UNIVERSITÉ DE PROVENCE L1
2004-2005

Analyse 1 - Planche 6

Exercice 1

Soit la fonction numérique de la variable réelle

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1} + 2\arctan\frac{1-x}{1+x}.$$

1)- Déterminer le domaine de définition. Pour quelles valeurs de x la fonction est-elle continue, dérivable? Calculer $f'(x)$.

2)-Montrer que la dérivée de la fonction f d'ordre $(n-1)$ $(n \geq 2)$ est de la forme

$$f^{(n-1)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2+1)^n}$$

où P_n est un polynôme de degré n.

3)-Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ a n racines réelles et distinctes.

Exercice 2

Soit $a \in R$ et f une fonction numérique réelle définie et dérivable sur $[a, +\infty[$.

1)-Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} f'x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

2)-Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} f'x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Exercice 3

Soit I un intervalle de R et $f : I \to R$ une fonction qui s'annule n fois dans I, dérivable jusqu'à l'ordre $(n-1)$. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que $f^{(n-1)}(c) = 0$.

Exercice 4

Soit f une fonction de R dans $R, a \in R$ et $h \in R_+^*$.

1)-Montrer que si f admet une dérivée seconde continue en a alors

$$\lim_{h\to0} \frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2} = f''(a).$$

2)-Donner un exemple où $\lim_{h\to0} \frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}$ existe et $f''(a)$ n'existe pas.

Exercice 5

1)-En utilisant la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction $f(x) = \ln(1+x)$, calculer

$$\lim_{n\to+\infty}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n}).$$

2)-Montrer que si $x > 0$, alors

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x.$$

3)-En déduire la limite de la suite $u_n = \Pi_{p=1}^{p=n}(1 + \frac{p}{n^2}), n \in N^*$.

Exercice 6

Soit $b > 0$ et $I =]-b, b[$. Soit f une fonction de I dans R, de classe C^1 sur I et admettant une dérivée seconde continue en 0. On suppose que $f(0) = 0$ et on considère la fonction g définie sur I par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} \text{ si } x \neq 0, \\ f'(0) \text{ si } x = 0 \end{cases}.$$

1)-Montrer que g est continue sur I.
2)-Montrer que g est de classe C^1 sur I.
3)-On suppose que f est de classe C^∞ sur I, montrer que $g \in C^\infty(I)$.

Exercice 7

Soit f définie sur $]-1, 0[\cup]0, +\infty[$ par:

$$f(x) := \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$$

1)-Montrer que f peut être prolongée par continuité au point -1 par $f(-1) = 1$.
2)-Montrer que f peut être prolongée par continuité au point 0 par $f(0) = \frac{1}{2}$
3)-On note de nouveau f ce prolongement:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}, \text{ si } x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[\\ 1 \text{ si } x = -1 \\ \frac{1}{2} \text{ si } x = 0 \end{cases}.$$

i)-Montrer que f est dérivable en 0.
ii)-Donner l'équation de la tangente à l'origine et la position du graphe de f par rapport à cette tangente.

Exercice 8

Soit la fonction définie par

$$f(x) := \arctan \frac{x+1}{x^2+3}$$

1/-Montrer que $f \in C^\infty(R)$.
2/-Donner le tableau de variations de f sur R en précisant les asymptotes.
3/-Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution sur R .
4/-Donner la tangente, (T), au graphe de f, C_f, au point d'abcisse $x = -1$ et préciser la position relative de C_f et (T).
6/-Montrer que

$$g(x) := x^2 f(x)$$

a une asymptote en $+\infty$ dont on déterminera l'équation et la position relative du graphe de g.

Exercice 9

1/-Donner la position relative au voisinage de l'origine des graphes des fonctions suivantes en précisant l'équation de la tangente commune:

$$f(x) = \begin{cases} \ln \frac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}, \quad g(x) = \frac{\cos x - 1}{3}$$

2/-Trouver l'erreur du raisonnement suivant:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{1-x} = 1 + x + x\varepsilon(x) \\ \\ e^x = 1 + x + x\varepsilon(x) \end{array} \right\} \Rightarrow e^x = \frac{1}{1-x} \Rightarrow e^{-x} = \frac{1}{e^x} = 1 - x \Rightarrow e^{-1} = 1 - 1 = 0.$$

Exercice 10

Soit f une fonction définie sur R telle que pour tout $(x, y) \in R^2$, on ait

$$\left| f(x) - f(y) \right| \leq |x - y|^2 .$$

Montrer que f est constante sur R.

Exercice 11

Soit f de classe C^1 sur I sur lequel f et f' ne s'annulent pas simultanément. Montrer que les zéros de f sont des points isolés.

Exercice 12

Vérifier les relations

$$\begin{aligned} 2\arctan((1+x^2)^{\frac{1}{2}}-x)+\arctan x &= \frac{\pi}{2}, \\ 2\arctan(\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}})+\arctan(2x-1) &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 13

Etudier et représenter les courbes d'équation

$y=\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}, y=\arctan\frac{\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}}, y=x^{\frac{1}{1+\ln x}}$.

Exercice 14

Donner les développements limités au voisinage de a des fonctions suivantes

$a=\frac{1}{2}$, $f(x)=\arcsin x, a=\frac{\pi}{4}, f(x)=(\tan x)^{\tan 2x}$.

Etudier les fonctions suivantes au voisinage de

$a=0$

$f(x)=\frac{1}{x}\frac{\sin x+x^2}{\tan x}, f(x)=(e^x+x)^{\frac{1}{x}}, f(x)=\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x-\sinh x}, f(x)$

$a=+\infty$

$f(x)=\sqrt[3]{\ln(2x+1)}-\sqrt[3]{\ln(2x)}, f(x)=\left[\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right]^{x\ln x}$,

$a=\frac{\pi}{4}$

$f(x)=(1-\cos 2x)^{3\tan 2x}$.

Exercice 15

On considère l'équation $\tan x=x$. Montrer que pour tout $n\in N^*$, elle admet une racine $x_n\in]n\pi,(2n+1)\frac{\pi}{2}[$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}x_n=+\infty$, et étudier la limite de la suite $(x_n-n\pi)$. Trouver un développement limité à l'ordre 2 de $(x_n-n\pi)$.