Université de Marseille, février 2008
Licence de Mathématiques, 1ere année
Analyse, 2eme semestre, TD 3

Exercice 1 (Fonction continue, non nulle en un point)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f est continue en a et que $f(a) \neq 0$. Montrer que f est non nulle sur un intervalle ouvert contenant a.

Exercice 2 (Limite en $+\infty$)

Soit $f\ :\mathbb{R}\ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 3 (Fonction lipschitzienne)

Soit $f\ :\mathbb{R}\ \to \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+$. On suppose que $|f(x)-f(y)| \leq k|x-y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que f est continue (sur tout R).

Exercice 4

Pour quelle valeur de α la fonction f, définie ci-après, est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^3-8}{x-2} \text{ si } x \neq 2 \\ \alpha \text{ si } x = 2. \end{array} \right.$$

Exercice 5 (Polynôme de degré impair)

Montrer que toute fonction polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de degré impair, s'annule en au moins un point.

Exercice 6 (Existence d'un maximum)

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Montrer que f admet un maximum (c'est-à-dire qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q., pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leq f(a)$).

Exercice 7 (Injectivité et continuité donne monotonie)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et $f\ [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et injective. Montrer que f est monotone. [Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.]

Exercice 8 (Prolongement par continuité)

Soit f l'application de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{1 - |x|}.$$

1. La fonction f est-elle continue en 0 ?

2. Calculer $\lim_{x \to -1} f(x)$ et $\lim_{x \to 1} f(x)$.

3. Existe-t-il une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}$ et qui est égale à f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$?

Exercice 9

Soit f et g deux fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, continues et t.q. $f(0) = g(1) = 0$ et $g(0) = f(1) = 1$. Montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \ \exists x \in [0,1], \ f(x) = \lambda g(x).$$

Exercice 10 (Moyennes harmonique et arithmétique)

1. Montrer que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $0 < a < b$, on a :
$$a < \frac{2ab}{a+b} < \frac{a+b}{2} < b.$$

2. Soit $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $0 < u_0 < v_0$. On définit, par récurrence, les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :
$$u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$
   (a) Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bien définies (c'est-à-dire que $u_n + v_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) et que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes (dans $\mathbb{R}$).
   (b) Montrer que $\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} v_n$.
   (c) Vérifier que la suite $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
   (d) Donner la limite commune au suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 11 (Valeur intermédiaire)

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, l'ensemble $\{s \in [0,1] \text{ t.q. } f(s) = \frac{f(0)+f(t)}{2}\}$ est non vide.

   Pout $t \in [0,1]$, on pose $\varphi(t) = \inf\{s \in [0,1] \text{ t.q. } f(s) = \frac{f(0)+f(t)}{2}\}$.

2. Montrer que $\varphi(t) \in [0,1]$ et que $f(\varphi(t)) = \frac{f(0)+f(t)}{2}$.

3. Montrer que si f est strictement croissante, l'application φ ainsi définie de $[0,1]$ dans $[0,1]$ est continue.

4. Donner un exemple de fonction f pour lequel la fonction φ n'est pas continue.