

Université de Marseille, mars 2008
Licence de Mathématiques, 1ère année
Analyse, 2ème semestre, TD 6

Exercice 1 (Dérivabilité en un point)

Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que f est dérivable en tout point x différent de a et que f' (définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$) admet une limite en a , notée a_1 . Montrer que f est dérivable en a et que $f'(a) = a_1$. [Cette question a été faite au TD 5 avec $a = 0$.]
2. On suppose que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}$ (définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$) admet une limite en a , notée a_n . Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. [On pourra raisonner par récurrence sur n .]

Exercice 2 (Fonction C^∞ non analytique)

On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-\frac{1}{x}}, \text{ si } x > 0, \\ f(x) &= 0, \text{ si } x \leq 0. \end{aligned}$$

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, \infty[$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme p_n t.q.

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}, \text{ si } x > 0.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Soit $p \in \mathbb{Z}$, Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^p} = 0.$$

[On rappelle que $e^u \geq \frac{u^q}{q!}$ pour tout $u > 0$ et tout $q \in \mathbb{N}$.]

- (b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} f^{(n)}(x) = 0$.
4. Montrer que f est de classe C^∞ (sur $\mathbb{R}$).
5. Montrer que f n'est pas analytique.

Exercice 3 (DL, exemple 1)

On définit f sur $] -\infty, 1[$ par :

$$f(x) = \arctan \frac{1}{1-x}.$$

Donner le développement limité à l'ordre 3 de f en 0.

Exercice 4 (DL d'un polynôme...)

Donner le développement limité à l'ordre 7 en -1 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 1$.

Exercice 5 (Utilisation des DL)

Donner la limite en 0 de f définie sur $]0, \infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

Exercice 6 (Etude de fonction)

Etudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x \arctan x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

[Montrer que f est paire. Calculer f' et f'' . Etudier les asymptotes.]

Exercice 7 (DL, exemple 2)

On définit f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est de classe C^∞ . [Reprendre un exercice précédent...]
2. Calculer f' et f'' .
3. Montrer que f est paire, donner son tableau de variation et sa limite en $+\infty$.
4. Donner le développement limité de f en 0.

Exercice 8 (DL, exemple 3, fastidieux...)

On définit f sur $]0, \infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{\log(1+x)}{x}}$.

1. Montrer que f admet une limite (finie) en 0, notée l . On pose dans la suite $f(0) = l$.
2. Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de f .

Exercice 9 (DL d'une fonction réciproque)

On définit f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + \sin x$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, strictement croissante. On note, dans la suite, g sa fonction réciproque.
2. Montrer que f et g sont dérivables en tout point de $\mathbb{R}$.
3. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de g .

Exercice 10 (Bolzano-Weierstrass)

Soit $-\infty < a < b < \infty$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de $[a, b]$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \inf\{x_p, p \geq n\}$. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante majorée. En déduire qu'il existe $x \in [a, b]$ t.q. $a_n \rightarrow x$ quand $n \rightarrow \infty$.
2. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\varphi(n) \geq n$ t.q. $|x_{\varphi(n)} - a_n| \leq \frac{1}{n}$ (où a_n est défini à la question précédente). En déduire que $x_{\varphi(n)} \rightarrow x$ quand $n \rightarrow \infty$ (où x est défini à la question précédente).

Exercice 11 (Théorème de Heine, vu au DM1)

Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose que f n'est pas uniformément continue.
 - (a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n, y_n \in [a, b]$ t.q. $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.
 - (b) Montrer qu'il existe un point $x \in [a, b]$ t.q. f ne soit pas continue en x . [Utiliser l'exercice précédent.]
2. On suppose que f est continue (sur $[a, b]$). Montrer que f est uniformément continue (sur $[a, b]$).