Université de Marseille, avril 2008
Licence de Mathématiques, 1ere année
Analyse, 2eme semestre, TD 8

Exercice 1 (Formule de la moyenne)

Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On note $\mathrm{Im}(f) = \{f(x), x \in [a,b]\}$, $m = \inf(\mathrm{Im}(f))$ et $M = \sup(\mathrm{Im}(f))$.

1. Montrer qu'il existe $\mu \in [m, M]$ t.q. :
$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a).$$
2. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ t.q. :
$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Exercice 2 (Intégrale d'une fonction positive)

Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$, et qu'il existe $c \in [a,b]$ t.q. $f(c) > 0$. Montrer que $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Exercice 3 (Intégrale impropre)

On définit l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{array}{l} f(x) = 0, \text{ si } x \leq 0, \\ f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}, \text{ si } x > 0. \end{array}$$

1. Montrer que f est continue et dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f' est continue en tout point sauf 0.
3. Soit $0 < a < b < \infty$. Montrer que :
$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt.$$
4. Soit $a > 0$. Pour $0 < x < a$, on pose, $g(x) = \int_x^a f'(t)dt$. Montrer que $g(x)$ a une limite (dans $\mathbb{R}$) quand $x \to 0$, avec $x > 0$. On note (improprement... car f' n'est pas continue sur $[0,a]$) $\int_0^a f'(t)dt$ cette limite. Montrer que :
$$f(a) - f(0) = \int_0^a f'(t)dt.$$

Exercice 4 (Calcul d'intégrales)

Calculer les intégrales suivantes :
$$\int_0^3 x^3 dx, \qquad \int_1^4 \frac{x^2-1}{x^2} dx, \qquad \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx.$$

Exercice 5 (Convergence de l'intégrale)

Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et φ une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\varphi_n \to \varphi$ simplement quand $n \to \infty$ (c'est-à-dire que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$, pour tout $x \in [0,1]$).

1. Montrer que si $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|\, dx = 0$, alors $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx = \int_0^1 \varphi(x)\, dx$.

2. Montrer que si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ, alors $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx = \int_0^1 \varphi(x)\, dx$.

3. Donner un exemple pour lequel $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers φ et :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx = \int_0^1 \varphi(x)\, dx.$$

4. Donner un exemple pour lequel $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx \neq \int_0^1 \varphi(x)\, dx$.

5. Si la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait les deux conditions :

   (a) Pour tout ε, $0 < \varepsilon < 1$, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ sur $[\varepsilon, 1]$,

   (b) Les φ_n sont à valeurs dans $[-1, +1]$,

   montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx = \int_0^1 \varphi(x)\, dx$.