

Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 1ere année,
Analyse (2eme semestre)

T. Gallouët pour les chapitres 1-5 et 7. A. Benabdallah pour le chapitre 6

January 5, 2011

Table des matières

1	Limites	3
1.1	Définition et propriétés	3
1.2	Opérations sur les limites	8
1.3	Fonctions monotones	10
1.4	Exercices	11
1.4.1	Quelques rappels (Parties majorées et minorées, Suites...)	11
1.4.2	Limites	13
1.5	Exercices corrigés	15
2	Continuité	18
2.1	Définition et propriétés	18
2.2	Théorème des valeurs intermédiaires	19
2.3	Fonction continue sur un intervalle fermé borné	20
2.4	Fonction strictement monotone et continue	22
2.5	Exercices	23
2.6	Exercices corrigés	26
3	Dérivée	37
3.1	Définitions	37
3.2	Opérations sur les dérivées	38
3.3	Théorème des Accroissements Finis	41
3.4	Fonctions de classe C^n	42
3.5	Exercices	43
3.6	Exercices corrigés	46
4	Formules de Taylor et développements limités	63
4.1	Taylor-Lagrange	63
4.2	Taylor-Young	64
4.3	Fonctions analytiques (hors programme...)	66
4.4	Développements limités	68
4.5	Exemples (formules de taylor, DL)	73
4.6	Equivalents	76
4.7	Exercices	77
4.8	Exercices corrigés	83

5	Intégrale et primitives	101
5.1	Objectif	101
5.2	Intégrale des fonctions en escalier	102
5.3	Intégrale des fonctions continues	105
5.4	Primitives	110
5.5	Intégration par parties, formule de Taylor	112
5.6	Théorème de convergence	113
5.7	Exercices	114
6	Courbes planes	121
6.1	Fonctions d'une variable réelle à valeur vectorielle	121
6.1.1	Limites et continuité	121
6.1.2	Dérivée et formule de Taylor-Young	122
6.2	Courbes paramétrées planes	122
6.3	Etude de courbes planes	124
6.3.1	Domaine d'étude	124
6.3.2	Tangente en un point à une courbe pararamétrée	124
6.3.3	Position de la courbe par rapport à la tangente	126
6.3.4	Branches infinies	127
6.3.5	Points multiples	128
6.3.6	Plan d'étude d'une courbe plane paramétrée	128
6.4	Courbes en coordonnées polaires	129
6.4.1	Tangente en un point	129
6.4.2	Branches infinies	130
6.4.3	Etude des points multiples	130
6.4.4	Plan d'étude d'une courbe polaire	130
6.5	Exercices	131
7	Fonctions réelles de plusieurs variables	134
7.1	Limite, continuité	134
7.2	Différentielle, dérivées partielles	135
7.3	Recherche d'un extremum	142
7.4	Exercices	142

Chapitre 1

Limites

1.1 Définition et propriétés

Dans tout ce document, on utilisera indifféremment le terme “fonction” et le terme “application”. Une application (ou une fonction) f de D dans E est la donnée pour tout $x \in D$ de son image par f , notée $f(x)$. (Le domaine de définition de f est donc ici l'ensemble D .) lorsque nous parlerons d'une fonction de $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$, le domaine de définition de f sera donc $\mathbb{R}$ tout entier.

Définition 1.1 (Limite finie en un point de $\mathbb{R}$) Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $b, c \in \mathbb{R}$ t.q. $b < a < c$ et $D \supset]b, a[\cup]a, c[$. On dit que l est limite de f en a si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ t.q. :

$$x \in D, x \neq a, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

Proposition 1.1 (Unicité de la limite) Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $b, c \in \mathbb{R}$ t.q. $b < a < c$ et $D \supset]b, a[\cup]a, c[$. Soit $l, m \in \mathbb{R}$. On suppose que l est limite de f en a et que m est aussi limite de f en a . Alors, $l = m$.

DÉMONSTRATION : Soit $\varepsilon > 0$. Comme l est limite de f en a , il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$x \in D, x \neq a, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

Comme m est limite de f en a , il existe $\beta > 0$ t.q.

$$x \in D, x \neq a, |x - a| \leq \beta \Rightarrow |f(x) - m| \leq \varepsilon.$$

On choisit maintenant $x = \min(a + \alpha, a + \beta, \frac{a+c}{2})$. On a alors $x \neq a$, $x \in D$ (car $a < x < c$), $|x - a| \leq \alpha$ et $|x - a| \leq \beta$. On a donc $|f(x) - l| \leq \varepsilon$ et $|f(x) - m| \leq \varepsilon$. On en déduit $|l - m| \leq 2\varepsilon$.

On a ainsi montré que $|l - m| \leq 2\varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$. On en déduit que $l = m$. En effet, si $l \neq m$ on a $|l - m| > 0$. On choisit alors $\varepsilon = \frac{|l-m|}{4}$ et on obtient

$$2\varepsilon = \frac{|l - m|}{2} \leq \varepsilon,$$

et donc $2 \leq 1$ (car $\varepsilon > 0$). Ce qui est absurde. On a donc bien, nécessairement, $l = m$. ■

Notation : Si l est limite de f en a , on note $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Proposition 1.2 (Caractérisation séquentielle de la limite) Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $b, c \in \mathbb{R}$ t.q. $b < a < c$ et $D \supset]b, a[\cup]a, c[$. Alors, l est la limite en a de f si et seulement si f transforme toute suite convergente vers a (et prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$) en suite convergente vers l , c'est-à-dire :

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D \setminus \{a\}, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l.$$

DÉMONSTRATION : On suppose tout d'abord que $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et on va montrer que f transforme toute suite convergente vers a (et prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$) en suite convergente vers l .

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D \setminus \{a\}$ t.q. $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$. On veut montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$, c'est-à-dire (par définition de la limite d'une suite) que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f(x_n) - l| \leq \varepsilon. \quad (1.1)$$

Soit donc $\varepsilon > 0$. On cherche à montrer l'existence de n_0 donnant (1.1). On commence par remarquer que, comme $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$x \in D, x \neq a, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon. \quad (1.2)$$

Puis, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| \leq \alpha.$$

On a donc pour $n \geq n_0$, $x_n \in D$, $x_n \neq a$ (car la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ prend ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$) et $|x_n - a| \leq \alpha$. Ce qui donne, par (1.2), $|f(x_n) - l| \leq \varepsilon$. On a donc bien

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f(x_n) - l| \leq \varepsilon.$$

On a donc bien montré que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$. Ce qui termine la première partie de la démonstration (c'est-à-dire que $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ implique que f transforme toute suite convergente vers a (et prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$) en suite convergente vers l).

On montre maintenant la réciproque. On suppose que f transforme toute suite convergente vers a (et prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$) en suite convergente vers l . On veut montrer que $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Pour cela, on va raisonner par l'absurde. On suppose que l n'est pas la limite en a de f (la fonction f peut alors avoir une limite en a différente de l ou bien ne pas avoir de limite en a) et on va construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$, t.q. $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ et l n'est pas limite de $f(x_n)$ quand $n \rightarrow +\infty$ (en contradiction avec l'hypothèse).

Comme l n'est pas la limite en a de f , il existe $\varepsilon > 0$ t.q. pour tout $\alpha > 0$ il existe x t.q.

$$x \in D, x \neq a, |x - a| \leq \alpha \text{ et } |f(x) - l| > \varepsilon. \quad (1.3)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En prenant $\alpha = \frac{1}{n+1}$ dans (1.3), on peut donc choisir un réel x_n t.q.

$$x_n \in D, x_n \neq a, |x_n - a| \leq \frac{1}{n+1} \text{ et } |f(x_n) - l| > \varepsilon. \quad (1.4)$$

On a ainsi construit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.q. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D \setminus \{a\}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ (car $|x_n - a| \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout n) et l n'est pas limite de $f(x_n)$ quand $n \rightarrow +\infty$ (car $|f(x_n) - l| > \varepsilon$ pour tout n). Ce qui est bien en contradiction avec l'hypothèse que f transforme toute suite convergente vers a (et prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$) en suite convergente vers l . Ce qui termine la démonstration de la proposition 1.2. ■

Définition 1.2 (Limite finie à droite (ou à gauche) en un point de $\mathbb{R}$) Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$.

1. On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ t.q. $a < c$ et $D \supset]a, c[$. On dit que si l est limite à droite de f en a si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ t.q. :

$$x \in D, a < x \leq a + \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

2. On suppose qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ t.q. $b < a$ et $D \supset]b, a[$. On dit que l est limite à gauche de f en a si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ t.q. :

$$x \in D, a - \alpha \leq x < a \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

Proposition 1.3 (Unicité de la limite à droite (ou à gauche)) Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ t.q. $a < c$ et $D \supset]a, c[$. Si f admet une limite (finie) à droite en a , cette limite est unique.
2. On suppose qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ t.q. $b < a$ et $D \supset]b, a[$. Si f admet une limite (finie) à gauche en a , cette limite est unique.

DÉMONSTRATION : La démonstration de l'unicité de la limite à droite est très voisine de la démonstration de l'unicité de la limite faite pour la proposition 1.1. On reprend ici cette démonstration. On suppose que l est limite à droite de f en a et que m est aussi limite à droite de f en a . Soit $\varepsilon > 0$. Comme l est limite à droite de f en a , il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$x \in D, a < x \leq a + \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

Comme m est limite à droite de f en a , il existe $\beta > 0$ t.q.

$$x \in D, a < x \leq a + \beta \Rightarrow |f(x) - m| \leq \varepsilon.$$

On choisit maintenant $x = \min(a + \alpha, a + \beta, \frac{a+c}{2})$. On a alors $x \in D$, $a < x \leq a + \alpha$ et $a < x \leq a + \beta$. On a donc $|f(x) - l| \leq \varepsilon$ et $|f(x) - m| \leq \varepsilon$. On en déduit $|l - m| \leq 2\varepsilon$.

On a ainsi montré que $|l - m| \leq 2\varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$. Comme dans la proposition 1.1, on en déduit que $l = m$. Ce qui donne l'unicité de la limite à droite de f en a .

La démonstration de l'unicité de la limite à gauche est semblable et est laissée en exercice. ■

Notation : Si l est limite à droite de f en a , on note $l = \lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x)$. Si l est limite à gauche de f en a , on note $l = \lim_{x \rightarrow a, x < a} f(x)$.

Proposition 1.4 (Limite=limite à droite et à gauche) Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $b, c \in \mathbb{R}$ t.q. que $b < a < c$ et $D \supset]b, a[\cup]a, c[$. Alors, f admet l comme limite en a si et seulement si f admet l comme limite à droite et à gauche en a .

DÉMONSTRATION : Cette démonstration (dans le cas $D = \mathbb{R} \setminus \{a\}$) est laissé en exercice (exercice 1.9). ■

Proposition 1.5 (Caractérisation séquentielle de la limite à droite)

Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ t.q. $a < c$ et $D \supset]a, c[$. On a alors :

1. l est la limite à droite en a de f si et seulement si f transforme toute suite convergente vers a , prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$ et "supérieure" à a , en suite convergente vers l , c'est-à-dire :

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D, x_n > a \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l.$$

2. l est la limite à droite en a de f si et seulement si f transforme toute suite convergente vers a , prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$ et décroissante, en suite convergente vers l , c'est-à-dire :

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D, a < x_{n+1} \leq x_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l.$$

DÉMONSTRATION :

La démonstration du premier item est très voisine de celle faite pour la proposition 1.2. On reprend donc ici la démonstration de la proposition 1.2.

On suppose tout d'abord que $l = \lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x)$ et on va montrer que f transforme toute suite convergente vers a , prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$ et "supérieure" à a , en suite convergente vers l .

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ t.q. $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ et $a < x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On veut montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$, c'est-à-dire (par définition de la limite d'une suite) que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f(x_n) - l| \leq \varepsilon. \quad (1.5)$$

Soit donc $\varepsilon > 0$. On cherche à montrer l'existence de n_0 donnant (1.5). On commence par remarquer que, comme $l = \lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x)$, il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$x \in D, a < x \leq a + \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon. \quad (1.6)$$

Puis, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ (et que $x_n > a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$n \geq n_0 \Rightarrow a < x_n \leq a + \alpha.$$

On a donc pour $n \geq n_0$, $x_n \in D$ (car la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ prend ses valeurs dans D) et $a < x_n \leq a + \alpha$. Ce qui donne, par (1.6), $|f(x_n) - l| \leq \varepsilon$. On a donc bien

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f(x_n) - l| \leq \varepsilon.$$

On a donc bien montré que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$. Ce qui termine la première partie de la démonstration (c'est-à-dire que $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ implique que f transforme toute suite convergente vers a , prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$ et "supérieure" à a , en suite convergente vers l .)

On montre maintenant la réciproque. On suppose que f transforme toute suite convergente vers a , prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$ et "supérieure" à a , en suite convergente vers l . On veut montrer que $l = \lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x)$. Pour cela, on va raisonner par l'absurde. On suppose que l n'est pas la limite à droite en a de f (la fonction f peut alors avoir une limite à droite en a différente de l ou bien ne pas avoir de limite à droite en a) et on va construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$, "supérieure" à a , t.q. $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ et t.q. l n'est pas limite de $f(x_n)$ quand $n \rightarrow +\infty$ (en contradiction avec l'hypothèse).

Comme l n'est pas la limite à droite en a de f , il existe $\varepsilon > 0$ t.q. pour tout $\alpha > 0$ il existe x t.q.

$$x \in D, a < x \leq a + \alpha \text{ et } |f(x) - l| > \varepsilon. \quad (1.7)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En prenant dans (1.7) $\alpha = \frac{1}{n+1}$, on peut donc choisir x_n t.q.

$$x_n \in D, a < x_n \leq a + \frac{1}{n+1} \text{ et } |f(x_n) - l| > \varepsilon.$$

on obtient ainsi une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D \setminus \{a\}$, “supérieure” à a , tendant vers a , quand $n \rightarrow +\infty$, et dont l'image par f ne tend vers l . Ce qui est bien en contradiction avec l'hypothèse que f transforme toute suite convergente vers a , prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$ et “supérieure” à a , en suite convergente vers l . Ce qui termine la démonstration du premier item de la proposition 1.5.

On montre maintenant le deuxième item. La première partie est immédiate. Si $l = \lim_{x \rightarrow a, x > a}$, la fonction f transforme toute suite convergente vers a , prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$ et décroissante, en suite convergente vers l (car une telle suite est nécessairement “supérieure” à a). Pour montrer la réciproque, on raisonne une nouvelle fois par l'absurde. On suppose que l n'est pas la limite à droite en a de f . La démonstration du premier item a permis de montrer qu'il existait $\varepsilon > 0$ et une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant

$$a < x_n, x_n \in D, |f(x_n) - l| > \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a.$$

Il suffit de modifier légèrement cette suite pour la rendre décroissante. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $y_n = \min(x_0, \dots, x_n)$. La suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie alors (en remarquant que y_n est l'un des x_p pour $p \leq n$ et que $a < y_n \leq x_n$)

$$a < y_{n+1} \leq y_n, y_n \in D, |f(y_n) - l| > \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a.$$

la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ prend donc ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$, est décroissante, converge vers a et la suite $(f(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers l . Ceci est en contradiction avec l'hypothèse. La démonstration de la proposition 1.5 est terminée. ■

Bien sûr, une caractérisation analogue est possible pour la limite à gauche. Dans le premier item, on remplace “supérieure” par “inférieure” et dans le deuxième item, on remplace “décroissante” par “croissante”, voir l'exercice 1.9.

Exemple 1.1 On prend ici $D =]0, \infty[$ et on cherche la limite à droite de f en 0 dans les deux exemples suivants :

1. Pour $x \in D$, $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$. Pour cet exemple, f n'admet pas de limite à droite en 0.
2. Pour $x \in D$, $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$. Pour cet exemple, $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = 0$.

Définition 1.3 (Limite infinie en 1 point, limites en $\pm\infty$)

Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $b, c \in \mathbb{R}$ t.q. $D \supset]b, a[\cup]a, c[$ et $b < a < c$. On dit que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ si pour tout $A \in \mathbb{R}$ il existe $\alpha > 0$ t.q. :

$$x \in D, x \neq a, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq A.$$

2. Soit $l \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ t.q. $D \supset]b, +\infty[$. On dit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M > 0$ t.q. :

$$x \in D, x \geq M \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

3. On suppose qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ t.q. $D \supset]b, +\infty[$. On dit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ si pour tout $A \in \mathbb{R}$ il existe $M > 0$ t.q. :

$$x \in D, x \geq M \Rightarrow f(x) \geq A.$$

Bien sûr, des définitions analogues existent avec $-\infty$ au lieu de $+\infty$ et, dans le cas du premier item, il est aussi possible de définir des limites infinies à droite et à gauche. Il est suggéré d'écrire de telles définitions.

Exemple 1.2 On prend ici $D =]0, \infty[$ $f(x) = \frac{1}{x^2}$ pour $x \in D$. On a alors ;

1. $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = +\infty$,
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

1.2 Opérations sur les limites

Proposition 1.6 (Limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient)

Soit f, g deux applications de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$ t.q. $b < a < c$ et $D \supset]b, a[\cup]a, c[$. Soit $l, m \in \mathbb{R}$ t.q. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$. Alors :

1. $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = l + m$,
2. $\lim_{x \rightarrow a} fg(x) = lm$,
3. Si $m \neq 0$, il existe $\beta > 0$ t.q. $]a - \beta, a[\cup]a, a + \beta[\subset D$ et $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a - \beta, a[\cup]a, a + \beta[$ (de sorte que f/g est bien définie sur $]a - \beta, a[\cup]a, a + \beta[$) et on a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g}(x) = \frac{l}{m}.$$

DÉMONSTRATION : Les items 1 et 3 sont laissés en exercice (exercice 1.10). On montre ici le deuxième item.

On veut montrer que $\lim_{x \rightarrow a} fg(x) = lm$, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$x \in D, x \neq a, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |fg(x) - lm| \leq \varepsilon. \quad (1.8)$$

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche donc $\alpha > 0$ vérifiant (1.8). Pour $x \in D$, on rappelle que $fg(x) = f(x)g(x)$. On commence par remarquer que $fg(x) - lm = fg(x) - lg(x) + lg(x) - lm$, de sorte que

$$|fg(x) - lm| \leq |f(x) - l||g(x)| + |l||g(x) - m|. \quad (1.9)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$, il existe $\alpha_1 > 0$ t.q.

$$x \in D, x \neq a, |x - a| \leq \alpha_1 \Rightarrow |g(x) - m| \leq \frac{\varepsilon}{2(|l| + 1)},$$

de sorte que

$$x \in D, x \neq a, |x - a| \leq \alpha_1 \Rightarrow |l||g(x) - m| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.10)$$

Il existe aussi $a_2 > 0$ t.q.

$$x \in D, x \neq a, |x - a| \leq \alpha_2 \Rightarrow |g(x) - m| \leq 1 \Rightarrow |g(x)| \leq |m| + 1,$$

de sorte que

$$x \in D, x \neq a, |x - a| \leq \alpha_2 \Rightarrow |f(x) - l||g(x)| \leq |f(x) - l|(|m| + 1). \quad (1.11)$$

Enfin, comme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, il existe $\alpha_3 > 0$ t.q.

$$x \in D, x \neq a, |x - a| \leq \alpha_3 \Rightarrow |f(x) - l| \leq \frac{\varepsilon}{2(|m| + 1)}. \quad (1.12)$$

On pose maintenant $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) > 0$ et on obtient, grâce aux inégalités (1.9)-(1.12),

$$x \in D, x \neq a, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |fg(x) - lm| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ce qui est (1.8) et conclut la démonstration. ■

Des résultats analogues à ceux donnés dans la proposition 1.6 sont possibles si $l = \pm\infty$ et (ou) si $m = \pm\infty$.

Proposition 1.7 (passage à limite dans une inégalité) Soit f, g deux applications de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$ t.q. $D \supset]b, a[\cup]a, c[$ avec $b < a < c$. Soit $l, m \in \mathbb{R}$ t.q. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$. On suppose que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in D$. On a alors $l \leq m$.

DÉMONSTRATION : On commence par montrer que $l - m \leq 2\varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, il existe $\alpha_1 > 0$ t.q.

$$x \in D, x \neq a, |x - a| \leq \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$, il existe $\alpha_2 > 0$ t.q.

$$x \in D, x \neq a, |x - a| \leq \alpha_2 \Rightarrow |g(x) - m| \leq \varepsilon \Rightarrow m - \varepsilon \leq g(x) \leq m + \varepsilon.$$

On choisit maintenant $x = a + \alpha$ avec $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2, \frac{a+c}{2})$ (de sorte que $\alpha \leq \alpha_1$, $\alpha \leq \alpha_2$, $x \neq a$ et $x \in D$). On a alors

$$l - \varepsilon \leq f(x) = g(x) \leq m + \varepsilon.$$

On a donc bien montré que $l - m \leq 2\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

On en déduit que $l - m \leq 0$. En effet, si $l - m > 0$, on pose $\varepsilon = \frac{l-m}{4}$ et on obtient $4\varepsilon = l - m \leq 2\varepsilon$, ce qui est absurde car $\varepsilon > 0$.

Finalement, on a bien montré que $l \leq m$. ■

On donne maintenant un résultat (malheureusement un peu compliqué à énoncer) sur la composition de limites.

Proposition 1.8 (Composition de limites) Soit f, g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$. On suppose aussi que $f(x) \neq b$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$. Alors, $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = c$

DÉMONSTRATION : Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $\alpha > 0$ t.q.

$$x \neq a, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |g(f(x)) - c| \leq \varepsilon.$$

On commence par utiliser le fait que $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$. Ceci donne l'existence de $\eta > 0$ t.q.

$$y \neq b, |y - b| \leq \eta \Rightarrow |g(y) - c| \leq \varepsilon. \quad (1.13)$$

Puis, comme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$x \neq a, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - b| \leq \eta.$$

Comme $f(x) \neq b$ (pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$), on a donc avec (1.13)

$$x \neq a, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |g(f(x)) - c| \leq \varepsilon.$$

On a bien montré que $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = c$. ■

Remarque 1.1 Dans la proposition 1.8, nous avons pris (pour simplifier l'énoncé) des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Mais, cette proposition reste vraie si f est définie que $D \subset \mathbb{R}$ et g définie sur $E \subset \mathbb{R}$ en supposant qu'il existe $\gamma > 0$ t.q. $D \supset]a - \gamma, a[\cup]a, a + \gamma[$ et $E \supset]b - \gamma, b[\cup]b, b + \gamma[$. Il faut alors commencer par remarquer que $g \circ f$ est définie sur ensemble qui contient $]a - \delta, a[\cup]a, a + \delta[$ pour un certain $\delta > 0$.

1.3 Fonctions monotones

Définition 1.4 (fonctions croissantes)

Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et f une application de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$.

1. On dit que f est croissante (ou monotone croissante) si :

$$x, y \in]a, b[, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

2. On dit que f est strictement croissante (ou strictement monotone croissante) si :

$$x, y \in]a, b[, x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

De manière analogue, on définit les fonctions décroissantes.

Proposition 1.9 (Limites d'une fonction monotone) Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et f une application croissante de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$. On a alors :

1. L'application f admet en tout point $c \in]a, b[$ une limite à droite et une limite à gauche, encadrant $f(c)$ (c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow c, x < c} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \rightarrow c, x > c} f(x)$).
2. L'application f admet une limite (à gauche) finie ou égale à $+\infty$ en b , et l'application f admet une limite (à droite) finie ou égale à $-\infty$ en a .

DÉMONSTRATION : Soit $c \in]a, b[$. On va montrer que f admet une limite à gauche en c et que cette limite est inférieure ou égale à $f(c)$.

On pose $A = \{f(x), x < c\}$. L'ensemble A est une partie non vide de $\mathbb{R}$, majorée par $f(c)$ (car f est croissante), il admet donc une borne supérieure, que l'on note l . On a $l \leq f(c)$ (car $f(c)$ est un majorant de A). On montre maintenant que $l = \lim_{x \rightarrow c, x < c} f(x)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $l - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A (puisque l est le plus petit des majorants de A), il existe $b \in A$ t.q. $b > l - \varepsilon$. Il existe donc $x_0 < c$ t.q. $f(x_0) = b > l - \varepsilon$. On pose $\alpha = c - x_0$. On a donc $\alpha > 0$ et, grâce à la croissance de f ,

$$x_0 \leq x \Rightarrow f(x_0) \leq f(x),$$

et donc, comme $x_0 = c - \alpha$ et $f(x_0) = b > l - \varepsilon$,

$$c - \alpha \leq x \Rightarrow l - \varepsilon < f(x).$$

Par définition de l on a aussi

$$x < c \Rightarrow f(x) \leq l.$$

On a donc, finalement,

$$c - \alpha \leq x < c \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) \leq l.$$

Ceci prouve que $l = \lim_{x \rightarrow c, x < c} f(x)$. On a donc bien montré que f admet une limite à gauche en c et que cette limite est inférieure ou égale à $f(c)$.

Un raisonnement semblable (non fait ici) permet de montrer que f admet une limite à droite en c et que cette limite est supérieure ou égale à $f(c)$.

Pour montrer que f admet une limite à gauche, finie ou égale à $+\infty$, en b , on pose $\text{Im}(f) = \{f(x), x \in]a, b[\}$.

Si $\text{Im}(f)$ est majorée, on note β la borne supérieure de $\text{Im}(f)$. La croissance de f permet alors de montrer que $\beta = \lim_{x \rightarrow b, x < b} f(x)$. Cette démonstration est laissée ici en exercice.

Si $\text{Im}(f)$ n'est pas majorée, la croissance de f permet de montrer que $\lim_{x \rightarrow b, x < b} f(x) = +\infty$. Cette démonstration est aussi laissée ici en exercice.

Bien sûr, les démonstrations pour trouver la limite à droite en a sont très voisines. ■

Remarque 1.2 Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et f une application croissante de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$. On pose $\alpha = \lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x)$ et $\beta = \lim_{x \rightarrow b, x < b} f(x)$ (on rappelle que $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$). Si f n'a pas de saut (c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow c, x < c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c, x > c} f(x)$ pour tout $c \in]a, b[$), l'application f est alors une bijection de $]a, b[$ dans $] \alpha, \beta[$. Nous démontrerons cette propriété au chapitre 2, section 2.4.

1.4 Exercices

1.4.1 Quelques rappels (Parties majorées et minorées, Suites...)

Exercice 1.1

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer les implications suivantes :

1. $(\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.

2. $(\forall \varepsilon > 0, a < b + \varepsilon) \Rightarrow a \leq b$.
3. $(\forall \varepsilon > 0, |a - b| < \varepsilon) \Rightarrow a = b$.

Pour les exercices suivants, on rappelle que si A est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, il existe un nombre réel, noté $\sup(A)$, qui est le plus petit des majorants de A . De même, si A est une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$, il existe un nombre réel, noté $\inf(A)$, qui est le plus grand des minorants de A .

Exercice 1.2

Soit A est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. On pose $-A = \{-a, a \in A\}$. Montrer que $-A$ est une partie non vide minorée $\mathbb{R}$. Comparer $\inf(-A)$ et $\sup(A)$.

Exercice 1.3

Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ t.q. $A \subset B$. On suppose que B est majorée. Montrer que A est majorée et que $\sup(A) \leq \sup(B)$. Cette dernière inégalité est-elle nécessairement stricte si l'inclusion de A dans B est stricte ?

Exercice 1.4

Soit A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. On pose $A + B = \{a + b, a \in A \text{ et } b \in B\}$. Montrer que $A + B$ est majorée et comparer $\sup(A + B)$ et $\sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 1.5

1. Montrer que toute suite convergente dans $\mathbb{R}$ est bornée (c'est-à-dire majorée et minorée).
2. Montrer que toute suite croissante majorée est convergente dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1.6

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. On suppose que A est majorée et on pose $a = \sup(A)$. Montrer qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a .
2. On suppose que A n'est pas majorée. Montrer qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers l'infini.

Exercice 1.7 (Moyennes harmonique et arithmétique)

1. Montrer que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $0 < a < b$, on a :

$$a < \frac{2ab}{a+b} < \frac{a+b}{2} < b.$$

2. Soit $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $0 < u_0 < v_0$. On définit, par récurrence, les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

- (a) Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bien définies (c'est-à-dire que $u_n + v_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) et que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes (dans $\mathbb{R}$).
- (b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
- (c) Vérifier que la suite $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
- (d) Donner la limite commune au suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1.4.2 Limites

Exercice 1.8

Soit $l \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ecrire à l'aide des quantificateurs les phrases suivantes :

1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers l quand n tend vers $+\infty$.
2. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
3. $f(x)$ ne tend pas vers l quand x tend vers a .
4. $f(x)$ ne tend pas vers l quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 1.9 (Limite, limite à droite et limite à gauche)

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. Soit f une application définie sur $A = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f admet l comme limite en a si et seulement si f admet (en a) l comme limite à droite et comme limite à gauche.
2. Montrer que f admet l comme limite à gauche en a si et seulement si f vérifie la condition suivante :
Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de A ,

$$x_n \uparrow a, \text{ quand } n \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l,$$

où " $x_n \uparrow a$ quand $n \rightarrow +\infty$ " signifie " $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ et $x_{n+1} \geq x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ".

3. Reprendre les questions 1 et 2 avec $l = \infty$ et avec $l = -\infty$.

Exercice 1.10 (Opérations sur les limites)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $I =]a, b[$. Soit f et g deux applications de I dans $\mathbb{R}$ et $l, m \in \mathbb{R}$. On suppose que $l = \lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x)$ et $m = \lim_{x \rightarrow a, x > a} g(x)$.

1. Montrer que $l + m = \lim_{x \rightarrow a, x > a} (f + g)(x)$.
2. On suppose que $m \neq 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ t.q. $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in J =]a, c[$. Montrer que $\frac{l}{m} = \lim_{x \rightarrow a, x > a} \frac{f(x)}{g(x)}$.
3. On suppose que $m = 0$, $l > 0$ et que $g(x) > 0$ pour tout $x \in I$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow a, x > a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.
4. On prend ici $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ et $g(x) = x$. Les applications fg et f/g (qui est bien définie sur I) ont-elles une limite à droite en 0 ?

Exercice 1.11 (Quelques exemples...)

Pour les exemples suivants, la fonction f est définie sur $I = \mathbb{R}$.

1. On définit f par $f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. L'application f a-t-elle une limite en 0 ? une limite à droite en 0 ? une limite à gauche en 0 ?

2. On définit f par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - (x + 1)$ pour tout x . Quelle la limite de f en $+\infty$?
3. On définit f par $f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x^2})}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. L'application f a-t-elle une limite en 0 ? une limite à droite en 0 ? une limite à gauche en 0 ?
4. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $E(x) = \sup\{n \in \mathbb{Z}; n \leq x\}$. On définit f par $f(x) = x - \sqrt{x - E(x)}$ pour tout $x \neq 0$. Soit $n \in \mathbb{Z}$, L'application f a-t-elle une limite en n ? une limite à droite en n ? une limite à gauche en n ?

Exercice 1.12 (Autres exemples...)

1. $f(x) = \frac{\sqrt{x^3 - 3x + 2}}{2x^2 - x - 1}$ pour $x \in]0, 1[$. Quelle est la limite (à gauche) de f en 1 ?
2. $f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+4} - \sqrt{2x+4}}$ pour $x \in]0, 1[$. Quelle est la limite (à droite) de f en 0 ?
3. Soit $a > 0$. On définit f par $f(x) = \frac{(1+x)^a}{x}$ pour $x \in]0, 1[$. Quelle est la limite (à droite) de f en 0 ?
4. $f(x) = (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$ pour $x \in]0, 1[$. Quelle est la limite (à droite) de f en 0 ?

Exercice 1.13 (Fonction périodique admettant une limite)

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. on suppose qu'il existe $T > 0$ t.q. $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on dit alors que f est périodique de période T). On suppose de plus que f admet une limite finie, notée l , en $+\infty$. Montrer que f est une fonction constante.

Exercice 1.14 (Limite en $+\infty$)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 1.15 (Point fixe d'une application croissante)

Soit $I = [0, 1]$ et f une application croissante de I dans I . On pose $A = \{x \in I, f(x) \leq x\}$. Montrer que :

1. $A \neq \emptyset$,
2. $x \in A \Rightarrow f(x) \in A$.
3. A possède une borne inférieure $a \in I$.
4. $f(a) = a$.

(Toute application croissante de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ admet donc un point fixe.)

Exercice 1.16 (Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$, construire $x_\varepsilon \in \mathbb{Q}$ tel que $|x - x_\varepsilon| \leq \varepsilon$.

Exercice 1.17 (Moyenne de Cesàro)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $v_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}$.

1. Soit $l \in \mathbb{C}$. On suppose (dans cette question) que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$.
2. On suppose maintenant que $u_n \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ implique $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

(b) On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}_+$, montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l.$$

3. (Généralisation) Soit (λ_n) une suite de nombres réels strictement positifs. Soit $l \in \mathbb{C}$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k \right) = +\infty.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$w_n = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k u_k}{\sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k}.$$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$.

4. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n} = 1.$$

5. Soit $l \in \mathbb{C}$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = l$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = l$.

1.5 Exercices corrigés

Exercice 1.18 (Corrigé de l'exercice 1.11)

Pour les exemples suivants, la fonction f est définie sur $I = \mathbb{R}$.

1. On définit f par $f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. L'application f a-t-elle une limite en 0 ? une limite à droite en 0 ? une limite à gauche en 0 ?

corrigé

Pour $x > 0$, on a $f(x) = x + 1$. On a donc $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = 1$. La fonction f a donc une limite à droite en 0.

Pour $x < 0$, on a $f(x) = x - 1$ (car $\sqrt{x^2} = -x$). On a donc $\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f(x) = -1$. La fonction f a donc une limite à gauche en 0.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f(x)$, la fonction f n'a pas de limite en 0.

2. On définit f par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - (x + 1)$ pour tout x . Quelle la limite de f en $+\infty$?

corrigé

Pour $x > 0$, on a :

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - (x + 1))(\sqrt{x^2 + x + 1} + (x + 1))}{\sqrt{x^2 + x + 1} + (x + 1)} = \frac{x^2 + x + 1 - (x + 1)^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + (x + 1)},$$

et donc

$$f(x) = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + x + 1} + (x + 1)} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x}}.$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$.

3. On définit f par $f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x^2})}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. L'application f a-t-elle une limite en 0 ? une limite à droite en 0 ? une limite à gauche en 0 ?

corrigé

Pour $x > 0$, on a $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. La fonction $\sin$ est dérivable et sa dérivée est la fonction $\cos$. La limite à droite en 0 de f est donc $\cos(0)$, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = 1$. La fonction f a donc une limite à droite en 0.

Pour $x < 0$, on a $f(x) = \frac{\sin(-x)}{x} = -\frac{\sin(x)}{x}$. On a donc $\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f(x) = -1$. La fonction f a donc une limite à gauche en 0.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f(x)$, la fonction f n'a pas de limite en 0.

4. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $E(x) = \sup\{n \in \mathbb{Z}; n \leq x\}$. On définit f par $f(x) = x - \sqrt{x - E(x)}$ pour tout $x \neq 0$. Soit $n \in \mathbb{Z}$, L'application f a-t-elle une limite en n ? une limite à droite en n ? une limite à gauche en n ?

corrigé

Pour $x \in [n - 1, n[$, on a $E(x) = n - 1$ et donc $f(x) = x - \sqrt{x - n + 1}$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow n, x < n} f(x) = n - 1$. La fonction f a donc une limite à gauche en n .

Pour $x \in [n, n + 1[$, on a $E(x) = n$ et donc $f(x) = x - \sqrt{x - n}$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow n, x > n} f(x) = n$. La fonction f a donc une limite à droite en n .

Comme $\lim_{x \rightarrow n, x > n} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow n, x < n} f(x)$, la fonction f n'a pas de limite en n .

Exercice 1.19 (Corrigé de l'exercice 1.13)

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. on suppose qu'il existe $T > 0$ t.q. $f(x + T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on dit alors que f est périodique de période T). On suppose de plus que f admet une limite finie, notée l , en $+\infty$. Montrer que f est une fonction constante.

corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}$, on va montrer que $f(x) = l$. On commence par montrer, par récurrence sur n , que $f(x) = f(x + nT)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En effet, pour $n = 1$, l'hypothèse sur f donne bien $f(x) = f(x + T)$. Puis, soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $f(x) = f(x + nT)$. L'hypothèse sur f , utilisée avec le point $x + nT$, donne $f(x + nT) = f(x + nT + T)$. On en déduit que $f(x) = f(x + (n + 1)T)$. On a bien ainsi montré, par récurrence sur n , que $f(x) = f(x + nT)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On remarque maintenant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x + nT) = +\infty$. Comme f admet l comme limite en $+\infty$, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x + nT) = l$, et donc $f(x) = l$. Ce qui prouve que f est la fonction constante et égale à l .

Exercice 1.20 (Corrigé de l'exercice 1.14)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?

corrigé

La fonction f n'a pas de limite en $+\infty$. En effet, supposons que f ait une limite en $+\infty$, notée l (avec $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$). Toute suite convergeant vers $+\infty$ est alors transformée en une suite ayant l pour limite. En prenant la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $x_n = 2n\pi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que $l = 0$. Puis, en prenant la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, on en déduit que $l = 1$. Ceci prouve que f n'a pas de limite en $+\infty$.

Une autre démonstration possible consiste à utiliser l'exercice 1.19.
