

Université de Marseille, mars 2008
Licence de Mathématiques, 1ère année
Analyse, 2ème semestre, TD 7

Exercice 1 (Condition nécessaire et condition suffisante de minimalité)

Soit f une application $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que f est de classe C^1 et que f admet un minimum local en a . Montrer que $f'(a) = 0$.
2. On suppose que f est de classe C^2 , $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$. Montrer que f admet un minimum local en a .
3. Donner un exemple pour lequel f est de classe C^2 , $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ et f n'admet pas un minimum local en a .

Exercice 2 (Equivalents)

1. Soit $\alpha > 0$. Montrer que $((1+x)^\alpha - 1) \sim \alpha x$ en 0.
2. Montrer que $(1+x+x^2) \sim x^2$ en $+\infty$.
3. Soit f, g, h des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On suppose que $f \sim \lambda h$ et $g \sim \mu h$ en 0 et que $\lambda + \mu \neq 0$. Montrer que $(f+g) \sim (\lambda+\mu)h$ en 0. Donner un exemple où ce résultat est faux si $\lambda + \mu = 0$.
4. Soit f et g des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(x) > 0$ et $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f \sim g$ en 0 et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$. On pose $h(x) = \ln(x)$ pour $x > 0$. Montrer que $h \circ f \sim h \circ g$ en 0.
5. Soit f, g, h des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f \sim h$ en 0 et que $g = o(h)$ au voisinage de 0. Montrer que $(f+g) \sim h$ en 0.

Exercice 3 (Limite à l'infini)

Soit f une fonction dérivable de $]0, \infty[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Exercice 4 (Prolongement par continuité)

Pour $x \in]0, 1[$, on pose $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$. Peut-on prolonger f par continuité en 0 et en 1 ?

Exercice 5 (Calcul de primitives)

1. Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^4 + 3x^2 - x$. Calculer F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $F' = f$ et $F(0) = 0$.
2. Soit f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$. Calculer F de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $F' = f$ et $F(0) = 0$.
3. Soit f de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2}$. Calculer F de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $F' = f$ et $F(1) = 0$.

Exercice 6 (Limite en 0)

Trouver les limites en 0 des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^*$:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{1+x^2} - \cos(x) \right), \quad g(x) = \frac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x}, \quad h(x) = \frac{e^x - \cos(x) - \sin(x)}{x^2}.$$

Exercice 7 (DL3)

Calculer le DL3 en 0 de f définie pour $x \in]-1, 1[$ par $f(x) = \sin(x) - \cos(x) + \tan(x) + \frac{1}{1-x}$.
 Calculer le DL3 en $\frac{\pi}{2}$ de f définie pour $x \in]0, \pi[$ par $f(x) = \ln(\sin(x))$.

Exercice 8 (DL4)

Donner le DL4 en 0 des fonctions suivantes (définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) :

$$f(x) = (1 + \sqrt{1 + x^2})^{\frac{1}{2}}, \quad g(x) = e^{\cos(x)}.$$

Exercice 9 (DLn)

On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{e^x - 1} \text{ si } x \neq 0, \\ f(0) &= 1 \end{aligned} \tag{1}$$

Montrer que f est continue en 0 et admet un DLn en 0, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 10 (Equivalents)

Soit f, g, φ, ψ définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = x^4 + 1$, $\varphi(x) = x^3 - 3x$, $\psi(x) = x^3$.

1. Montrer que $f \sim g$ en 0.
2. Montrer que $\ln(f)$ et $\ln(g)$ sont définies sur $] -1, \infty[$ et que $\ln(f) \not\sim \ln(g)$ en 0.
3. Montrer que $\varphi \sim \psi$ en $+\infty$.
4. Montrer que $e^\varphi \not\sim e^\psi$ en $+\infty$.

Exercice 11 (Fonction indéfiniment dérivable et à support compact)

On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, \text{ si } x \leq -1, \\ f(x) &= e^{\frac{1}{x^2-1}}, \text{ si } -1 < x < 1, \\ f(x) &= 0, \text{ si } x \geq 1. \end{aligned}$$

1. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$
2. (a) Montrer que f est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$.
 (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe deux polynômes p_n et q_n t.q.:

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{q_n(x)} e^{\frac{1}{x^2-1}}, \text{ pour tout } -1 < x < 1.$$

(On ne demande de calculer p_n et q_n mais seulement de montrer leur existence.)

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f^{(n)}(x) = 0$.
3. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. [On pourra utiliser le résultat suivant, vu en cours et en TD : Soit $\infty \leq b < a < c \leq \infty$ et g une application de $]b, c[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que g est dérivable pour tout $x \in]b, c[, x \neq a$, et que g' (définie sur $]b, c[\setminus \{a\}$) admet une limite en a , notée l . Alors, g est dérivable en a et $g'(a) = l$.]
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, donner le développement limité de f , à l'ordre n , au point 1.