac{|\beta|}{\varepsilon} \geq 0$. Pour $x \geq A$, on a donc $g(x) \leq \alpha + \frac{\beta}{x} \leq \alpha + \varepsilon = f'(0) + \varepsilon = \frac{\gamma + f'(0)}{2} < \gamma$. On a donc $\sup\{g(x),\ x \in [A, \infty[\} < \gamma$ et donc :

   $$\gamma = \sup\{g(x), x \in \mathbb{R}_+\} = \max\{\sup\{g(x), x \in [0, A]\}, \sup\{g(x), x \in [A, \infty[\}\} = \sup\{g(x), x \in [0, A]\}.$$

   La fonction g est continue sur l'intervalle fermé borné $[0, A]$, il existe donc $a \in [0, A] \subset \mathbb{R}_+$ t.q. $g(a) = \sup\{g(x),\ x \in [0, A]\}$. Ce qui donne bien $g(a) = \gamma$.

   La démonstration de $g(a) = f'(a)$ est identique à celle de la question 3.

   ---

6. Montrer, en donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenable f) qu'il peut ne pas exister $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $g(a) = \sup\{g(x),\ x \in \mathbb{R}_+\}$ (pour cet exemple, on aura donc nécessairement $\alpha > f'(0)$).

   corrigé

   On peut prendre, par exemple, f définie par $f(x) = x + \frac{x^3}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a bien f dérivable, $f(0) = 0$. Comme $\frac{x^2}{1+x^2} < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, les valeurs $\alpha = 2$ et $\beta = 0$ conviennent et on a $g(x) < 2$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Enfin, on a $\lim_{x \to \infty} g(x) = 2$. on en déduit que $\sup\{g(x),\ x \in \mathbb{R}_+\}$ $=2$ et qu'il n'existe pas d'élément a de $\mathbb{R}_+$ t.q. $g(a) = \sup\{g(x),\ x \in \mathbb{R}_+\}$.

Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 1ere année
Analyse, 2eme semestre, examen, mai 2008

Notes de cours et de td autorisées. Il n'est pas demandé de refaire des démonstrations vues en cours.

Exercice 76 (Calcul de limite)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = (x^2+1)^\alpha - (x^2+2)^\alpha$.

1. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ dans les cas simples suivants : $\alpha = 2$, $\alpha = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$.
2. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (en justifiant les calculs). [distinguer les cas $0 < \alpha < 1$ et $\alpha > 1$.]

Exercice 77 (Dérivabilité d'un quotient, utilisation des développements limités)

Soit f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 (c'est-à-dire dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et de dérivée continue). On suppose que $f(0) = g(0) = 0$ et $g(x) \neq 0$ si $x \neq 0$. Pour tout $x \neq 0$, on peut donc définir $h(x)$ en posant :

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

1. On suppose, dans cette question, que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ et $g(x) = x^3$. Montrer que $\lim_{x\to 0} h(x) = +\infty$.

Dans la suite de l'exercice on suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $\lim_{x\to 0} h(x) = a$ et on pose $h(0) = a$.

2. Montrer que h est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable en tout point x de $\mathbb{R}^\star$. Pour $x \neq 0$, donner $h'(x)$ en fonction de $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$ et $g'(x)$.
3. On suppose que $g'(0) \neq 0$. Montrer que $\lim_{x\to 0} h(x) = \frac{f'(0)}{g'(0)}$ (et donc que $a = \frac{f'(0)}{g'(0)}$).
4. On considère, dans cette question, les fonctions f et g suivantes :

$$f(x) = x + x^2, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \begin{cases} x + x^2, \text{ si } x \geq 0, \\ x - x^2, \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

   Montrer que f et g sont bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $g'(0) \neq 0$. Donner la limite de $h(x)$ quand $x \to 0$. Montrer que h n'est pas dérivable en 0. [On pourra commencer par calculer $h(x) - 1$ pour $x \neq 0$.]
5. On considère, dans cette question, les fonctions f et g suivantes (de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$) :

$$f(x) = \ln(1 + x^2), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = x(2 + \sin x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

   Donner la limite de $h(x)$ quand $x \to 0$. Montrer que h est dérivable en 0 et que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
6. On suppose maintenant que f et g sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que $g'(0) \neq 0$.
   (a) Montrer que h est dérivable en 0 et calculer $h'(0)$ en fonction de $f'(0)$, $g'(0)$, $f''(0)$ et $g''(0)$.
   (b) Montrer que h' est continue en 0 et en déduire que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
7. On ne suppose plus que $g'(0) \neq 0$ mais on suppose que f et g sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe $n \geq 1$ t.q. $g^{(n)}(0) \neq 0$ et, pour tout $k < n$, $g^{(k)}(0) = 0$. (On suppose toujours que $\lim_{x\to 0} h(x) = a$.)
   (a) Montrer que $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k < n$.
   (b) Montrer que $a = \frac{f^{(n)}(0)}{g^{(n)}(0)}$.
   (c) Montrer que h est dérivable en 0 et calculer $h'(0)$ en fonction de $f^{(n)}(0)$, $g^{(n)}(0)$, $f^{(n+1)}(0)$ et $g^{(n+1)}(0)$.
   (d) Montrer que h' est continue en 0 et en déduire que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 1ere année
Analyse, 2eme semestre, examen, juin 2008

Notes de cours et de td autorisées. Il n'est pas demandé de refaire des démonstrations vues en cours.

Exercice 78 (Etude de fonction)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = a(1+x^2)^{\frac{1}{x}} - \cos x$$

1. Calculer en fonction de a la limite de f en 0. En déduire que f peut être prolongée par continuité sur $\mathbb{R}$.

   Dans la suite, on note de nouveau f ce prolongement à $\mathbb{R}$. On note C_f le graphe de f.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser en fonction de a la dérivée de f en 0.
4. Donner la tangente à C_f en $(0, f(0))$ et préciser en fonction de a la position locale de C_f par rapport à cette tangente.

Exercice 79 (Développement limité)

On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0, \\ f(0) &= 0. \end{aligned}$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $u > 0$, $e^u \geq \dfrac{u^q}{q!}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer, en utilisant la question précédente, que $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^n} = 0$. En déduire que f admet un développement limité d'ordre n en 0 et donner ce développement.

Exercice 80 (Point fixe)

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$ et vérifiant

$$\forall x_1, x_2 \in [0,1],\ |x_1 - x_2| \leq |f(x_1) - f(x_2)|\,.$$

1. Montrer que f est injective.
2. Montrer que $\{f(0), f(1)\} = \{0, 1\}$.
3. Montrer que f est surjective.
4. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 81 (Fonctions höldériennes)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ et $k \in \mathbb{R}, k > 0$. On suppose que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|f(y) - f(x)| \leq k|y-x|^\beta$.

1. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.
2. On suppose, dans cette question, que $\beta > 1$. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que $f'(x) = 0$. En déduire que f est constante.
3. (Exemple) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = |x|^{\frac{1}{2}}$. Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|g(y) - g(x)| \leq |y-x|^{\frac{1}{2}}$. [On pourra montrer qu'on peut supposer $|y| \geq |x|$, et distinguer les cas où x et y sont de même signe et où x et y sont de signe contraire.]