Université de Marseille, février 2008
Licence de Mathématiques, 1ere année
Analyse, 2eme semestre, td4

Exercice 1 (Fonction dont l'image est discrète)

Soit $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue (en tout point de $\mathbb{R}$).

1. On suppose que $f(x) \in \{0, 1\}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante. [utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.]
2. On remplace maintenant l'hypothèse "$f(x) \in \{0, 1\}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$" par "$\mathrm{card}\{f(x), x \in \mathbb{R}\} < \infty$". Peut on aussi montrer que f est constante ? (justifier la réponse...)

Exercice 2 (Continuité de "max" et "min")

1. Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ et $\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.
2. Soit f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit les applications $f\top g$ et $f\perp g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :
$$(f\top g)(x) = \max\{f(x), g(x)\},\ (f\perp g)(x) = \min\{f(x), g(x)\},\ \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$
Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f et g sont continues en a. Montrer que $f\top g$ et $f\perp g$ sont continues en a.

Exercice 3 (Convexe implique continue)

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est convexe, c'est à dire que $f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$ pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.
On pose $\alpha = f(1) - f(0)$, $\beta = f(0) - f(-1)$ et $\gamma = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

1. Soit $x \in]0, 1[$. Montrer que $\beta x \leq f(x) - f(0) \leq \alpha x$. [Utiliser le fait que $x = t1 + (1 - t)0$, avec $t = x$, et $0 = tx + (1 - t)(-1)$, avec $t = \frac{1}{1+x}$.]
2. Soit $x \in] - 1, 1[$. Montrer que $|f(x) - f(0)| \leq \gamma|x|$. En déduire que f est continue en 0.
3. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (Borne supérieure atteinte)

Soit f une application continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ (on rappelle que $\mathbb{R}_+ = [0, \infty[$). On suppose que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Monter que $\{f(x),\ x \in \mathbb{R}_+\}$ est majoré est qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $f(a) = \sup\{f(x),\ x \in \mathbb{R}_+\}$.

Exercice 5 (Exercice sur les valeurs intermédiaires)

Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $f(0) = f(1)$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. pour $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$, on pose $g(x) = f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$.

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n}) = 0$.
2. Montrer qu'il existe $x_0, x_1 \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ t.q. $g(x_0) \leq 0$ et $g(x_1) \geq 0$.
3. Monter qu'il existe $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ t.q. $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$.