

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . On suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$, si bien qu'il existe des constantes M_0 et M_2 telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq M_0$ et $|f''(x)| \leq M_2$.

1. On se fixe $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. Écrire la formule de Taylor-Lagrange pour f à l'ordre 2 sur l'intervalle $[x, x+h]$.

_____ corrigé _____

Il existe $\theta \in]0, 1[$ t.q.

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(\theta h).$$

2. En déduire que $|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$.

_____ corrigé _____

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. La question précédente nous donne l'existence de $\theta \in]0, 1[$ t.q. $hf'(x) = f(x+h) - f(x) - \frac{h^2}{2} f''(\theta h)$ et donc

$$h|f'(x)| \leq |f(x+h)| + |f(x)| + \frac{h^2}{2} |f''(\theta h)| \leq 2M_0 + \frac{h^2}{2} M_2.$$

Ceci donne bien $|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$.

3. Soit $\phi :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\phi(h) = \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$. Étudier les variations de ϕ et en déduire que ϕ admet un minimum que l'on calculera.

_____ corrigé _____

On remarque que $M_0 \geq 0$ et $M_2 \geq 0$. La fonction ϕ prend donc ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On considère tout d'abord le cas $M_2 = 0$. Dans ce cas, le minimum de ϕ est 0 car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = 0$ (et ce minimum n'est pas atteint, sauf si $M_0 = 0$). On suppose maintenant que $M_2 > 0$. Dans ce cas, on a, pour tout $h > 0$, $\phi'(h) = -\frac{2M_0}{h^2} + \frac{M_2}{2}$. On a donc $\phi'(h_0) = 0$ avec $h_0 = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$, $\phi'(h) < 0$ pour $h < h_0$ et $\phi'(h) > 0$ pour $h > h_0$. On en déduit que ϕ admet un minimum et que ce minimum, noté m , est atteint pour $h = h_0$, ce qui donne

$$m = \phi(h_0) = \sqrt{M_0 M_2} + \sqrt{M_0 M_2} = 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

Dans tout les cas, le minimum de ϕ sur $\mathbb{R}_+^*$ est donc $2\sqrt{M_0 M_2}$.

4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

_____ corrigé _____

Soit $x \in \mathbb{R}$, la question 2 donne $|f'(x)| \leq \phi(h)$ pour tout $h > 0$. On a donc

$$|f'(x)| \leq \inf\{\phi(h), h \in]0, \infty[\} = 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

Exercice 2

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \ln(1+x) - e^x)}{\text{Arc tan}(x) - x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x + 2)^{1/3} - x^{2/3}.$$

_____ corrigé _____

Pour $x > -1$, on a, avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$,

$$x(1 + \ln(1+x) - e^x) = x(1+x - \frac{x^2}{2} - 1 - x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_1(x)) = -x^3 + x^3 \varepsilon_1(x)$$

et

$$\text{Arc tan}(x) - x = x - \frac{x^3}{3} - x + x^3 \varepsilon_2(x) = -\frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon_2(x).$$

On en déduit que, pour $x > -1$, $x \neq 0$, $\frac{x(1 + \ln(1+x) - e^x)}{\text{Arc tan}(x) - x} = \frac{-1 + \varepsilon_1(x)}{-\frac{1}{3} + \varepsilon_2(x)}$ et donc que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \ln(1+x) - e^x)}{\text{Arc tan}(x) - x} = 3.$$

Pour $x > 0$, on a

$$(x^2 + x + 2)^{1/3} - x^{2/3} = x^{2/3} \left(\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right).$$

Pour tout $u > 0$, on a $(1+u)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}u + u\varepsilon(u)$, avec $\lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon(u) = 0$. On a donc, pour $x > 0$,

$$\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3x} + \frac{1}{x}\eta(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} \eta(x) = 0.$$

On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x + 2)^{1/3} - x^{2/3} = 0.$$

Exercice 3 (Intégrales impropres)

Soit $f : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $x \geq 1$, on pose $F(x) = \int_1^x f(t) dt$. Si la fonction F a une limite finie lorsque x tend vers l'infini, on note $\int_1^\infty f(t) dt$ cette limite et on dit que l'intégrale $\int_1^\infty f(t) dt$ est convergente. Dans le cas contraire, on dit que cette intégrale est divergente.

1. Montrer que l'intégrale $\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt$ est convergente et $\int_1^\infty \frac{1}{t} dt$ est divergente.

corrigé

Soit $x > 1$, on a $\int_1^x \frac{1}{t^2} dt = 1 - \frac{1}{x}$ et $\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x$. On en déduit bien que $\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt$ est convergente et $\int_1^\infty \frac{1}{t} dt$ est divergente.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un réel fixé. Montrer que l'intégrale $\int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

corrigé

Soit $\alpha > 1$, on a, pour $x > 1$, $\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right)$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha-1}$ et donc que l'intégrale $\int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente.

Pour $\alpha \leq 1$, on a $t^\alpha \leq t$ pour tout $t \geq 1$ et donc, par monotonie de l'intégrale, pour tout $x > 1$, $\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt \geq \int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x$. On a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = +\infty$. On en déduit que $\int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha} dt$ est divergente. Ceci montre bien que l'intégrale $\int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

- 3(a) On suppose que $f : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que pour tout $t \geq 1$, $f(t) \geq 0$. Montrer que F est une fonction croissante sur $[1, \infty[$.

corrigé

La fonction F est continue sur $[1, +\infty[$ et c'est une primitive de f sur $]1, +\infty[$, on a donc F dérivable et $F'(t) = f(t) \geq 0$ pour tout $t \in]1, +\infty[$. Ce qui montre que F est croissante sur $[1, \infty[$.

- (b) Soit $g : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $t \geq 1$, $0 \leq g(t) \leq f(t)$. Montrer que si $\int_1^\infty f(t) dt$ converge, alors $\int_1^\infty g(t) dt$ converge aussi.

corrigé

On a $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ et on pose aussi $G(x) = \int_1^x g(t) dt$ (pour $x \geq 1$). Les fonctions F et G sont croissantes (par la question précédente). Pour tout $x \geq 1$ on a $G(x) \leq F(x)$. La fonction G est donc majorée par $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \in \mathbb{R}$ (car $\int_1^\infty f(t) dt$ converge). Comme G est croissante majorée, on en déduit que G a une limite finie lorsque x tend vers l'infini, ce qui montre que $\int_1^\infty g(t) dt$ est convergente.

(c) Montrer que si $\int_1^\infty g(t) dt$ diverge, alors $\int_1^\infty f(t) dt$ diverge aussi.

corrigé

On conserve les notations de la question 3(b) (et g est toujours une fonction continue telle que pour tout $t \geq 1$, $0 \leq g(t) \leq f(t)$). La fonction G est croissante et $G(x)$ n'a pas de limite finie quand $x \rightarrow +\infty$, on a donc nécessairement $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = +\infty$. Comme $G(x) \leq F(x)$ pour tout $x \geq 1$, on a donc aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$, ce qui prouve que $\int_1^\infty f(t) dt$ diverge.

(d) Montrer que $\int_1^\infty \frac{|\cos(t)|}{t^2} dt$ converge.

corrigé

Il suffit ici d'utiliser la question 3(b) avec $g(t) = \frac{|\cos(t)|}{t^2}$ et $f(t) = \frac{1}{t^2}$. La question 1 donne que $\int_1^\infty f(t) dt$ converge, la question 3(b) donne alors que $\int_1^\infty g(t) dt$ converge aussi.

4. On admet pour la suite que si $\int_1^\infty |f(t)| dt$ est convergente, alors $\int_1^\infty f(t) dt$ est aussi convergente.

(a) Montrer que $\int_1^\infty \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ converge.

corrigé

Ceci est une conséquence immédiate de la question 3(d) (et de ce que l'on vient d'admettre).

(b) En déduire que $\int_1^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge. (On pourra penser à une intégration par parties.)

corrigé

Soit $x > 1$, par une intégration par parties on a

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt = - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt - \frac{\cos(x)}{x} + \cos(1).$$

On a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt + \cos(1)$. Ce qui montre, avec la question précédente, que $\int_1^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.
