Université d'Aix-Marseille 2010-2011

Licence de Mathématiques – Analyse – PEIP1

DEVOIR SURVEILLÉ 3 – CORRIGÉ

Exercice 1 (3pts) Calculer les limites suivantes, au besoin en faisant un développement limité :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\text{Arctan}(\frac{1}{1+x^2}) \ \ , \ \ \lim_{x\to 0}\cos(x)^{\frac{1}{x}}$$

corrigé

Au voisinage de zéro on a : Arctan$(u) = u - \frac{u^3}{3} + o(u^3)$. On pose $u = \frac{1}{1+x^2}$, quand x tend vers l'infini, dans ce cas x^2Arctan$(\frac{1}{1+x^2}) = \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{x^2}{3}(\frac{1}{1+x^2})^3 + x^2 o((\frac{1}{1+x^3})^3)$, donc la limite est égale à 1 quand $x \to +\infty$. On a $\cos(x)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(\cos(x))/x}$, qui est bien défini car $\cos(x) > 0$ au voisinage de zéro. Après DL à l'ordre 2 on trouve $e^0 = 1$ comme limite.

Exercice 2 (4 pts)Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$, on note $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$. Les propositions suivantes sont-elles VRAIES ou FAUSSES ? On justifiera les réponses.

a) F est continue sur $\mathbb{R}$. VRAI, car F est dérivable avec $F' = f$.

b) $F(a) = f(a)$. FAUX : on a toujours $F(a) = 0$, il suffit de prendre $f(x) = 1$.

c) Si f est croissante alors F est croissante. FAUX. Contre-exemple : $\displaystyle\int_{-1}^x tdt = \frac{x^2+1}{2}$, où $f(x) = x$ et $F(x)$ n'est pas monotone.

d) Si f est négative alors F est décroissante. VRAI car $F'(x) = f(x)$.

Exercice 3 (6 pts)Soit f une fonction de classe C^n sur $\mathbb{R}$.

a) On fixe $a < b$. Montrer que $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$.

b) On suppose $n \geq 2$. Écrire le développement limité de $F(x)$ à l'ordre trois au voisinage de $x = a$, en fonction de f et de ses dérivées.

c) Justifier qu'il existe M réel tel que $M = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

d) Écrire la formule de Taylor-Lagrange pour F à l'ordre trois sur $[a, b]$.

e) On suppose que $f(a) = 0$, montrer que $|\displaystyle\int_a^b f(t)dt| \leq \frac{M}{2}(b-a)^2$.

corrigé

a) étant donné que $F' = f$, on aura $F^{(n+1)} = f^{(n)}$ donc F est C^{n+1} sur $\mathbb{R}$.

b) La formule de Taylor-Young s'écrit :

$$F(x) = F(a) + (x-a)F'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}F''(a) + \frac{(x-a)^3}{6}F'''(a) + o((x-a)^3) \ \ .$$

Comme $F(a) = 0$ et que $F' = f$, on a finalement :

$$F(x) = (x-a)f(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f'(a) + \frac{(x-a)^3}{6}f''(a) + o((x-a)^3) \ \ .$$

c) La fonction f' est continue donc est bornée sur tout segment, il existe donc M réel tel que $M = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.
d) La formule de Taylor-Lagrange affirme qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$F(b) = \underbrace{F(a)}_{=0} + (b-a)F'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}F''(a) + \frac{(b-a)^3}{6}F'''(c) = (b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f'(a) + \frac{(b-a)^3}{6}f''(c)$$

e) On suppose que $f(a) = 0$, en écrivant la formule précédente à l'ordre 2, en tenant compte de $|f'(c)| \leq M$, il vient :

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt = \frac{(b-a)^2}{2}f'(c) \text{ d'où } |\int_a^b f(t)dt| \leq \frac{M}{2}(b-a)^2$$

Exercice 4 (8 pts) Soit $f : [-\pi^2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \cosh(\sqrt{x}), \text{ si } x \geq 0, \\ \cos(\sqrt{-x}), \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

On rappelle la définition de la fonction cosinus hyperbolique : $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

1. Donner les développements limités de $\cos(x)$ et $\cosh(x)$ à l'ordre 4 au point 0.
2. Montrer que la fonction f est continue.
3. Montrer que f admet un DL_2 en 0 et le calculer.
4. Montrer que f est de classe C^1.
5. Montrer que f est injective et déterminer son image I.
6. Soit $g : I \longrightarrow [-\pi^2, +\infty[$ la fonction réciproque de f. Montrer que g admet un DL_2 en 1.
7. Soit $g(x) = a + b(x-1) + c(x-1)^2 + o((x-1)^2)$ le DL_2 en 1 de g. Déterminer a, b et c en utilisant la relation $g(f(x)) = x$.

corrigé

1. $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$ et $\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$

2. f est continue en dehors de zéro car égale à des fonctions continues. On remarque que $\cos(\sqrt{-x})$ tend vers $1 = \cosh(0)$ lorsque $x \to 0^-$ donc f est continue également en zéro.

3. En reportant respectivement $\sqrt{-x}$ et $\sqrt{x}$ dans les DL de la question 1, on trouve :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^2 + o(x^2), \text{ si } x \geq 0, \\ 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^2 + o(x^2), \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

Donc f possède un DL_2 en zéro égal à $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^2 + o(x^2)$. Ce qui prouve au passage que f est dérivable en zéro et que $f'(0) = \frac{1}{2}$.

4. La continuité de f' est à vérifier en zéro. Pour $x < 0$ on a $f'x) = \frac{1}{2\sqrt{-x}}\sin(\sqrt{-x})$ dont la limite est $1/2$ quand $x \to 0^-$. Pour $x > 0$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sinh(\sqrt{x})$ dont la limite est également $1/2$ quand $x \to 0^+$, donc f' est bien continue en 0, f est C^1.

5. f' est strictement positive sur $]-\pi^2, +\infty[$ donc f est strictement croissante donc injective sur $[f(-\pi^2), f(+\infty)[= [-1, +\infty[$.

6. Du fait que f' ne s'annule pas au voisinage de zéro, on peut affirmer que g est dérivable au voisinage de $1 = f(0)$ (théorème du cours). Ce même téorème affirme que, dans ce cas, g a même classe de dérivabilité que f. Il suffit

donc de vérifiér que f est C^2 pour en déduire que g l'est également et donc admet un DL_2 en 1. La vérification est nécessaire au point de raccord $x = 0$. Les dérivées secondes de $\cos(\sqrt{-x})$ et de $\cosh(\sqrt{x})$ sont respectivement égales à $-\frac{1}{4x}(\frac{\sin(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}} - \cos(\sqrt{-x}))$ pour $x < 0$ et à $\frac{1}{4x}(\cosh(\sqrt{x}) - \frac{\sinh(\sqrt{x})}{\sqrt{x}})$ pour $x > 0$, qui ont pour limite commune $\frac{1}{12}$ à gauche et à droite de zéro. Une conséquence du TAF (cours) permet alors de conclure que f est C^2 au voisinage de zéro, donc g également au voisinage de $f(0) = 1$, donc admet un DL_2 au vosinage de 1.

7. La formule de Taylor-Young appliquée à g s'écrit : $g(x) = g(1)+g'(1)(x-1)+\frac{g''(1)}{2}(x-1)^2+o((x-1)^2)$. On a déjà $a = g(1) = 0$ et $b = \frac{1}{f'(1)} = 2$. On dérive deux fois $g(f(x)) = x$, d'où : $g''(f(x))f'(x)^2 + g'(f(x))f''(x) = 0$, cette relation en $x = 0$ donne alors $g''(1) = -\frac{2}{3}$, d'où $c = -\frac{1}{3}$.

Exercice 5 (2 pts)

On se propose de calculer $I = \displaystyle\int_a^b x\sqrt{(x-a)(b-x)}\,\mathrm{d}x$, où $a < b$ sont deux nombres réels.

1. En effectuant le changement de variable $y = a + b - x$, montrer que le calcul de l'intégrale I se ramène au calcul de $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.
2. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ et en déduire $\displaystyle\int_a^b x\sqrt{(x-a)(b-x)}\,\mathrm{d}x$.

corrigé

1. Le changement de variable $y = a+b-x$ aboutit à la relation $I = \dfrac{(a+b)}{2}\displaystyle\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}dx$. On applique alors l'intervalle $[-1, 1]$ sur $[a, b]$ par le changement de variable : $x = \dfrac{(b-a)}{2}t + \dfrac{(a+b)}{2}$. L'expression devient

$$I = \frac{(a+b)}{2}\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}dx = \frac{(a+b)}{2}\frac{(b-a)^2}{4}\int_{-1} 1\sqrt{1-t^2}dt.$$

2. l'intégrale $\displaystyle\int_{-1} 1\sqrt{1-t^2}dt$ se calcule par un changement de variable $t = \sin(u)$, ce qui donne :

$$\int_{-1} 1\sqrt{1-t^2}dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(u)du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos(2u)}{2}du = \frac{\pi}{2}\ .$$

D'où : $I = \dfrac{\pi(a+b)(b-a)^2}{16}$.
