**Université de Marseille**

**PEIP, 1ere année**

**Analyse, 2eme semestre, Devoir surveillé n˚1**

**Exercice 1**

1. Montrer que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 1 - \sin(x)\sin(e^{\frac{1}{x}})$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ et préciser cet unique prolongement.
2. Prouver que $g$ définie sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ définie par $g(x) = \left|\frac{x-1}{x^2-1}\right|^{x+1}$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ et préciser cet unique prolongement.

**corrigé**

1. La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. Il faut montrer qu'elle a une limite en $0$. On a
$$\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0,$$
et
$$|\sin e^{\frac{1}{x}})| \leq 1.$$
L'application du résultat que le produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers $0$ donne une fonction qui tend vers $0$, conduit à
$$lim_{x\to 0} \sin(x)\sin(e^{\frac{1}{x}}) = 0.$$
Ainsi $lim_{x\to 0} f(x) = 1$. La fonction $f$ est prolongeable par continuité en $0$ et ce prolongement $\tilde{f}$ est donné par
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in \mathbb{R}^* \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases} . \tag{1}$$
Il est donc unique.
2. La fonction $g$ est continue sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ . De plus
$$\left|\frac{x-1}{x^2-1}\right| = \frac{1}{|x+1|}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,\, 1\}.$$
Au voisinage de $x = 1$, $(x + 1) > 0$. Ainsi, il existe $\alpha > 0$ tel que pour $1 - \alpha < x < 1 + \alpha$ on a
$$\left|\frac{x-1}{x^2-1}\right|^{x+1} = e^{(x+1)\log\frac{1}{x+1}}.$$
Par ailleurs,
$$\frac{1}{x+1} \to_{x\to 1} \frac{1}{2}.$$
Donc
$$\lim_{x\to 1} \left|\frac{x-1}{x^2-1}\right|^{x+1} = \frac{1}{4}.$$
Au voisinage de $x = -1$ la quantité $\frac{1}{x+1}$ change de signe. On va donc évaluer les limites à gauche et à droite.
$$\left|\frac{x-1}{x^2-1}\right|^{x+1} = e^{(x+1)\log\frac{-1}{x+1}} \quad \text{si } x < -1.$$
De même
$$\left|\frac{x-1}{x^2-1}\right|^{x+1} = e^{(x+1)\log\frac{1}{x+1}} \quad \text{si } x > -1.$$
et
$$\lim_{\substack{x\to -1 \\ >}} \left(\frac{1}{x+1}\right) = +\infty.$$

Comme

$$\lim_{\substack{y \to 0 \\ >}} y \log y = 0,$$

et

$$\lim_{z \to 0} e^z = 1,$$

par composition des limites, on déduit que

$$\lim_{x \to 1} e^{(x+1) \log |\frac{x-1}{x^2-1}|} = 1.$$

Ainsi la fonction $g$ est continue prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ et cet unique prolongement est

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) \text{ si } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ \frac{1}{4} \text{ si } x = 1 \\ 1 \text{ si } x = -1 \end{cases} . \tag{2}$$

---

**Exercice 2**

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, croissante et vérifiant : $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

**corrigé**

Pour tout $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta_\varepsilon = 2\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ on a $|x - x_0| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. Ceci démontre la continuité en $x_0$. Comme $x_0$ est quelconque dans $\mathbb{R}$, on en déduit la continuité sur $\mathbb{R}$.

---

2. On définit la suite de nombres réels $(u_n)_n$ par

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \in \mathbb{R} \end{cases} . \tag{3}$$

sr

3. Montrer que la suite $(u_n)$ est monotone de sens dépendant de $u_1, u_0$.

**corrigé**

**Supposons** $u_1 \geq u_0$. Montrons par récurrence que $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Initialisation : Comme $u_1 \geq u_0$ et $f$ est croissante, on aura $f(u_1) \geq f(u_0)$. Donc $u_2 \geq u_1$.

(b) Hérédité : Supposons que $u_n \geq u_{n-1}$. Par croissance de $f$, on en aura $f(u_n) \geq f(u_{n-1})$. De la définition de la suite $(u_n)$, on obtient que $u_{n+1} \geq u_n$.

**Supposons** $u_1 \leq u_0$. Montrons par récurrence que $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Initialisation : Comme $u_1 \leq u_0$ et $f$ est croissante, on aura $f(u_1) \leq f(u_0)$. Donc $u_2 \leq u_1$.

(b) Hérédité : Supposons que $u_n \leq u_{n-1}$. Par croissance de $f$, on en aura $f(u_n) \leq f(u_{n-1})$. De la définition de la suite $(u_n)$, on obtient que $u_{n+1} \leq u_n$.

---

4. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leq \dfrac{1}{2^n}|u_1 - u_0|, \quad .$

**corrigé**

On a

$$|u_{n+1} - u_n| = |f(u_n) - f(u_{n-1}| \leq \frac{1}{2}|u_n - u_{n-1}|.$$

On démontre alors par récurrence que

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2^n}|u_1 - u_0|.$$

---

5. En déduire que la suite $(u_n)$ est bornée.

**corrigé**

On a

$$u_n = u_n - u_{n-1} + u_{n-1} - u_{n-2} + ...u_1 - u_0 + u_0.$$

Donc

$$|u_n| \leq \Sigma_{k=0}^{k=n-1}|u_{k+1} - u_k| + |u_0| \leq |u_1 - u_0|\Sigma_{k=0}^{k=n-1}\frac{1}{2^k} + |u_0| = 2|u_1 - u_0|(1 - \frac{1}{2^n}) \leq 2|u_1 - u_0| + |u_0|.$$

6. En déduire que pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(u_n)$ est convergente. On note $l(u_0)$ sa limite.

**corrigé**

Pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(u_n)$ est monotone et bornée, elle est donc convergente.

7. Justifier que $l(u_0) = f(l(u_0))$.

**corrigé**

Comme $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle est continue au point $l(u_0)$, donc séquentiellement continue. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l(u_0) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l(u_0)).$$

Mais on a

$$u_{n+1} = f(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En passant à la limite sur $n$, on obtient

$$l(u_0) = f(l(u_0)).$$

8. Montrer que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$. ( *Pour montrer l'unicité, on pourra supposer que l'équation a deux solutions et montrer qu'elles sont nécessairement égales*).

**corrigé**

On vient de montrer que pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$ les suites $(u_n)$ définies par (2) sont convergentes vers un point fixe de $f$. L'équation $f(x) = x$ a donc au moins une solution. Il reste à montrer qu'elle en a une seule. Supposons qu'il y en ait deux, $l_1, l_2$. On aura

$$|f(l_1) - f(l_2) \leq \frac{1}{2}|l_1 - l_2|.$$

Comme $f(l_1) = l_1$ et $f(l_2) = l_2$, on a

$$|l_1 - l_2| \leq \frac{1}{2}|l_1 - l_2|.$$

Ce qui exige que $l_1 = l_2$.

9. Soit $a = f(a)$. En déduire que $l(u_0) = a, \quad \forall u_0 \in \mathbb{R}$..

**corrigé**

Comme pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$, $l(u_0)$ est une solution de $f(x) = x$ et comme $a$ est l'unique solution de cette équation, on a $l(u_0) = a$ pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$.

**Exercice 3**

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, soit l'application $f_n : \ [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x - 1.$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique racine $a_n$ et que $a_n \in ]0, 1]$.

**corrigé**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus $f_n(0) = -1 \leq 0$ et $f_n(1) = (n-1) \geq 0$. L'application du TVI sur $[0, 1]$ conduit à l'existence d'une racine $a_n \in ]0, 1]$ de l'équation $f_n(x) = 0$. Comme pour tout $x > 0$, on a $f_n'(x) > 0$, cette racine est unique (On aurait pu aussi montrer que si $0 < x < y$ alors $f_n(x) < f_n(y)$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{0 < x < y \Rightarrow x^n < y^n\}$).

---

2. Calculer $a_1$ et $a_2$.

**corrigé**

$f_1(x) = x - 1$ et donc $a_1 = 1$. On a $f_2(x) = x^2 + x - 1$ dont l'unique racine positive est $a_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

---

3. Montrer que pour tout $x \geq 0$

$$f_{n+1}(x) \geq f_n(x).$$

**corrigé**

Un calcul direct conduit à $f_{n+1}(x) = x^{n+1} + f_n(x)$. Comme $x \geq 0$, on en déduit le résultat.

---

4. En déduire que la suite $(a_n)_n$ est décroissante.

**corrigé**

On a $f_{n+1}(a_n) \geq f_n(a_n) = 0$. Comme $f_{n+1}(0) \geq -1$ , d'après le TVI appliqué à $f$ sur $[0, a_n]$, l'équation $f_{n+1}(x) = 0$ a une solution dans $]0, a_n[$. Comme on a montré que cette racine est unique, on en déduit que c'est $a_{n+1}$ et ainsi $a_{n+1} \in ]0, a_n]$.

---

5. Montrer que la suite $(a_n)_n$ est convergente. On note $a$ sa limite.

**corrigé**

La suite $(a_n)$ est décroissante et minorée par $0$.

---

6. Prouver que $0 \leq a \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < 1$.

**corrigé**

On a

$$0 \leq a_n \leq a_2 \quad \forall n \geq 2.$$

On déduit le résultat par passage à la limite sur $n$.

---

7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall x \geq 0,\ x \neq 1,\ f_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - 2.$$

**corrigé**

On applique la formule de la somme d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$

$$1 + q + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Ici $q = x$.

---

8. En déduire que

$$1 - a_n^{n+1} = 2(1 - a_n), \quad \forall n \geq 2.$$

**corrigé**

Comme $a_n \leq a_2 < 1$ pour $n \geq 2$, on peut appliquer la formule ci-dessus. En tenant compte que $f_n(a_n) = 0$, on obtient

$$0 = \frac{1 - a_n^{n+1}}{1 - a_n} - 2.$$

Ce qui conduit à la formule demandée.

9. Justifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n^{n+1} = 0$.

**corrigé**

Comme $a_n > 0$, on a $a_n^{n+1} = e^{(n+1)\log a_n}$. On a montré que pour $n \geq 2$, $0 < a_n < a_2$, donc $0 \leq a \leq a_2 < 1$ et ainsi $\log a_n < \log a_2 < 0$. Donc

$$\lim_{n \to +\infty} a_n^{n+1} = 0.$$

10. En déduire que $a = \frac{1}{2}$

**corrigé**

Il suffit de passer à la limite dans l'équation

$$1 - a_n^{n+1} = 2(1 - a_n).$$

On obtient $1 = 2(1 - a)$, c'est-à-dire $a = \frac{1}{2}$.