Université de Marseille, janvier 2008
Licence de Mathématiques, 1ere année
Analyse, 2eme semestre, TD 1

Exercice 1

Exprimer à l'aide d'intervalles de $\mathbb{R}$ les ensembles suivants :

1. $\{x \in \mathbb{R}\,;\, 2 < |x| < 6\}$, $\{x \in \mathbb{R}\,;\, 3 \leq |x| \leq 7\}$,
2. $\{x \in \mathbb{R}\,;\, |x| > a\}$ ($a \in \mathbb{R}$ est donné, discuter suivant les valeurs de a),
3. $\{x \in \mathbb{R}\,;\, |x| < \varepsilon\}$ (avec $\varepsilon > 0$, donné).

Exercice 2

Soit $x \in [-2, 1]$ et $y \in [2, 3[$. Donner des encadrements des quantités suivantes :
$x + y$, $x - y$, $-2x + y$, $-x - y$, xy.

Exercice 3

Soit a, $b \in \mathbb{R}$. Montrer les implications suivantes :

1. $(\forall \varepsilon > 0,\ |a| < \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.
2. $(\forall \varepsilon > 0,\ a < b + \varepsilon) \Rightarrow a \leq b$.
3. $(\forall \varepsilon > 0,\ |a - b| < \varepsilon) \Rightarrow a = b$.

Pour les exercices suivants, on rappelle que si A est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, il existe un nombre réel, noté $\sup(A)$, qui est le plus petit des majorants de A. De même, si A est une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$, il existe un nombre réel, noté $\inf(A)$, qui est le plus grand des minorants de A.

Exercice 4

Soit A est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. On pose $-A = \{-a,\ a \in A\}$. Montrer que $-A$ est une partie non vide minorée $\mathbb{R}$. Comparer $\inf(-A)$ et $\sup(A)$.

Exercice 5

Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ t.q. $A \subset B$. On suppose que B est majorée. Montrer que A est majorée et que $\sup(A) \leq \sup(B)$. Cette dernière inégalité est-elle nécessairement stricte si l'inclusion de A dans B est stricte ?

Exercice 6

Soit A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. On pose $A + B = \{a + b,\ a \in A$ et $b \in B\}$. Montrer que $A + B$ est majorée et comparer $\sup(A + B)$ et $\sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 7

1. Montrer que toute suite convergente dans $\mathbb{R}$ est bornée (c'est-à-dire majorée et minorée).

2. Montrer que toute suite croissante majorée est convergente dans $\mathbb{R}$.

Exercice 8

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. On suppose que A est majorée et on pose $a = \sup(A)$. Montrer qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a.

2. On suppose que A n'est pas majorée. Montrer qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers l'infini.

Exercice 9

Soit $l \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ecrire à l'aide des quantificateurs les phrases suivantes :

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers l quand n tend vers $+\infty$.

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

3. $f(x)$ ne tend pas vers l quand x tend vers a.

4. $f(x)$ ne tend pas vers l quand x tend vers $+\infty$.

.