Chapitre 5

Intégrale et primitives

5.1 Objectif

On cherche dans ce chapitre à construire l'opérateur réciproque de l'opérateur de dérivation. Les deux questions suivantes sont alors naturelles.

Question 1 : Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Existe-t-il une application F, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable et t.q. $F' = f$ (c'est-à-dire $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) ? Si une telle application F existe, on dit que F est une primitive de f.

Question 2 : Si F existe, dans la question 1, F est-elle unique ?

Réponse à la question 2 : Cette question est facile, F est unique à une constante additive près. On peut le voir comme conséquence du théorème des accroissements finis (théorème 3.2). Nous le verrons dans le théorème 5.2.

Réponse à la question 1 : Cette question est beaucoup plus difficile.

1. On va montrer que la réponse est "oui" si f est continue (le fait que f soit continue est donc une condition suffisante pour que f admette une primitive). Ceci sera vu dans le théorème 5.2.

2. Le fait que f soit continue n'est pas une condition nécessaire pour que f admette une primitive. Plus précisément, si f admet une primitive, on a donc $f = F'$, où F est une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'exercice 3.5 montre alors que f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. Donc, le fait que f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires est une condition nécessaire pour que f admette une primitive. Cette condition est-elle suffisante ? (je ne sais pas..., on peut montrer que si f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, f n'est pas nécessairement localement intégrable, même au sens de Lebesgue, notion qui ne sera pas présentée dans ce document, mais cela ne permet pas de conclure.)

Résumé : L'objectif principal de ce chapitre est donc de démontrer que si f est continue de $]\alpha, \beta[$ dans $\mathbb{R}$ ($-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$), alors f admet une primitive.

5.2 Intégrale des fonctions en escalier

Définition 5.1 (Fonctions en escalier) *Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est "en escalier" si il existe $n \in \mathbb{N}^\star$, $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ t.q. :*

- $a = x_0 < \ldots < x_n = b$,
- $f(x) = \alpha_i$, *si* $x \in]x_{i-1}, x_i[$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

On note $E_{a,b}$ l'ensemble des fonctions en escalier sur l'intervalle $[a,b]$.

Remarque 5.1 Soit $-\infty < a < b < \infty$ et $f \in E_{a,b}$. Soit $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ t.q. : $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ et $f(x) = \alpha_i$ si $x \in]x_{i-1}, x_i[$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.
On aimerait poser $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i - x_{i-1})$. Est ce possible ? La difficulté est ici que les a_i et les α_i ne sont pas nécessairement uniques. Cette difficulté est résolue dans la proposition 5.1.

Proposition 5.1 *Soit $-\infty < a < b < \infty$ et $f \in E_{a,b}$.*

- *Soit $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ t.q. :*
  $a = x_0 < \ldots < x_n = b$, *et* $f(x) = \alpha_i$ *si* $x \in]x_{i-1}, x_i[$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.
- *Soit $y_0, \ldots, y_p \in [a,b]$ et $\beta_1, \ldots, \beta_p \in \mathbb{R}$ t.q. :*
  $a = y_0 < \ldots < y_p = b$ *et* $f(x) = \beta_i$ *si* $x \in]y_{i-1}, y_i[$, $i \in \{1, \ldots, p\}$.

Alors, $\sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^p \beta_i(y_i - y_{i-1})$.

DÉMONSTRATION : On réunit l'ensemble des points x_i, $i \in \{0, \ldots, n\}$, et des points y_j, $j \in \{0, \ldots, p\}$, on a ainsi

$$\{z_0, \ldots, z_q\} = \{x_0, \ldots, x_n\} \cup \{y_0, \ldots, y_p\}, \text{ avec } a = z_0 < \ldots < z_q = b.$$

(On a donc $\max\{n,p\} \le q \le n + p - 1$.) Sur l'intervalle $]z_{k-1}, z_k[$, $k \in \{1, \ldots, q\}$), la fonction f est constante, on note γ_k sa valeur. On va démontrer que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{k=1}^q \gamma_k(z_k - z_{k-1}). \tag{5.1}$$

Bien sûr, un raisonnement analogue donnerait $\sum_{i=1}^p \beta_i(y_i - y_{i-1}) = \sum_{k=1}^q \gamma_k(z_k - z_{k-1})$, ce qui permet de conclure la démonstration.

Pour montrer (5.1), on remarque que les points x_i, $i \in \{0, \ldots, n\}$, font partie des points z_k, $k \in \{0, \ldots, q\}$. Pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, il existe donc $k_i \in \{0, \ldots, q\}$ t.q. $x_i = z_{k_i}$. On a, en particulier, $k_0 = 0$ et $k_n = q$.

Soit maintenant $i \in \{1, \ldots, n\}$. On a $x_i - x_{i-1} = z_{k_i} - z_{k_{i-1}} = \displaystyle\sum_{k=k_{i-1}+1}^{k_i} z_k - z_{k-1}$, et donc

$$\alpha_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{k=k_{i-1}+1}^{k_i} \alpha_i(z_k - z_{k-1}).$$

Mais, pour tout $k \in \{k_{i-1}+1, \ldots, k_i\}$, on a $]z_{k-1}, z_k[\subset]x_{i-1}, x_i[$ et donc $\gamma_k = \alpha_i$. On en déduit que

$$\alpha_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{k=k_{i-1}+1}^{k_i} \gamma_k(z_k - z_{k-1}).$$

On somme maintenant sur i cette égalité et on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=k_{i-1}+1}^{k_i} \gamma_k(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{q} \gamma_k(z_k - z_{k-1}).$$

Ce qui donne bien (5.1) et conclut la démonstration (car, comme cela a déjà été dit, un raisonnement analogue donnerait $\sum_{i=1}^{p} \beta_i(y_i - y_{i-1}) = \sum_{k=1}^{q} \gamma_k(z_k - z_{k-1})$). ■

Définition 5.2 (Intégrale des fonctions en escalier) *Soit $-\infty < a < b < \infty$ et $f \in E_{a,b}$ (voir la définition 5.1). Soit $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ t.q. :*
$a = x_0 < \ldots < x_n = b$ et $f(x) = \alpha_i$, si $x \in]x_{i-1}, x_i[$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.
On pose $T(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x_i - x_{i-1})$.

Voici des propriétés élémentaires sur $E_{a,b}$ et sur l'opérateur T.

Proposition 5.2 (Propriétés de l'intégrale sur $E_{a,b}$)
Soit $-\infty < a < b < \infty$, Alors (avec les définitions 5.1 et 5.2):

1. *$E_{a,b}$ est un e.v. sur $\mathbb{R}$,*
2. *T est une application linéaire de $E_{a,b}$ dans $\mathbb{R}$,*
3. *$f, g \in E_{a,b}$, $f \geq g \Rightarrow T(f) \geq T(g)$,*
4. *$f \in E_{a,b} \Rightarrow |f| \in E_{a,b}$ et $|T(f)| \leq T(|f|)$.*

N.B. La notation "$f \geq g$" signifie "$f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$". La fonction $|f|$ est définie par $|f|(x) = |f(x)|$ pour $x \in [a,b]$.

Démonstration :
1. Il est facile de voir que l'ensemble des applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est un e.v. sur $\mathbb{R}$. On remarque alors que $E_{a,b}$ est un s.e.v. (c'est-à-dire un sous espace vectoriel) de l'ensemble des applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. En effet, soit $f, g \in E_{a,b}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Il existe $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$ t.q. $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ et t.q. f soit constante sur $]x_{i-1}, x_i[$, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. De même, il existe $y_0, \ldots, y_p \in [a,b]$ t.q. $a = y_0 < \ldots < y_p = b$ et t.q. g soit constante sur $]y_{j-1}, y_j[$, pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$. On introduit alors, comme dans la proposition 5.1, l'union des points x_i, $i \in \{0, \ldots, n\}$, et des points y_j, $j \in \{0, \ldots, p\}$, c'est-à-dire

$$\{z_0, \ldots, z_q\} = \{x_0, \ldots, x_n\} \cup \{y_0, \ldots, y_p\}, \text{ avec } a = z_0 < \ldots < z_q = b.$$

Il est clair (comme l'ensemble des points z_k contient tous les points x_i et tous les points y_j) que les fonctions f et g sont constantes sur $]z_{k-1}, z_k[$, pour tout $k \in \{1, \ldots, q\}$. la fonction $\alpha f + \beta g$ est donc aussi constante sur $]z_{k-1}, z_k[$, pour tout $k \in \{1, \ldots, q\}$. ce qui prouve que $\alpha f + \beta g \in E_{a,b}$ et donc que $E_{a,b}$ est un e.v. sur $\mathbb{R}$. (On peut remarquer que cet espace vectoriel est de dimension infinie).

2. Pour montrer que T est une application linéaire sur $E_{a,b}$, on reprend les notations précédentes. Soit $f, g \in E_{a,b}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Comme précédemment, on remarque qu'il existe $\{z_0, \ldots, z_q\}$ t.q. $a = z_0 < \ldots < z_q = b$ et t.q. f et g soient constantes sur $]z_{k-1}, z_k[$, pour tout $k \in \{1, \ldots, q\}$. On note alors α_k la valeur de f sur $]z_{k-1}, z_k[$et β_k la valeur de g sur $]z_{k-1}, z_k[$. Par définition de T (définition 5.1) on a

$$T(f) = \sum_{k=1}^{q} \alpha_k (z_k - z_{k-1}), \;\; T(g) = \sum_{k=1}^{q} \beta_k (z_k - z_{k-1}).$$

La fonction $\alpha f + \beta g$ (qui appartient, comme nous l'avons déjà vu, à $E_{a,b}$) est aussi constante sur $]z_{k-1}, z_k[$ (pour tout $k \in \{1, \ldots, q\}$) et sa valeur sur $]z_{k-1}, z_k[$ est $\alpha\alpha_k + \beta\beta_k$. On a donc (toujours par la définition 5.1)

$$T(\alpha f + \beta g) = \sum_{k=1}^{q} (\alpha\alpha_k + \beta\beta_k)(z_k - z_{k-1}).$$

On en déduit

$$T(\alpha f + \beta g) = \alpha \sum_{k=1}^{q} \alpha_k (z_k - z_{k-1}) + \beta \sum_{k=1}^{q} \beta_k (z_k - z_{k-1}) = \alpha T(f) + \beta T(g).$$

Ce qui prouve bien la linéarité de T.

3. On reprend, encore une fois, les mêmes notations. Soit $f, g \in E_{a,b}$. Il existe $\{z_0, \ldots, z_q\}$ t.q. $a = z_0 < \ldots < z_q = b$ et t.q. f et g soient constantes sur $]z_{k-1}, z_k[$, pour tout $k \in \{1, \ldots, q\}$. On note alors α_k la valeur de f sur $]z_{k-1}, z_k[$et β_k la valeur de g sur $]z_{k-1}, z_k[$. On a donc

$$T(f) = \sum_{k=1}^{q} \alpha_k (z_k - z_{k-1}), \;\; T(g) = \sum_{k=1}^{q} \beta_k (z_k - z_{k-1}).$$

Si $f \geq g$, on a nécessairement $\alpha_k \geq \beta_k$ pour tout $k \in \{1, \ldots, q\}$ (il suffit de remarquer que $\alpha_k = f(x) \geq g(x) = \beta_k$ pour $x \in]z_{k-1}, z_k[$). On en déduit que

$$T(f) = \sum_{k=1}^{q} \alpha_k (z_k - z_{k-1}) \geq \sum_{k=1}^{q} \beta_k (z_k - z_{k-1}) = T(g).$$

4. Soit $f \in E_{a,b}$. Il existe $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ t.q. $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ et $f = \alpha_i$ sur $]x_{i-1}, x_i[$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. On a alors $|f| = |\alpha_i|$ sur $]x_{i-1}, x_i[$, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ceci prouve que $|f| \in E_{a,b}$ et (avec la définition 5.1)

$$T(|f|) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| (x_i - x_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i - x_{i-1}) = T(f).$$

Le même résultat avec $-f$ au lieu de f donne

$$T(|-f|) \geq T(-f).$$

. Comme $|-f| = |f|$ et (par linéarité de T) $T(-f) = -T(f)$, on a donc

$$T(|f|) \geq -T(f).$$

Finalement on a donc $T(|f|) \geq \max(T(f), -T(f)) = |T(f)|$. ■

5.3 Intégrale des fonctions continues

Exemple 5.1 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$. On rappelle que :

$$f \text{ continue (sur } I) \not\Rightarrow f \text{ uniformément continue.}$$

Voici deux exemples d'applications continues et non uniformément continues.

1. $I =]0, 1]$ et $f(x) = \frac{1}{x}$ (vu au chapitre 2).
2. $I = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^2$.

Toutefois, lorsque I est intervalle de $\mathbb{R}$, fermé et borné, le théorème 5.1 montre que f est continue si et seulement si f est uniformément continue.

Théorème 5.1 (Heine) *Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors, f est uniformément continue.*

Démonstration : Cette démonstration fait l'objet de l'exercice 5.2. ■

Remarque 5.2 Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application bornée de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Comme f est bornée, on peut trouver g et h dans $E_{a,b}$ t.q. $g \le f \le h$. Soit $g, h \in E_{a,b}$ t.q. $g \le f \le h$. On a alors (d'après la proposition 5.2) $\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b h(x)dx$. Cette remarque suggère la définition de l'intégrale "supérieure" (notée S_f) et de l'intégrale "inférieure" (notée I_f) de f.

Définition 5.3 (Intégrales supérieure et inférieure) *Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application bornée de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On pose $I_f = \sup\{\int_a^b g(x)dx, g \in E_{a,b}, g \le f\}$, $S_f = \inf\{\int_a^b h(x)dx, h \in E_{a,b}, f \le h\}$.*

Remarque 5.3 Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application bornée de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. La remarque 5.2 (avec les notations de la définition 5.3) donne $I_f \le S_f$. Mail il est possible que $I_f \ne S_f$. Par contre, si $f \in E_{a,b}$, il est facile de montrer que $I_f = S_f = \int_a^b f(x)dx$.

Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. La fonction f est donc bornée (voir le théorème 2.3). Nous avons vu dans la remarque 5.3 que $I_f \le S_f$ (ces quantités sont définies dans la définition 5.3). Dans la proposition 5.4 nous allons montrer que $I_f = S_f$. Ceci nous permettra alors de définir l'intégrale de f sur $[a, b]$ comme la valeur commune de I_f et S_f (voir la définition 5.5). Pour cela, nous allons d'abord montrer qu'on peut approcher f "uniformément" par une fonction en escalier (grâce au théorème 5.1).

Définition 5.4 (Convergence simple et convergence uniforme) *Soit $D \subset \mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de D dans $\mathbb{R}$ et f une application D dans $\mathbb{R}$.*

1. *On dit que f_n converge simplement vers f, quand $n \to +\infty$, si*

$$\text{pour tout } x \in D,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$

2. *On dit que f_n converge uniformément vers f, quand $n \to +\infty$, si*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0.$$

Remarque 5.4 La convergence uniforme implique la convergence simple, mais la réciproque est fausse (même si D est un intervalle fermé borné et que les fonctions f_n et f sont continues de D dans $\mathbb{R}$). Par exemple, on prend $D = [0,1]$, $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et, pour $n \geq 2$, on définit f_n par

$$f_n(x) = nx \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n},$$
$$f_n(x) = -n(x - \frac{2}{n}) \text{ si } \frac{1}{n} < x \leq \frac{2}{n},$$
$$f_n(x) = 0 \text{ si } \frac{2}{n} \leq x \leq 1.$$

La suite $(f_n)_{n\geq 2}$ converge bien simplement vers f, mais elle ne converge par uniformément vers f car, pour tout $n \geq 2$, $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = 1$.

On approche maintenant une fonction continue par une fonction en escalier.

Proposition 5.3 *Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On a alors*

1. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in E_{a,b}$ t.q. $|f - \varphi| \leq \varepsilon$ (c'est-à-dire $\varphi(x) - \varepsilon \leq f(x) \leq \varphi(x) + \varepsilon$ pour tout $x \in [a,b]$).*
2. *Il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E_{a,b}$ t.q. $\varphi_n \to f$ uniformément, quand $n \to +\infty$.*

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue (d'après le théorème 5.1), il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$x, y \in [a,b],\ |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon. \tag{5.2}$$

On choisit alors $n \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $\frac{1}{n} \leq \frac{\alpha}{b-a}$ et pour $i \in \{0, \ldots, n\}$ on pose $x_i = a + \frac{i}{n}(b - a)$, de sorte que $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ et $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \leq \alpha$. On définit alors φ de la manière suivante :

$$\varphi(x) = f(x_{i-1}) \text{ si } x \in I_i,\ i \in \{1, \ldots, n\},$$

avec $I_i = [x_{i-1}, x_i[$ si $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $I_n = [x_{n-1}, x_n]$. Avec cette définition de φ, on a bien $\varphi \in E_{a,b}$ et on a $|f - \varphi| \leq \varepsilon$. En effet, soit $x \in E_{a,b}$, il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ t.q. $x \in I_i$. On a alors (grâce à (5.2))

$$|\varphi(x) - f(x)| = |f(x_{i-1}) - f(x)| \leq \varepsilon \text{ car } |x - x_{i-1}| \leq x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \leq \alpha.$$

On a donc bien trouvé $\varphi \in E_{a,b}$ t.q. $|\varphi - f| \leq \varepsilon$.
Pour montrer le deuxième item, il suffit de prendre, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $\varphi_n \in E_{a,b}$ t.q. $|\varphi_n - f| \leq \frac{1}{n}$. On a alors $\sup_{x\in[a,b]} |\varphi_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$. La suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge donc uniformément vers f. ■

Proposition 5.4 *Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors $I_f = S_f$.*

Démonstration : Comme cela a été dit dans la remarque 5.3 on a $I_f \leq S_f$ (cela est même vrai pour toute fonction bornée de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ et donc, *a fortiori* pour toute fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$). Grâce à la proposition 5.3, on va montrer maintenant que $I_f = S_f$.
D'après la proposition 5.3, il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E_{a,b}$ t.q. $\varphi_n \to f$ uniformément vers f, quand $n \to +\infty$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_n - \varepsilon_n \leq f \leq \varphi_n + \varepsilon_n,$$

avec $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ et $\varepsilon_n = \sup_{x\in[a,b]} |\varphi_n(x) - f(x)|$. En posant $g_n = f_n - \varepsilon_n$ et $h_n = f_n + \varepsilon_n$, on a donc $g_n, h_n \in E_{a,b}$ et $g_n \leq f \leq h_n$. La définition de I_f et S_f (définition 5.3) et le fait que $I_f \leq S_f$ donne alors

$$\int_a^b g_n(x)dx \leq I_f \leq S_f \leq \int_a^b h_n(x)dx.$$

Grâce à la linéarité de l'intégrale sur $E_{a,b}$, on a donc

$$\int_a^b \varphi_n(x)dx - \varepsilon_n(b-a) \leq I_f \leq S_f \leq \int_a^b \varphi_n(x)dx + \varepsilon_n(b-a). \tag{5.3}$$

On en déduit, en particulier, que $0 \leq S_f - I_f \leq 2\varepsilon_n(b-a)$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, on a donc $I_f = S_f$. ■

Définition 5.5 (Intégrale des fonctions continues) *Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On pose $\int_a^b f(x)dx = I_f = S_f$ (les quantités I_f et S_f sont définies dans la définition 5.3).*

Remarque 5.5 Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On sait maintenant que $\int_a^b f(x)dx = I_f = S_f$. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $E_{a,b}$ t.q. $\varphi_n \to f$ uniformément vers f, quand $n \to +\infty$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_n - \varepsilon_n \leq f \leq \varphi_n + \varepsilon_n,$$

avec $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ et $\varepsilon_n = \sup_{x\in[a,b]} |\varphi_n(x) - f(x)|$. Comme cela a été vu dans la proposition 5.4, on a

$$\int_a^b \varphi_n(x)dx - \varepsilon_n(b-a) \leq I_f \leq S_f \leq \int_a^b \varphi_n(x)dx + \varepsilon_n(b-a).$$

Mail, comme $\int_a^b f(x)dx = I_f = S_f$, on en déduit

$$|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b \varphi_n(x)dx| \leq \varepsilon_n(b-a).$$

On a donc $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$. Nous utiliserons ceci pour démontrer (simplement) la linéarité de l'intégrale sur l'ensemble des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ (proposition 5.5).

Soit $-\infty < a < b < \infty$, on rappelle que $E_{a,b} = \{f : [a,b] \to \mathbb{R};\ f \text{ en escalier}\}$ et on note $C([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R};\ f \text{ continue}\}$. L'intégrale est donc définie sur $C([a,b])$ (et sur $E_{a,b}$). Voici quelques propriétés simples de l'intégrale sur $C([a,b])$ déduites de celles sur $E_{a,b}$ (proposition 5.2).

Proposition 5.5 (Propriétés de l'intégrale des fonctions continues) *Soit $-\infty < a < b < \infty$. On note I l'application de $C([a,b])$ dans $\mathbb{R}$ définie par $I(f) = \int_a^b f(x)dx$. Alors :*

1. *$C([a,b])$ est un e.v. sur $\mathbb{R}$,*
2. *(linéarité) I est une application linéaire de $C([a,b])$ dans $\mathbb{R}$,*

3. (monotonie) $f, g \in C([a,b])$, $f \geq g \Rightarrow I(f) \geq I(g)$,

4. $f \in C([a,b]) \Rightarrow |f| \in C([a,b])$ *et* $|I(f)| \leq I(|f|)$.

DÉMONSTRATION :
1. Le fait que $C([a,b])$ est un e.v. sur $\mathbb{R}$ est facile à voir. En effet, si f et g sont continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ et si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la fonction $\alpha f + \beta g$ est aussi continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $f, g \in C([a,b])$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Il existe deux suites $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E_{a,b}$ t.q. $\varphi_n \to f$ uniformément et $\psi_n \to g$ uniformément, quand $n \to +\infty$. Pour tout $x \in [a,b]$, on a

$$|(\alpha\varphi_n + \beta\psi_n)(x) - (\alpha f + \beta g)(x)| \leq |\alpha||\varphi_n(x) - f(x)| + |\beta||\psi_n(x) - g(x)|,$$

et donc

$$\sup_{x\in[a,b]}\{|(\alpha\varphi_n + \beta\psi_n)(x) - (\alpha f + \beta g)(x)|\} \leq |\alpha| \sup_{x\in[a,b]}\{|\varphi_n(x) - f(x)|\} + |\beta| \sup_{x\in[a,b]}\{|\psi_n(x) - g(x)|\}.$$

On en déduit que $(\alpha\varphi_n + \beta\psi_n) \to (\alpha f + \beta g)$ uniformément, quand $n \to +\infty$. D'après la remarque 5.5 on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx, \quad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\alpha\varphi_n + \beta\psi_n)(x)dx = \int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx.$$

Or, la linéarité de l'intégrale sur $E_{a,b}$ (proposition 5.2) donne

$$\int_a^b (\alpha\varphi_n + \beta\psi_n)(x)dx = \alpha \int_a^b \varphi_n(x)dx + \beta \int_a^b \psi_n(x)dx,$$

en passant à la limite quand $n \to +\infty$ on obtient donc

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Ce qui prouve bien la linéarité de l'intégrale sur $C([a,b])$.
3. Soit $f, g \in C([a,b])$, avec $g \leq f$. On remarque simplement ici que

$$\{\varphi \in E_{a,b}, \varphi \leq g\} \subset \{\varphi \in E_{a,b}, \varphi \leq f\}.$$

On en déduit $I_g \leq I_f$ et donc

$$\int_a^b g(x)dx = I_g \leq I_f = \int_a^b f(x)dx.$$

4. Soit $f \in C([a,b])$. On a, bien sûr $|f| \in C([a,b])$. Comme $f \leq |f|$, l'item précédent donne

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Mais, on a aussi $-f \leq |f|$, les deux items précédents donnent alors

$$-\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (-f)(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Finalement, comme $|\int_a^b f(x)dx| = \max\{\int_a^b f(x)dx, -\int_a^b f(x)dx\}$, on a bien

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Ce qui termine la démonstration de la proposition 5.5. ■

Remarque 5.6 Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On a défini l'intégrale des fonctions continues (et l'intégrale des fonctions en escalier) sur l'intervalle $[a, b]$. On a aussi montré que l'application $f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ était linéaire sur $E_{a,b}$ (proposition 5.2) et linéaire sur $C([a, b])$ (proposition 5.5). On donne maintenant deux généralisations possibles (mais peu intéressantes).

1. On note $S_{a,b}$ l'ensemble des fonctions réglées, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions qui sont limite uniforme de fonctions en escalier. L'ensemble $S_{a,b}$ contient donc $E_{a,b}$ et $C([a, b])$. En reprenant la proposition 5.3, il est facile de voir que $I_f = S_f$ si $f \in S_{a,b}$ (dans la proposition 5.3, on a seulement utilisé le fait qu'une fonction continue était limite uniforme de fonctions en escalier). Si $f \in S_{a,b}$, on pose $\int_a^b f(x)dx = I_f = S_f$. De même, une adaptation simple de la proposition 5.5 montre que $S_{a,b}$ est un e.v. sur $\mathbb{R}$ et que l'application $f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ est linéaire sur $S_{a,b}$.
2. Soit f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est intégrable au sens de Riemann si f est bornée et $I_f = S_f$ (voir la définition 5.3). On note $R_{a,b}$ l'ensemble des fonctions intégrables au sens de Riemann sur l'intervalle $[a, b]$. L'ensemble $R_{a,b}$ contient donc $S_{a,b}$. Si $f \in R_{a,b}$, on pose $\int_a^b f(x)dx = I_f = S_f$. On peut montrer que $R_{a,b}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que l'application $f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ est linéaire sur $R_{a,b}$ (voir l'exercice 5.9). Cette démonstration est différente de celle de la proposition 5.5 car une fonction appartenant à $R_{a,b}$ n'est pas forcément limite uniforme de fonctions en escalier.
3. Les deux généralisations précédentes (l'intégrale sur $S_{a,b}$ et sur $R_{a,b}$) sont peu intéressantes. Une généralisation très intéressante (mais qui utilise des outils différents) est l'intégrale de Lebesgue. Elle contient l'intégrale de Riemann, c'est-à-dire l'intégrale sur $R_{a,b}$, et donc aussi l'intégrale des fonctions réglées et l'intégrale des fonctions continues.

Remarque 5.7 Soit $-\infty < a < b < \infty$ et $f \in C([a, b])$, on pose $m = \inf\{f(x),\ x \in [a, b]\}$ et $M = \sup\{f(x),\ x \in [a, b]\}$. Une conséquence du troisième item de la proposition 5.5 est alors que $m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$.

Proposition 5.6 (Formule de Chasles) *Soit $-\infty < a < b < \infty$, $f \in C([a, b])$ et $a < c < b$. Alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

DÉMONSTRATION : Soit $\varphi \in E_{a,b}$. On définit ξ et ζ par

$$\xi(x) = \varphi(x) \text{ pour } x \in [a, c],\ \ \zeta(x) = \varphi(x) \text{ pour } x \in [c, b].$$

Il est facile de voir que $\xi \in E_{a,c}$, $\zeta \in E_{c,b}$ et (avec la définition 5.2) que

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^c \xi(x)dx + \int_c^b \zeta(x)dx. \tag{5.4}$$

Comme $f \in C([a,b])$, il existe une suite φ_n dans $E_{a,b}$ t.q. $\varphi_n \to f$ uniformément sur $[a,b]$. On définit alors les suites $(\xi)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $E_{a,c}$ et $E_{c,b}$ par

$$\xi_n(x) = \varphi_n(x) \text{ pour } x \in [a,c], \quad \zeta_n(x) = \varphi_n(x) \text{ pour } x \in [c,b].$$

La suite $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,c]$ et la suite $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[c,b]$. La remarque 5.5 donne donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^c \xi_n(x)dx = \int_a^c f(x)dx, \ \lim_{n\to+\infty}\int_c^b \zeta_n(x)dx = \int_c^b f(x)dx, \ \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \varphi_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Comme $\displaystyle\int_a^b \varphi_n(x)dx = \int_a^c \xi_n(x)dx + \int_c^b \zeta_n(x)dx$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$, voir (5.4)), on obtient quand $n \to +\infty$, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. ■

5.4 Primitives

Définition 5.6 (Intégrale toutes bornes) *Soit $-\infty < b \leq a < \infty$ et $f \in C([b,a])$, On pose :*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \ \text{si } b < a \ \text{et} \ \int_a^a f(x)dx = 0.$$

Une conséquence facile de la définition 5.6 et de la proposition 5.6 est que si $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$, f est une application continue de $]\alpha,\beta[$ dans $\mathbb{R}$ et $a,b,c \in]\alpha,\beta[$, on a alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

On montre maintenant l'existence (et l'unicité à une constante près) d'une primitive à une fonction continue.

Théorème 5.2 (Primitive d'une fonction continue) *Soit $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$ et f continue de $]\alpha,\beta[$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in]\alpha,\beta[$.*
On pose $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ pour $x \in]\alpha,\beta[$. Alors :

1. *La fonction F dérivable (sur $]\alpha,\beta[$) et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in]\alpha,\beta[$. La fonction F est donc une primitive de f.*
2. *Soit G une primitive de f. Il existe alors $C \in \mathbb{R}$ t.q. $F - G = C$ (c'est-à-dire $F(x) - G(x) = C$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). La fonction F est donc la seule primitive de f s'annulant en a.*

Démonstration : Soit $x \in]\alpha,\beta[$. On va montrer que

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x). \tag{5.5}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en x, il existe $\eta > 0$ t.q.

$$y \in [x-\eta, x+\eta] \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon. \tag{5.6}$$

Soit maintenant $0 < h \leq \eta$. On a

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt \text{ et } f(x) = \frac{f(x)}{h} \int_x^{x+h} dt = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x)dt.$$

On a donc

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| = \frac{1}{h} \left| \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt \right|.$$

On utilise maintenant la proposition 5.5 et (5.6) (car $|h| \leq \eta$). On obtient

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \varepsilon dt = \varepsilon.$$

Un raisonnement analogue avec $-\eta \leq h < 0$ donne

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq \frac{1}{-h} \int_{x+h}^{x} |f(t) - f(x)|dt \leq \frac{1}{-h} \int_{x+h}^{x} \varepsilon dt = \varepsilon.$$

Finalement, on a donc

$$h \neq 0,\ |h| \leq \eta \Rightarrow \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq \varepsilon.$$

Ceci prouve bien (5.5) et termine le 1er item du théorème 5.2, c'est-à-dire F est dérivable et $F' = f$.

Pour montrer le deuxième item, soit G une primitive de f. On a donc, pour tout $y \in]\alpha, \beta[$, $F'(y) = G'(y) = f(y)$. Soit $x \in]\alpha, \beta[$, $x \neq a$. En appliquant le théorème des accroissements finis (théorème 3.2) à la fonction $G - F$ sur l'intervalle dont les bornes sont a et x, il existe y entre a et x t.q.

$$(G(x) - F(x)) - (G(a) - F(a)) = (x - a)(G'(y) - F'(y)) = 0.$$

La fonction $G - F$ est donc constante (et égale à $G(a) - F(a)$, c'est-à-dire à $G(a)$).

Bien sûr, on en déduit que F est la seule primitive de f s'annulant en a. ■

Une conséquence du théorème 5.2 est que l'on peut calculer des intégrales en recherchant des primitives. Plus précisément, soit $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$ et f une fonction continue de $]\alpha, \beta[$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a, b \in]\alpha, \beta[$. Pour calculer $\int_a^b f(t)dt$, on recherche une primitive de f, notée F. On a alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. Par exemple, Pour calculer de $\int_0^1 t^2 dt$, on cherche une primitive de $x \mapsto x^2$. Une primitive est l'application $x \mapsto \frac{x^3}{3}$ et on obtient ainsi $\int_0^1 t^2 = \frac{1}{3}$.

Remarque 5.8 Soit $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$ et f de $]\alpha, \beta[$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1. On a alors, pour tout $a, b \in]\alpha, \beta[$, $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$. En effet, pour $x \in]\alpha, \beta[$, on pose

$$F(x) = \int_a^x f'(t)dt \text{ et } G(x) = f(x) - f(a).$$

Les fonctions F et G sont donc deux primitives, s'annulant en a, de la fonction continue f'. Le théorème 5.2 donne donc que $F = G$, c'est-à-dire $F(b) = G(b)$ pour tout $b \in]\alpha, \beta[$.

Voici un exemple d'application de cette égalité, en utilisant la monotonie de l'intégrale. Si $b > a$, on déduit de l'égalité précédente :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a),$$

avec $m = \min\{f'(x), x \in [a, b]\}$ et $M = \max\{f'(x), x \in [a, b]\}$. (Ceci a déjà été montré précédemment, mais d'une manière différente, en utilisant directement le théorème des accroissements finis, théorème 3.2.)

5.5 Intégration par parties, formule de Taylor

Proposition 5.7 (intégration par parties) *Soit $-\infty \le \alpha < \beta \le \infty$ et f, g deux applications continues de $]\alpha, \beta[$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1. On a alors, pour tout $a, b \in]\alpha, \beta[$, $a < b$:*

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = -\int_a^b f(x)g'(x)dx + f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Démonstration : la fonction fg est aussi de classe C^1 sur $]\alpha, \beta[$. La remarque 5.8 donne donc, comme $(fg)' = f'g + fg'$,

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b (fg)'(t)dt = \int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx.$$

La linéarité de l'intégrale (proposition 5.5) donne alors

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = -\int_a^b f(x)g'(x)dx + f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Ce qui termine la démonstration. ■

On donne maintenant la formule de Taylor avec reste intégral, plus précise que les formules de Taylor-Young et Taylor-Lagrange.

Proposition 5.8 (Taylor, reste intégral) *Soit $-\infty \le \alpha < \beta \le \infty$ et f une application de $]\alpha, \beta[$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a, b \in]\alpha, \beta[$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que f est de classe C^n. On a alors :*

1. *Si $n = 1$, $f(b) = f(a) + (b-a)\int_0^1 f'(tb + (1-t)a)dt$.*
2. *Si $n = 2$, $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + (b-a)^2 \int_0^1 (1-t)f''(tb + (1-t)a)dt$.*
3. *Si $n > 2$, $f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (b-a)^n \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(tb + (1-t)a)dt$.*

Démonstration : On commence par montrer la proposition si $a = 0$, $b = 1$ (et donc $\alpha < 0$ et $\beta > 1$). Soit φ une fonction de classe C^1 sur $]\alpha, \beta[$ (l'intervalle $]\alpha, \beta[$ est donc simplement un intervalle ouvert contenant l'intervalle fermé $[0, 1]$). La remarque 5.8 donne

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)dt.$$

Ceci donne l'item 1 de la proposition 5.8.

On suppose maintenant que φ est de classe C^2. On utilise la proposition 5.7 avec $f(x) = x - 1$ et $g(x) = \varphi'(x)$. On obtient

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)dt = -\int_0^1 (x-1)\varphi''(x)dx + f(1)\varphi'(1) - f(0)\varphi'(0) = \int_0^1 (1-x)\varphi''(x)dx + \varphi'(0).$$

Ceci montre le deuxième item de la proposition 5.8. On montre ensuite le troisième item de la proposition 5.8 en faisant une récurrence et en utilisant la proposition 5.7 (on passe de n à $n+1$ en prenant, dans la proposition 5.7, $f(x) = -\frac{1}{n}(1-x)^n$ et $g(x) = \varphi^{(n)}$). Ceci est laissé en exercice.

Pour montrer le cas général de la proposition 5.8, on se ramène au cas $a = 0$ et $b = 1$ en posant
$$\varphi(t) = f(tb + (1-t)a).$$
La fonction φ est bien définie sur un intervalle ouvert contenant $[0,1]$. Elle a la même régularité que φ (c'est-à-dire que φ est de classe C^n si f est de classe C^n) et on obtient les dérivées de φ à partir de celle de f. Plus précisèment, on a, pour $t \in [0,1]$, $\varphi'(t) = (b-a)f'(tb + (1-t)a)$ et donc, par récurrence sur n, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\varphi^{(n)}(t) = (b-a)^n f^{(n)}(tb + (1-t)a).$$
On trouve alors facilement la formule de taylor de f à partir de celle pour φ. ∎

5.6 Théorème de convergence

Question : Soit $-\infty < a < b < \infty$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $C([a,b])$ et $f \in C([a,b])$.
On suppose que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$ (on dit que f_n converge simplement vers f.)
A-t-on $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$? (i.e. peut-on intervertir lim et $\int$)
Réponse : En général, la réponse est non ! mais la réponse est "oui" si la convergence de f_n vers f est uniforme, comme le montre le théorème 5.3.

Théorème 5.3 (Convergence uniforme donne convergence en moyenne) *Soit $-\infty < a < b < \infty$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $C([a,b])$ et $f \in C([a,b])$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f. Alors :*
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$
On a même
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx = 0.$$

Démonstration : On pose
$$\varepsilon_n = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|.$$
(On peut noter d'ailleurs que ce "sup" est atteint, c'est-à-dire qu'il existe $x_n \in [a,b]$ t.q. $|f_n(x_n) - f(x_n)| = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$.)
La convergence uniforme de f_n vers f donne $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. Par monotonie de l'intégrale, on a donc
$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \le (b-a)\varepsilon_n,$$
on en déduit bien
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx = 0.$$
Puis, les items 2 et 4 de la proposition 5.5 donne
$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))dx\right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \le (b-a)\varepsilon_n.$$
On a donc $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$. ∎

Remarque 5.9 Soit $-\infty < a < b < \infty$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $C([a,b])$ et $f \in C([a,b])$. Nous avons maintenant 3 définitions différentes de convergence :

1. Convergence simple,
2. convergence uniforme,
3. convergence en moyenne (c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx = 0$).

On a : 2) $\Rightarrow$ 1), 2) $\Rightarrow$ 3) (théorème 5.3) mais, on peut montrer : 1) $\not\Rightarrow$ 2), 1) $\not\Rightarrow$ 3), 3) $\not\Rightarrow$ 1), 3) $\not\Rightarrow$ 2).

5.7 Exercices

Exercice 5.1 (Bolzano-Weierstrass)
Soit $-\infty < a < b < \infty$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $[a,b]$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $a_n = \inf\{x_p,\ p \geq n\}$. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite croissante majorée. En déduire qu'il existe $x \in [a,b]$ t.q. $a_n \to x$ quand $n \to +\infty$.
2. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe $\varphi(n) \geq n$ t.q. $|x_{\varphi(n)} - a_n| \leq \frac{1}{n}$ (où a_n est défini à la question précédente). En déduire que $x_{\varphi(n)} \to x$ quand $n \to +\infty$ (où x est défini à la question précédente).

Exercice 5.2 (Théorème de Heine)
Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose que f n'est pas uniformément continue.
   (a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe $x_n, y_n \in [a,b]$ t.q. $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.
   (b) Montrer qu'il existe un point $x \in [a,b]$ t.q. f ne soit pas continue en x. [Utiliser l'exercice 5.1.]
2. On suppose que f est continue (sur $[a,b]$). Montrer que f est uniformément continue (sur $[a,b]$).

Exercice 5.3 (Calcul de primitives)

1. Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^4 + 3x^2 - x$. Calculer F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $F' = f$ et $F(0) = 0$.
2. Soit f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$. Calculer F de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $F' = f$ et $F(0) = 0$.
3. Soit f de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x^4+x^2-1}{x^2}$. Calculer F de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $F' = f$ et $F(1) = 0$.

Exercice 5.4 (Formule de la moyenne)
Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On note $\mathrm{Im}(f) = \{f(x), x \in [a,b]\}$, $m = \inf(\mathrm{Im}(f))$ et $M = \sup(\mathrm{Im}(f))$.

1. Montrer qu'il existe $\mu \in [m,M]$ t.q. :

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a).$$

2. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ t.q. :

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Exercice 5.5 (Intégrale d'une fonction positive)

Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$, et qu'il existe $c \in [a,b]$ t.q. $f(c) > 0$. Montrer que $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Exercice 5.6 (Intégrale impropre)

On définit l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{l} f(x) = 0, \text{ si } x \leq 0, \\ f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}, \text{ si } x > 0. \end{array}$$

1. Montrer que f est continue et dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f' est continue en tout point sauf 0.
3. Soit $0 < a < b < \infty$. Montrer que :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt.$$

4. Soit $a > 0$. Pour $0 < x < a$, on pose, $g(x) = \int_x^a f'(t)dt$. Montrer que $g(x)$ a une limite (dans $\mathbb{R}$) quand $x \to 0$, avec $x > 0$. On note (improprement... car f' n'est pas continue sur $[0,a]$) $\int_0^a f'(t)dt$ cette limite. Montrer que :

$$f(a) - f(0) = \int_0^a f'(t)dt.$$

Exercice 5.7 (Calcul d'intégrales)

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^3 x^3 dx, \qquad \int_1^4 \frac{x^2-1}{x^2} dx, \qquad \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx.$$

Exercice 5.8 (Convergence de l'intégrale)

Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et φ une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\varphi_n \to \varphi$ simplement quand $n \to \infty$ (c'est-à-dire que $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$, pour tout $x \in [0,1]$).

1. Montrer que si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|\, dx = 0$, alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx = \int_0^1 \varphi(x)\, dx$.
2. Montrer que si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ, alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx = \int_0^1 \varphi(x)\, dx$.

3. Donner un exemple pour lequel $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers φ et :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \varphi_n(x)\,dx = \int_0^1 \varphi(x)\,dx.$$

4. Donner un exemple pour lequel $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 \varphi_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \varphi(x)\,dx.$

5. Si la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait les deux conditions :

   (a) Pour tout ε, $0<\varepsilon<1$, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ sur $[\varepsilon,1]$,

   (b) Les φ_n sont à valeurs dans $[-1,+1]$,

   montrer que $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 \varphi_n(x)\,dx = \int_0^1 \varphi(x)\,dx.$

Exercice 5.9 (Linéarité de l'intégrale de Riemann)

Soit $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. On rappelle que $R_{a,b}$ désigne l'ensemble des fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a,b]$ (remarque 5.6). Montrer que $R_{a,b}$ est un e.v. sur $\mathbb{R}$ et que l'application $f\mapsto\int_a^b f(x)dx$ est linéaire sur $R_{a,b}$.

Exercice 5.10 (Changement de variable)

Soient $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ et $\varphi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ une fonction strictement croissante, de classe C^1, vérifiant $\varphi(\alpha)=a$ et $\varphi(\beta)=b$.

1. Montrer que φ est une bijection de $[\alpha,\beta]$ dans $[a,b]$.

2. Montrer que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

   [On pourra introduire $G=F\circ\varphi$, où F est une primitive de f sur $[a,b]$, et calculer G'.]
   Remarque. L'égalité ci-dessus est appelée la formule du changement de variable. On dit qu'on calcule l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ en faisant le changement de variable $x=\varphi(t)$.

3. Calculer les intégrales suivantes :

   (a) $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$. [On pourra considérer le chagement de variable $x=\sin t$.]

   (b) $\int_1^2 e^x\sin(e^x)\,dx$. [On pourra considérer le changement de variable $x=\ln t$.]

Exercice 5.11

Soient $0 < a \le b$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{t} \le \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$.

corrigé

Pour $x \ge a$, on pose $f(x) = \int_a^x \frac{dt}{t} - \frac{x-a}{\sqrt{ax}}$. La fonction f est donc continue de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et $f(a) = 0$.
On montre maintenant que $f'(x) \le 0$ pour tout $x \in]a, \infty[$ (on en déduit que f est décroissante et donc que $f(x) \le 0$ pour tout $x \in [a, +\infty[$, ce qui donne, en particulier, $f(b) \le 0$).
Soit $x > a$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{ax}} + \frac{x-a}{2x\sqrt{ax}} = \frac{2\sqrt{ax} - 2x + x - a}{2x\sqrt{ax}} = \frac{2\sqrt{ax} - x - a}{2x\sqrt{ax}} = \frac{-(\sqrt{x} - \sqrt{a})^2}{2x\sqrt{ax}} < 0.$$

Exercice 5.12

Soit $f \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $a \in]0,1[$ telle que $f(a) = a$. [On pourra s'intéresser à l'intégrale de $x - f(x)$.]

corrigé

Pour $x \in [0,1]$, on pose $g(x) = x - f(x)$. la fonction g est continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 xdx - \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0. \tag{5.7}$$

Si $g(x) > 0$ pour tout $x \in]0,1[$, on a alors (par continuité) $g(x) \ge 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et l'exercice 5.5 donne $\int_0^1 g(x)dx > 0$, en contradiction avec (5.7).
De même, si $g(x) < 0$ pour tout $x \in]0,1[$, on a $\int_0^1 g(x)dx < 0$, en contradiction aussi avec (5.7).
On en déduit qu'il existe $a \in]0,1[$ t.q. $g(a) = 0$, c'est-à-dire $f(a) = a$.

Exercice 5.13

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue strictement croissante telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f^n(t)dt$.

corrigé

On va montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f^n(t)dt = 0$. Soit $0 < \varepsilon < 1$. Comme f est strictement croissante, on a, pour tout $t \in [0, 1-\varepsilon]$,

$$0 = f(0) \le f(t) \le f(1-\varepsilon) < f(1) = 1 \text{ et donc } 0 \le f^n(t) \le f^n(1-\varepsilon) < 1,$$

et, pour tout $t \in [1-\varepsilon, 1]$, $0 \le f(t) \le 1$ et donc $0 \le f^n(t)dt \le 1$.
On en déduit que

$$0 \le \int_0^1 f^n(t)dt \le \int_0^{1-\varepsilon} f^n(1-\varepsilon)dt + \int_{1-\varepsilon}^1 dt \le f^n(1-\varepsilon) + \varepsilon.$$

Comme $f(1-\varepsilon)<1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $f^{n_0}(1-\varepsilon) \le \varepsilon$, on a donc

$$n \ge n_0 \Rightarrow 0 \le \int_0^1 f^n(t)dt \le 2\varepsilon,$$

ce qui prouve bien que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f^n(t)dt = 0$.

Exercice 5.14 (Intégration par parties)

Calculer les primitives des fonctions suivantes (définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) : $f(x) = e^x \cos(x)$, $g(x) = x\mathrm{Arctan}\,(x)$ et $h(x) = (x^2+x+1)e^x$.

corrigé

Ces trois primitives de trouvent en intégrant par parties. On calcule, par exemple, la première.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $\int_0^x e^t \cos t\, dt = -\int_0^x e^t \sin t\, dt + [e^t \sin t]_0^x = -\int_0^x e^t \sin t\, dt + e^x \sin x$. On intégre maintenant une deuxième fois par parties, on obtient

$$\int_0^x e^t \cos t\, dt = -\int_0^x e^t \cos t\, dt + [e^t \cos t]_0^x + e^x \sin x = \int_0^x e^t \cos t\, dt + e^x(\sin x + \cos x) - 1.$$

Ce qui donne finalement $\displaystyle\int_0^x e^t \cos t\, dt = \frac{e^x(\sin x + \cos x) - 1}{2}$.

Exercice 5.15

Calculer les intégrales : $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2}$, $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}$, $\displaystyle\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-3}dx$ et $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^3-7x+6}$.

corrigé

La première se calcule avec un changement de variable. On obtient

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2+1}dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{y^2+1}dy = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Les intégrales suivantes se calculent en utilisant une décompoosition en éléments simples. On calcule, par exemple, la troisième. Comme $x^3-7x+6 = (x-1)(x^2+x-6) = (x-1)(x-2)(x+3)$, on peut montrer qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\frac{1}{x^3-7x+6} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+3} \text{ pour tout } x \notin \{1, 2, -3\}.$$

On peu trouver les valeurs de a, b, c par identification (et montrer aussi ainsi l'existence de a, b, c) mais le plus rapide est de remarquer que

$$a = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^3-7x+6} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-2)(x+3)} = -\frac{1}{4},$$
$$b = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^3-7x+6} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{(x-1)(x+3)} = \frac{1}{5},$$
$$c = \lim_{x\to -3} \frac{x+3}{x^3-7x+6} = \lim_{x\to -3} \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{20}.$$

On peut maintenant calculer l'intégrale demandée

$$I = \int_{-2}^{0} \frac{dx}{x^3 - 7x + 6} = a \int_{-2}^{0} \frac{1}{x-1} dx + b \int_{-2}^{0} \frac{1}{x-2} dx + c \int_{-2}^{0} \frac{1}{x+3} dx.$$

Puis on a

$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{x-1} dx = [\ln(1-x)]_{-2}^{0} = -\ln 3,$$
$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{x-2} dx = [\ln(2-x)]_{-2}^{0} = -\ln 2,$$
$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{x+3} dx = [\ln(x+3)]_{-2}^{0} = \ln 3.$$

On en déduit que $I = \frac{\ln 3}{4} - \frac{\ln 2}{5} + \frac{\ln 3}{20} = \frac{3\ln 3 - 2\ln 2}{10}$.

Exercice 5.16

Evaluer les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$. Comparer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ avec $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{dx}{x}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$. Comparer la suite croissante $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$ avec $\displaystyle\int_1^{n} \frac{dx}{x^2}$. En déduire que la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ est finie.

corrigé

Soit f une fonction continue de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Si $\int_1^a f(x)dx$ a une limite (finie ou infinie) quand $a \to +\infty$, on pose (ceci est une définition, non vue en cours)

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to+\infty} \int_1^a f(x)dx.$$

Comme $\int_1^a \frac{dx}{x} = \ln a$, on a donc $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$.
Comme $\int_1^a \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{a} + 1$, on a donc $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$.

Soit $k \in \mathbb{N}^\star$, Pour $x \in [k, k+1[$, on pose $g(x) = \frac{1}{k}$ (de sorte que $g(x) = 1/k \geq 1/x$ car $x \geq k$). Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, la fonction g est donc une fonction en escalier sur l'intervalle $[1, n+1]$ et comme $g(x) \geq 1/x$ pour tout x, on a

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \int_1^{n+1} g(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty.$

Soit $k \in \mathbb{N}^\star$, Pour $x \in [k, k+1[$, on pose $h(x) = \frac{1}{k+1}$ (de sorte que $h(x) = 1/(k+1) \leq 1/x$ car $x \leq k+1$). Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, la fonction h^2 est donc une fonction en escalier sur l'intervalle $[1, n]$ et comme $h^2(x) \leq 1/x^2$ pour tout x, on a

$$\int_1^{n} \frac{dx}{x^2} \geq \int_1^{n} h^2(x)dx = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty.$

Exercice 5.17

Pour $t > 0$, on pose $f(t) = \frac{\sin t}{t}$. On pose aussi $f(0) = 0$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $G(x) = \int_0^x f(t)\sin t dt$, $H(x) = \int_0^x f(t)^2 dt$. Montrer que $F(x)$ et $H(x)$ ont des limites dans $\mathbb{R}$ quand x tend vers $+\infty$. Montrer que $G(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.