Université de Marseille, avril 2011
Licence de Mathématiques, 1ère année
Analyse, 2ème semestre, dm2

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$, si bien qu'il existe des constantes M_0 et M_2 telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq M_0$ et $|f''(x)| \leq M_2$.

1. On se fixe $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. Écrire la formule de Taylor-Lagrange pour f à l'ordre 2 sur l'intervalle $[x, x+h]$.
2. En déduire que $|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$.
3. Soit $\phi :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\phi(h) = \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$. Étudier les variations de ϕ et en déduire que ϕ admet un minimum que l'on calculera.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

Exercice 2

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(1 + \ln(1+x) - e^x)}{\mathrm{Arc}\tan(\mathrm{x}) - \mathrm{x}}, \quad \lim_{x \to \infty} (x^2 + x + 2)^{1/3} - x^{2/3}.$$

Exercice 3 (Intégrales impropres)

Soit $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $x \geq 1$, on pose $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$. Si la fonction F a une limite finie lorsque x tend vers l'infini, on note $\int_1^\infty f(t)\,dt$ cette limite et on dit que l'intégrale $\int_1^\infty f(t)\,dt$ est convergente. Dans le cas contraire, on dit que cette intégrale est divergente.

1. Montrer que l'intégrale $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,dt$ est convergente et $\int_1^\infty \frac{1}{t}\,dt$ est divergente.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un réel fixé. Montrer que l'intégrale $\int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
3. (a) On suppose que $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que pour tout $t \geq 1$, $f(t) \geq 0$. Montrer que F est une fonction croissante sur $[1, \infty[$.
   (b) Soit $g : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $t \geq 1$, $0 \leq g(t) \leq f(t)$. Montrer que si $\int_1^\infty f(t)\,dt$ converge, alors $\int_1^\infty g(t)\,dt$ converge aussi
   (c) Montrer que si $\int_1^\infty g(t)\,dt$ diverge, alors $\int_1^\infty f(t)\,dt$ diverge aussi.
   (d) Montrer que $\int_1^\infty \frac{|\cos(t)|}{t^2}\,dt$ converge.
4. On admet pour la suite que si $\int_1^\infty |f(t)|\,dt$ est convergente, alors $\int_1^\infty f(t)\,dt$ est aussi convergente.
   (a) Monter que $\int_1^\infty \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$ converge.
   (b) En déduire que $\int_1^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ converge. (On pourra penser à une intégration par parties.)