

Exercice 1 (barème : 2 points)

Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x - 2x^2}{x^3}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^{1/3} - (1+x)^{1/3}}{x}$.

corrigé

On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^3\varepsilon_1(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + (4/3)x^3 + x^3\varepsilon_2(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$. On en déduit que

$$\frac{e^{2x} - 1 - 2x - 2x^2}{x^3} = \frac{4}{3} + \varepsilon_2(x).$$

On a donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x - 2x^2}{x^3} = 4/3$.

Pour $x > -1/2$ on pose $f(x) = (1+2x)^{1/3} - (1+x)^{1/3}$. La fonction f est de classe C^∞ . On remarque que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1/3$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^{1/3} - (1+x)^{1/3}}{x} = 1/3$.

Exercice 2 (Suites récurrentes) (barème : 8 points)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^x - 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. On définit la fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x) - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- (a) Dresser le tableau de variations de φ sur $\mathbb{R}$ (on pensera à calculer les limites en $\pm\infty$).

corrigé

La fonction φ est de classe C^∞ . On a $\varphi'(x) = e^x - 1$. On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$ (en remarquant, par exemple, que $e^x \geq x + x^2/2$ pour tout $x > 0$). On en déduit le tableau de variation de φ

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$	-1	$-$	0	$+$	$+\infty$
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

- (b) En déduire que l'équation $\varphi(x) = 0$ a exactement deux solutions α_1 et α_2 sur $\mathbb{R}$, avec $\alpha_1 < 0 < \alpha_2$. (On ne cherchera pas à calculer α_1 et α_2 de façon explicite.)

Remarque. Les points α_1 et α_2 sont donc les uniques points fixes de f , c'est-à-dire les uniques solutions de l'équation $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$.

corrigé

Sur l'intervalle $]-\infty, 0]$, la fonction φ est continue et strictement décroissante de $+\infty$ à -1 . Elle s'annule donc une seule fois, en un point noté α_1 . Sur l'intervalle $[0, +\infty[$, la fonction φ est continue et strictement croissante de -1 à $+\infty$. Elle s'annule donc une seule fois, en un point noté α_2 . On a bien $\alpha_1 < 0 < \alpha_2$.

- (c) Montrer que $\alpha_2 < 2$.

corrigé

On remarque que $\varphi(2) = e^2 - 4$. Or, pour tout $x > 0$, on a $e^x > 1 + x$ (c'est, par exemple, une conséquence du théorème des accroissements pour la fonction $x \mapsto e^x$ sur l'intervalle $[0, 1]$). On a donc (pour $x = 1$) $e > 2$. On en déduit $e^2 > 4$ et donc $\varphi(2) > 0$. Comme φ est croissante sur l'intervalle $[2, +\infty[$, on a donc $\varphi(x) > 0$ pour $x \geq 2$, ce qui montre que $\alpha_2 < 2$.

2. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

corrigé

On remarque que $f'(x) = e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	$+\infty$
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

- (a) Calculer u_1 et montrer (par récurrence) que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

corrigé

$u_1 = f(0) = -1 \leq 0 = u_0$, ce qui permet d'initialiser la récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose maintenant que $u_n \leq u_{n-1}$. Comme f est croissante, on a donc $f(u_n) \leq f(u_{n-1})$, ce qui donne $u_{n+1} \leq u_n$. On a bien montré, par récurrence, que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

- (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq \alpha_1$.

corrigé

On raisonne encore par récurrence. On a $u_0 \geq \alpha_1$ (car $u_0 = 0$ et $\alpha_1 < 0$). Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_n \geq \alpha_1$. Comme f est croissante, on a donc $f(u_n) \geq f(\alpha_1)$, ce qui donne $u_{n+1} \geq \alpha_1$ (car $f(\alpha_1) = \alpha_1$). On a bien montré, par récurrence, que $u_n \geq \alpha_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite finie.

corrigé

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante minorée. Elle est donc convergente (dans $\mathbb{R}$).

- (d) On note $l = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$. Montrer que $l = \alpha_1$.

corrigé

Comme $u_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi $l \leq 0$. Puis comme $f(u_n) = u_{n+1}$ (pour tout n) et que f est continue, on obtient, quand $n \rightarrow \infty$, $f(l) = l$. On en déduit que $l = \alpha_1$ (car α_1 est le seul point fixe de f dans l'intervalle $] - \infty, 0]$).

Exercice 3 (barème : 4 points)

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On suppose que f s'annule en trois points distincts a, b, c , avec $a < b < c$.

- (a) Montrer qu'il existe des réels d et e , avec $d \in]a, b[$, $e \in]b, c[$ et $f'(d) = f'(e) = 0$.

corrigé

Pour obtenir l'existence de d , on applique le théorème de Rolle à la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ (la fonction f est bien continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$). De même, pour obtenir l'existence de e , on applique le théorème de Rolle à la fonction f sur l'intervalle $[b, c]$.

- (b) Montrer que f'' s'annule en au moins un point de $\mathbb{R}$.

corrigé

On applique le théorème de Rolle à la fonction f' sur l'intervalle $[d, e]$ (la fonction f' est bien continue sur $[d, e]$ et dérivable sur $]d, e[$). Il donne l'existence de $z \in]d, e[\subset \mathbb{R}$ t.q. $f''(z) = 0$.

2. Soient $n \geq 1$ un entier naturel et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $\mathbb{R}$. On suppose que g s'annule en $n + 1$ points distincts $a_1 < \dots < a_{n+1}$. Montrer que la dérivée n -ème $g^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

corrigé

On montre ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation. Pour $n = 1$. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 2 points distincts $a_1 < a_2$. On peut appliquer le théorème de Rolle à la fonction g sur l'intervalle $[a_1, a_2]$. On obtient l'existence de $z \in]a_1, a_2[$ t.q. $g'(z) = 0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose (c'est l'hypothèse de récurrence) que toute fonction h de classe C^n qui s'annule en $n + 1$ points distincts a une dérivée n -ème qui s'annule au moins une fois. Soit maintenant g une fonction de classe C^{n+1} qui s'annule en $n + 2$ points distincts $a_1 < \dots < a_{n+2}$. En appliquant le théorème de Rolle à la fonction g sur l'intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ (pour $i \in \{1, n + 1\}$), on

obtient l'existence de $b_i \in]a_i, a_{i+1}[$ t.q. $g'(b_i) = 0$. La fonction g' est donc de classe C^n et s'annule (au moins) en $n + 1$ points distincts (les points $b_1, \dots, b_{n+1}$). On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à la fonction g' , elle donne que la dérivée n -ème de g' s'annule au moins une fois. On en déduit que la dérivée $(n + 1)$ -ème de g s'annule au moins une fois. Ce qui termine la récurrence.

Exercice 4 (*barème : 2 points*)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

1. Rappeler pourquoi la fonction sinus admet un développement limité à l'ordre trois en 0 et donner explicitement ce développement.

corrigé

La fonction sinus est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$, elle admet donc un développement limité à l'ordre trois en 0. Ce développement limité est $\sin(x) = x - x^3/6 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

2. Montrer que f est dérivable en 0.

corrigé

Pour $x \neq 0$ on a (avec la question précédente)

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{\sin(x) - x}{x^2} = -\frac{x}{6} + x\varepsilon(x).$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ et donc que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Exercice 5 (Etude d'une fonction) (*barème : 10 points*)

On définit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x^3}{1 + |x|}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que f est continue et strictement croissante.

corrigé

La fonction f est continue car elle est formée par le quotient de deux fonctions continues et la fonction au dénominateur ne s'annule pas.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est $f'(x) = \frac{3x^2 + 2|x|^3}{(1 + |x|)^2}$. On a donc $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}^*$. Une application du théorème des accroissements finis donne alors que f est strictement croissante sur $] -\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$ et donc sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $\{f(x), x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ et en déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

corrigé

Comme f est continue, $\{f(x), x \in \mathbb{R}\}$ est un intervalle. Pour montrer que cet intervalle est $\mathbb{R}$ tout entier, il suffit de remarquer que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Enfin, comme f est strictement croissante, f est injective. Finalement, f est donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3. (Question difficile, inutile pour la suite) Montrer que f est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.

corrigé

On pose $h(x) = (1 + |x|)^{-1}$ de sorte que $f(x) = x^3 h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La fonction h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et on a, pour $x \in \mathbb{R}^*$, avec $\text{sign}(x) = +1$ si $x > 0$ et $\text{sign}(x) = -1$ si $x < 0$,

$$h'(x) = -\text{sign}(x)(1 + |x|)^{-2}, \quad h''(x) = 2(1 + |x|)^{-3} \text{ et } h'''(x) = -6\text{sign}(x)(1 + |x|)^{-4}.$$

La fonction f est aussi de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et on a, pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = 3x^2h(x) + x^3h'(x), \quad f''(x) = 6xh(x) + 6x^2h'(x) + x^3h''(x),$$

et

$$f'''(x) = 6h(x) + 18xh'(x) + 9x^2h''(x) + x^3h'''(x).$$

De ces expressions, on déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f'''(x) = 6$. Ceci permet de montrer (par un raisonnement vu en cours) que f est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$ et que $f'(0) = f''(0) = 0$ et $f'''(0) = 6$.

4. Montrer que

$$f(x) = x^3 - x^4 + x^4\varepsilon(x) \text{ pour tout } x > 0,$$

$$f(x) = x^3 + x^4 + x^4\varepsilon(x) \text{ pour tout } x < 0,$$

avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$. En déduire que f n'est pas de classe C^4 sur $\mathbb{R}$.

corrigé

On sait que pour tout $x \neq 0$ on a $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x\eta(x)$, avec $\lim_{x \rightarrow 0} \eta(x) = 0$. On pose $\varepsilon(x) = \eta(x)$ si $x > 0$ et $\varepsilon(x) = -\eta(-x)$ si $x < 0$. On a alors $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ et

$$f(x) = x^3 - x^4 + x^4\varepsilon(x) \text{ pour tout } x > 0,$$

$$f(x) = x^3 + x^4 + x^4\varepsilon(x) \text{ pour tout } x < 0.$$

Ceci montre que f n'a pas de développement limité d'ordre 4 en 0 et donc que f n'est pas de classe C^4 sur $\mathbb{R}$ (mais f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$).

5. On note g la fonction réciproque de f (la fonction g est donc une fonction continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

(a) Montrer que g est de classe C^3 sur $\mathbb{R}^*$, mais non dérivable en 0.

corrigé

La fonction f est bijective de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$. Elle est de classe C^∞ et sa dérivée ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$. On en déduit que g est aussi de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ (résultat vu en cours). Un raisonnement analogue montre que g est de classe C^∞ sur $] -\infty, 0[$.

Pour $x \neq 0$, on a

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{g(x)}{x} = \frac{g(x)}{f(g(x))} = \frac{1 + |g(x)|}{g(x)^2}. \quad (1)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ (par continuité de g en 0), on a donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = +\infty$. Ce qui prouve que g n'est pas dérivable en 0.

(b) La fonction g admet-elle un développement limité d'ordre 3 en 0 ?

corrigé

Si g admettait un développement limité d'ordre 3 en 0, g serait dérivable en 0, ce qui n'est pas le cas. Donc, g n'admet pas de développement limité d'ordre 3 en 0 (ni même d'ordre 1).

(c) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ t.q. $\lim_{y \rightarrow 0, y > 0} \frac{g(y)}{|y|^\alpha} = \lim_{y \rightarrow 0, y < 0} \frac{g(y)}{-|y|^\alpha} = 1$ (et donner cette valeur de α).

corrigé

On reprend l'égalité (1). Elle donne, pour $x \neq 0$, $\frac{g(x)^3}{x} = 1 + |g(x)|$ et donc $\frac{g(x)}{\text{sign}(x)|x|^{\frac{1}{3}}} = (1 + |g(x)|)^{\frac{1}{3}}$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, on a donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{\text{sign}(x)|x|^{\frac{1}{3}}} = 1$. Ceci répond à la question posée avec $\alpha = \frac{1}{3}$.