**Université de Marseille, mars 2007**
**Licence de Mathématiques, 1ere année**
**Analyse, 2eme semestre, partiel**

**Exercice 1 (Borne supérieure d'une fonction)**

On définit la fonction $f$ de $]0,\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{x}\cos(x)$ pour $x \in ]0,\infty[$. On pose $A = \{f(x), x \in ]0,\infty[\}$.

1. Calculer les limites de $f$ en 0 et $+\infty$.

**corrigé**

$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

2. Montrer que la fonction $f$ n'est pas minorée (i.e. la partie $A$ n'est pas minorée).

**corrigé**

La fonction $f$ n'est pas minorée car $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

3. (a) Montrer qu'il existe $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < \beta$, t.q., pour tout $x \in ]0,\infty[$, $f(x) \le \sup B$ avec $B = \{f(y);\ y \in [\alpha,\beta]\}$.

**corrigé**

On prend $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $\beta = \pi$. La fonction $f$ est continue sur $[\alpha,\beta]$ qui est un intervalle fermé borné. La fonction $f$ est donc bornée sur $[\alpha,\beta]$ et atteint ses bornes. il existe donc $c \in [\alpha,\beta]$ t.q. $f(c) = \sup B$ (et donc, pour tout $x \in [\alpha,\beta]$, $f(c) \ge f(x)$).

On a, en particulier, $f(c) \ge f(\beta) = f(\pi) = \frac{1}{\pi}$.
Pour $x \in ]0,\frac{\pi}{2}[$, on a $f(x) \le 0 < \frac{1}{\pi} \le f(c)$.
Pour $x > \pi$, on a $f(x) \le |f(x)| \le \frac{1}{x} < \frac{1}{\pi} \le f(c)$.
On a donc bien, pour tout $x \in ]0,\infty[$, $f(x) \le f(c) = \sup B$ (ce qui donne $\sup A = \sup B$).

(b) En déduire que la fonction $f$ est majorée (i.e. la partie $A$ est majorée) et que la borne supérieure de $f$ est atteinte.

**corrigé**

La démonstration précédente donne que $f(c) = \sup A$. La fonction $f$ est donc majorée (i.e. la partie $A$ est majorée) et la borne supérieure de $f$ est atteinte.

Soit $a \in ]0,\infty[$ t.q. $f(a) = \sup A$ (c'est-à-dire $f(a) \ge f(x)$ pour tout $x \in ]0,\infty[$).

4. Montrer que $f(a) > 0$ et que $a < 2\pi$.

**corrigé**

On a, en particulier, $f(a) \ge f(\pi) = \frac{1}{\pi} > 0$.

La démonstration de la question 3(a) donne que $a \in [\frac{\pi}{2},\pi]$ (car $f(x) < \sup B$ si $x \notin [\frac{\pi}{2},\pi]$ et $f(a) = \sup B$). On a donc $a \le \pi < 2\pi$. Mais on peut aussi démontrer que $a < 2\pi$ en utilisant la périodicité de la fonction $x \mapsto \cos(x)$. En effet, on remarque que d'abord que $f(2\pi) < 0$, donc $a \ne 2\pi$. Puis, si $a > 2\pi$, on a $f(a-2\pi) = \frac{-\cos(a)}{a-2\pi} > \frac{-\cos(a)}{a}$ car $\cos(a) > 0$. On en déduit $f(a-2\pi) > f(a)$, en contradiction avec la définition de $a$. On a donc bien montré que $a < 2\pi$.

5. Montrer que $\frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{2}$ et que $f'(a) = 0$.

**corrigé**

On sait déjà que $a \in ]0, 2\pi[$. Comme $f(a) > 0$ et que $f(x) \leq 0$ si $x \in ]0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$, on en déduit que $a \in ]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

Le fait que $f'(a) = 0$ a été vu en cours (il suffit de remarquer que $f(a+h) - f(a) \leq 0$ pour tout $h \neq 0$ t.q. $a + h > 0$ et d'utiliser la définition de $f'(a)$).

---

6. Pour $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, on pose $g(x) = x\sin(x) + \cos(x)$. Montrer qu'il existe un unique $b \in ]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ t.q. $g(b) = 0$. Montrer que $b \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[$. Montrer que $a = b$ et en déduire que $f$ atteint son maximum en un unique point.

**corrigé**

Pour $x \in ]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, on a $g'(x) = x\cos(x) < 0$. La fonction $g$ est donc continue et strictement décroissante (ceci a été vu en cours) sur $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Comme $g(\frac{\pi}{2}) > 0$ et $g(\frac{3\pi}{2}) < 0$, il existe un unique $b \in ]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ t.q. $g(b) = 0$ (l'existence de $b$ découle du théorème des valeurs intermédiaires et l'unicité de $b$ découle de la stricte décroissance de $g$).

Comme $g(\pi) < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires (appliqué avec l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \pi]$) permet de dire que cet unique $b$ appartient à l'intervalle $]\frac{\pi}{2}, \pi[$.

Comme $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, pour tout $x \in ]0, \infty[$, et comme l'on sait que $a \in ]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ et $f'(a) = 0$, on a nécessairement $a = b$. Ceci prouve que $b$ est l'unique point de $]0, \infty[$ pour lequel $f$ atteint son maximum.

---

**Exercice 2 (Valeur intermédiaire)**

Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Soit $f$ une fonction continue de $[0, \alpha[$ dans $\mathbb{R}$, t.q. $f(0) < 0$ et $\lim\limits_{x \to \alpha, x < \alpha} f(x) = +\infty$.

Soit $g$ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, t.q. $g(0) < 0$ et $g(\beta) > 0$.

Montrer qu'il existe $x \in ]0, \min(\alpha, \beta)[$ t.q. $f(x)(x - \beta) - g(x) = 0$. [On pourra distinguer les cas $\beta < \alpha$, $\beta > \alpha$ et $\beta = \alpha$.]

**corrigé**

Pour $x \in [0, \alpha[$, on pose $\varphi(x) = f(x)(x - \beta) - g(x)$. La fonction $\varphi$ est donc continue sur $[0, \alpha[$.

**Cas** $\beta < \alpha$**.** Dans ce cas, la fonction $\varphi$ est continue sur $[0, \beta]$. On remarque que $\varphi(0) > 0$ et $\varphi(\beta) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne donc l'existence de $x \in ]0, \beta[$ t.q. $\varphi(x) = 0$.

**Cas** $\beta > \alpha$**.** Dans ce cas, on a $\lim_{x \to \alpha, x < \alpha} \varphi(x) = -\infty$. Il existe donc, par exemple, $\eta > 0$ t.q. :

$$x \in [0, \alpha[,\ x \geq \alpha - \eta \Rightarrow \varphi(x) < 0.$$

On en déduit l'existence de $\gamma \in ]0, \alpha[$ t.q. $\varphi(\gamma) < 0$. Comme $\varphi(0) > 0$, le théorème des valeurs intermédiaires donne donc l'existence de $x \in ]0, \gamma[ \subset ]0, \alpha[$ t.q. $\varphi(x) = 0$.

**Cas** $\beta = \alpha$**.** On modifie légèrement le raisonnement précédent. Comme $\lim_{x \to \alpha, x < \alpha} f(x) = +\infty$. Il existe $\eta > 0$ t.q. :

$$x \in [0, \alpha[,\ x \geq \alpha - \eta \Rightarrow f(x) > 0.$$

Comme $x - \beta < 0$ si $x < \alpha = \beta$, on a donc

$$x \in [0, \alpha[,\ x \geq \alpha - \eta \Rightarrow \varphi(x) < 0.$$

On conclut alors comme dans le cas précédent.

---

**Exercice 3 (TAF. . . )**

Soit $f$ une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f$ est dérivable pour tout $x \neq 0$ et que $\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$.

1. Montrer que $f$ n'est pas dérivable en 0.

   **corrigé**

   Pour tout $h \neq 0$, le théorème des accroissements finis donne l'existence de $c_h \in ]\min(0,h), \max(0,h)[$ t.q. :

   $$\frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(c_h).$$

   Comme $\lim_{h\to 0} c_h = 0$, on en déduit que $\lim_{h\to 0} f'(c_h) = +\infty$ et donc

   $$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = +\infty.$$

   Ceci montre que $f$ n'est pas dérivable en 0.

   ---

2. On suppose maintenant que $f$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, strictement croissante et que $f(0) = 0$. On note $g$ la fonction réciproque de $f$ [l'existence de la function $g$ a été vue en cours]. Montrer que $g$ est dérivable en 0 et que $g'(0) = 0$.

   **corrigé**

   On reprend ici la démonstration faite en cours pour montrer la dérivabilité d'une fonction réciproque.

   Soit $h \neq 0$. Comme $f \circ g(h) = h$, $f(0) = 0$ et $g(0) = 0$, on a :

   $$\frac{g(h) - g(0)}{h} = \frac{g(h)}{f(g(h)) - f(0)}.$$

   Le théorème des accroissements finis donne alors l'existence de $d_h \in ]\min(0, g(h)), \max(0, g(h))[$ t.q. $f(g(h)) - f(0) = g(h)f'(d_h)$. On a donc :

   $$\frac{g(h) - g(0)}{h} = \frac{1}{f'(d_h)}.$$

   Comme $g$ est continue (ceci a été vu en cours). On a $\lim_{h\to 0} g(h) = 0$ et donc $\lim_{h\to 0} d_h = 0$, ce qui donne $\lim_{h\to 0} f'(d_h) = +\infty$ et finalement :

   $$\lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = 0.$$

   Ceci prouve bien que $g$ est dérivable en 0 et que $g'(0) = 0$.

   ---