Exercice 1

Étudions la continuité de f sur $\mathbb{R}^*$.

La fonction $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ donc par composition f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Étudions la continuité de f en 0.

$\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0^+$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{1}{x^2} = -\infty \\ \lim\limits_{y\to -\infty} e^y = 0 \end{array}\right\} \text{donc par composition } \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

On en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0.

Conclusion.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Simplifions l'expression de f.

<u>Si $x \in]-1,1[$</u> alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$ donc par somme et quotient $f(x) = 1$.

<u>Si $x = 1$</u> alors $\frac{1-x^n}{1+x^n} = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ donc $f(x) = 0$.

<u>Si $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$</u> alors $\dfrac{1-x^n}{1+x^n} = \dfrac{(1/x^n)-1}{(1/x^n)+1} = \dfrac{(\frac{1}{x})^n - 1}{(\frac{1}{x})^n + 1} \xrightarrow[n\to+\infty]{\frac{1}{x}\in]-1,1[} -1$

D'où $f(x) = -1$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]-1,1[\\ 0 & \text{si } x = 1 \\ -1 & \text{si } x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty \end{cases}$$

Au voisinage de chaque point de $]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$ la fonction f est constante donc elle est continue sur cette réunion d'intervalles.

Si $x \in]-1,1[$ alors $f(x) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$.

Si $x \in]1,+\infty[$ alors $f(x) = -1$ donc $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -1$.

On a $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ donc f n'admet pas de limite en 1, ce qui entraine que f n'est pas continue en 1.

La question de la continuité de f en -1 ne se pose pas car f n'est pas définie en ce point.

Conclusion. Le domaine de continuité de f est l'ensemble $]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$.

Remarque. Le domaine de continuité est différent du domaine de définition car f n'est pas obtenue à partir des fonctions usuelles par opérations algébriques (somme, produit, quotient) ou composition.

Exercice 3

1. $f(2\times 0) = f(0) = f(0)\cos 0$.

   Soit $x \neq 0$. On a : $g(2x) = \frac{\sin 2x}{2x} = \frac{\cancel{2}\sin x\cos x}{\cancel{2}x} = \frac{\sin x}{x}\cos x = g(x)\cos x$.

   Donc g vérifie la condition (E).

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. On a alors $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} g(x) = g(0)$ donc $\boxed{g \text{ est continue en } 0}$.

3. Soit f une fonction qui vérifie (E). Montrer que, pour tout $x \neq 0$ et pour tout n à partir d'un certain rang, on a : $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\dfrac{\sin x}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$.

   Nous allons démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}(n)$: $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ 2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)\sin x$ est vérifiée. Puis nous montrerons qu'à partir d'un certain rang on peut diviser les deux membres par $2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$, ce qui correspond à la formule demandée.

   Initialisation.

   Soit $x \in \mathbb{R}^*$. $2^0 \sin\left(\frac{x}{2^0}\right) f(x) = \sin x f(x)$ et $f\left(\frac{x}{2^0}\right)\sin x = f(x)\sin x$. $\mathscr{P}(0)$ vraie.

   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

   Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

   D'après la relation (E) on a : $f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = f\left(2\dfrac{x}{2^{n+1}}\right) = f\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)$,

   donc $f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\sin x = f\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)\sin x \cos\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)$.

Par HR on a : $f\left(\frac{x}{2^n}\right)\sin x = 2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) f(x)$ donc en reportant cette relation dans l'égalité précédente il vient : $2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) f(x) = f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\sin x \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$.

La formule trigonométrique $\sin 2y = 2\sin y \cos y$ appliquée à $y = \frac{x}{2^{n+1}}$ donne finalement :

$2^n \times 2\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) f(x) = f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\sin x \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$.

Premier cas : $\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \neq 0$.

En simplifiant par $\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \neq 0$ on obtient : $2^{n+1}\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) f(x) = f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\sin x$.

Second cas : $\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = 0$.

On a alors $\frac{x}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Donc $\frac{x}{2^n} = (1+2k)\pi$ et $x = 2^n(1+2k)\pi$. Ceci montre que x est un multiple de π donc $\sin x = 0$ et $f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\sin x = 0 \quad (1)$.

D'après l'hypothèse de récurrence on a : $2^n \sin\left(\frac{y}{2^n}\right) f(y) = f\left(\frac{y}{2^n}\right)\sin y$ pour $y = \frac{x}{2}$. d'où $2^n \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) f(\frac{x}{2}) = f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\sin\frac{x}{2}$. On sait que $\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = 0$ (second cas) donc $\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \neq 0$, ce qui permet d'écrire : $f\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\sin\frac{x}{2}}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)} \quad (2)$.

- Si $n \geqslant 1$ alors $\frac{x}{2} = \underbrace{2^{n-1}(1+2k)}_{\in\mathbb{Z}}\pi$ et $\sin\frac{x}{2} = 0$. D'après la relation (2), on a : $f(\frac{x}{2}) = 0$, et d'après (E) on a : $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2} = 0$.
- Si $n = 0$ alors d'après la relation (E) on a : $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2} = 0$ car on est dans le second cas pour $n = 0$.

Pour toute valeur de n on a : $2^{n+1}\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) f(x) = 0$, en combinant cette relation avec la relation (1), on obtient : $2^{n+1}\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) f(x) = 0 = f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\sin x$.

Dans tous les cas on a : $2^{n+1}\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) f(x) = f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\sin x$ avec x quelconque donc la propriété est vérifiée au rang $n+1$.

Conclusion. $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $x \neq 0$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n\pi = +\infty$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait : $2^n\pi \geqslant 2^{n_0}\pi > |x|$ donc $-\pi < \frac{x}{2^n} < \pi$ et en particulier $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \neq 0$.

À partir du rang n_0 on peut donc diviser les deux membres de $\mathscr{P}(n)$ par $2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$, ce qui donne : $\boxed{f(x) = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\dfrac{\sin x}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}}$

4. Soit $x \neq 0$. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} = 1$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x}{2^n} = 0$.

   Par produit on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = x$.

   $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{2^n} = 0 \\ f \text{ est continue en } 0 \end{array}\right\} \text{ par composition } \lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0)$$

   Par quotient on obtient donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\dfrac{\sin x}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} = f(0)\dfrac{\sin x}{x}$.

   D'après la relation établie à la question précédente et par unicité de la limite on obtient donc : $\boxed{f(x)} = f(0)\frac{\sin x}{x} = \boxed{f(0)g(x)}$, et ce pour tout $x \neq 0$.

   Comme $g(1) = 1$, la relation précédente est aussi valable pour $x = 0$.

   Conclusion : $\boxed{f = f(0)g}$.

5. D'après la question précédente on sait que si f est définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0 et vérifie (E) alors f est proportionnelle à g c'est-à-dire du type λg avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Réciproquement, λg, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, est définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0 et vérifie (E) car g vérifie ces conditions.

   Conclusion : l'ensemble des fonctions répondant au problème posé est $\{\lambda g / \lambda \in \mathbb{R}\}$.