Chapitre 6

Courbes planes

6.1 Fonctions d'une variable réelle à valeur vectorielle

Dans ce paragraphe, on considèrera f une application de domaine de définition $D \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

6.1.1 Limites et continuité

Définition 6.1 *On suppose que $D \supset]b, a[\cup]a, c[$ avec $b < a < c$. Pour chaque $x \in]b, a[\cup]a, c[$, $f(x) \in \mathbb{R}^n$. On note $f_i(x)$ la i-ème composante de $f(x)$. On définit ainsi n applications de D dans $\mathbb{R}$: $f_i : x \to f_i(x)$. On dira que f admet une limite en a si chaque application f_i admet une limite en a. Si on note $l_i = \lim_{x\to a} f_i(x)$ alors $l = (l_1, ..., l_n)$ est par définition la limite de f en a et on note $l = \lim_{x\to a} f(x)$. On a donc*

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall i \in 1, ...n, \lim_{x\to a} f_i(x) = l_i. \tag{6.1}$$

Remarque 6.1 *On peut définir la limite de f en un point a sans passer par les composantes. On définira dans le chapitre 7 la notion de norme sur $\mathbb{R}^n$. Alors f admet l comme limite en a si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ t.q. :*

$$x \in D,\ |x - a| \leq \delta \ \Rightarrow\ \|f(x) - l\| \leq \varepsilon$$

où $\|f(x) - l\|$ désigne une norme du vecteur $(f(x) - l)$.

Exemple 6.1

$$f : x \in \mathbb{R} \to f(x) = (x^2, \cos x) \tag{6.2}$$

$\lim_{x\to 0} f(x) = (0, 1)$.

On définit de manière évidente les limites à droite et à gauche et les limites aux bornes (éventuellement infinies) de D (en se ramenant aux composantes de f).

Définition 6.2 *Si $a \in D$, on dit que f est continue en a si f admet une limite en a égale à $f(a)$.*

De manière équivalente, f est continue en a si chacune des applications f_i est continue en a.

6.1.2 Dérivée et formule de Taylor-Young

De la même manière on définit la dérivée de f par

Définition 6.3 *Soit $a \in D$. On suppose qu'il existe $b < a < c$ tels que $]b, c[\subset D$.*

1. *f est dérivable en a si chacune des fonctions composantes f_i est dérivable en a. La dérivée de f en a, notée $f'(a)$, est définie par $f'a) = (f_1'(a), ..., f_n'(a))$. On a*
$$lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a). \tag{6.3}$$
2. *Si toutes les fonctions composantes sont dérivables en tout point de D, alors f est dérivable sur D et on peut définir la fonction vectorielle $f' : x \in D \to f'(x) = (f_1'(x), ..., f_n'(x))$.*
3. *On définit de même pour $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} = (f_1^{(k)}, .., f_n^{(k)})$.*
4. *$f \in C^k(D; \mathbb{R}^n)$ si $f_i \in C^k(D; \mathbb{R})$, pour tout $1 \leq i \leq n$.*

Exemple 6.2 *Dans l'exemple 6.1, f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a*

$$f'(x) = (2x, -sinx), \tag{6.4}$$

$$f''(x) = (2, -cosx), \tag{6.5}$$

et pour $k > 2$

$$f^{(k)}(x) = (0, cos(x + k\frac{\pi}{2})). \tag{6.6}$$

Théorème 6.1 (Taylor-Young vectoriel) *Soit $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$ et f de $]\alpha, \beta[$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose f de classe $C^p, p \geq 1$. Soit $a \in]\alpha, \beta[$. Alors pour tout $x \in]\alpha, \beta[$,*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^p \varepsilon(x), \quad avec \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0. \tag{6.7}$$

On dit que $(x-a)^p\varepsilon(x)$ est un "petit o" de $(x-a)^p$ dans $\mathbb{R}^n$ lorsque x tend vers a et on note $(x-a)^p\varepsilon(x) = o(x-a)^p$.

6.2 Courbes paramétrées planes

Une courbe *paramétrée* dans un plan P muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ décrit l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan P tels que (x, y) dépendent d'un paramètre réel (qu'on a l'habitude de noter t):

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} \tag{6.8}$$

Définition 6.4 *On appelle courbe paramétrée dans le plan une application d'une partie D de $\mathbb{R}$ dans le plan P qui à tout réel $t \in D$ associe un point $M(t)$ du plan P de coordonnées $(x(t), y(t))$. $S = \{M(t); t \in D\}$ est le support géométrique de la courbe paramétrée. Si $D = [a, b]$ on dit que la courbe paramétrée est un arc d'extrémités $A(x(a), y(a))$ et $B(x(b), y(b))$. Le système F qui à $t \in D$ associe*

$$F(t) = \left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right. \tag{6.9}$$

est appelé représentation paramétrique de la courbe S.

Exemple 6.3 1. Un segment de droite: $[AB]$. On peut choisir

$$F : t \in [0,1] \rightarrow \begin{cases} x = x_a + t(x_b - x_a) \\ y = y_a + t(y_b - y_a). \end{cases} \tag{6.10}$$

On a

$$F(0) = (x_a, y_a) \tag{6.11}$$

$$F(1) = (x_b, y_b), \tag{6.12}$$

$$M(x,y) \in [AB] \Leftrightarrow \exists t \in [0,1] \text{ t.q } (x,y) = F(t). \tag{6.13}$$

2. Le graphe d'une fonction d'une variable réelle est une courbe paramétrée :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et C_f son graphe.

$$F : t \in [a,b] \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \tag{6.14}$$

est bien une représentation paramétrique de la courbe C_f.

3. Un arc de cercle.

Soit A et B deux points d'un cercle C de centre ω et de rayon R. Soit (α, β) les coordonnées de ω dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan où est situé C. Soit $\theta_a \in [0, 2\pi[$, l'angle orienté $(\overrightarrow{0x}, \overrightarrow{\omega A})$ et θ_b l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{\omega B})$. L'arc AB peut être décrit par le paramétrage suivant

$$F : t \in [\theta_a, \theta_b] \rightarrow \begin{cases} x = \alpha + R\cos t \\ y = \beta + R\sin t \end{cases} . \tag{6.15}$$

4. Une ellipse

$$F : t \in [0, 2\pi[\rightarrow \begin{cases} x = \alpha + a\cos t \\ y = \beta + b\sin t \end{cases} . \tag{6.16}$$

Remarque 6.2 Il n'y a pas unicité de la représentation paramétrique d'une courbe. A un même support S est associé une infinité de représentations paramétriques. Par exemple

1. $t \in [0, 2\pi]$,

$$F_1(t) = (\alpha + R\cos t, \beta + R\sin t) \tag{6.17}$$

2. $t \in [0, 2\pi]$,

$$F_2(t) = (\alpha + R\cos t, \beta - R\sin t) \tag{6.18}$$

Le support de ces 2 courbes paramétrées est le cercle de centre ω et de rayon R. Dans le cas de F_1, le cercle est parcouru dans le sens direct, et dans le sens inverse dans l'autre cas.

Si F est une représentation paramétrique d'une courbe S et ϕ une application surjective de D' dans D, alors $F \circ \phi$ est une autre représentation paramétrique de la même courbe S.

6.3 Etude de courbes planes

Soit une courbe paramétrée S définie par une représentation paramétrique (I, F), où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et F une fonction vectorielle de I dans $\mathbb{R}^2$. On notera $(x(t), y(t))$ les composantes de F. L'objet de ce paragraphe est l'étude jusqu'au tracé de S.

6.3.1 Domaine d'étude

On va commencer par essayer de réduire le domaine d'étude de F.

Périodicité

Si les fonctions x, y sont périodiques, on cherche le plus petit $T > 0$ tel que

$$\forall t \in I,\ x(t+T) = x(t) \text{ et } y(t+T) = y(t). \tag{6.19}$$

La fonction F sera T périodique. T peut s'obtenir en cherchant le p.p.c.m des périodes de x et y. Si un tel T existe, la courbe S sera entièrement décrite lorsque t parcourt $I \cap [a, a+T]$ où $a \in \mathbb{R}$.

Exemple 6.4

$$I = \mathbb{R},\ et\ F(t) = (cos^3 t, sin 2t) \tag{6.20}$$

x est 2π périodique, y est π périodique, donc F est 2π périodique. On peut réduire le domaine d'étude à tout intervalle de longueur 2π.

Symétries

Supposons que I soit un intervalle centré à l'origine.
Si pour tout $t \in I$

1. $$x(-t) = x(t), \text{ et } y(-t) = -y(t) \tag{6.21}$$
   alors Ox est axe de symétrie.
2. $$x(-t) = -x(t), \text{ et } y(-t) = y(t) \tag{6.22}$$
   alors Oy est axe de symétrie.
3. $$x(-t) = -x(t), \text{ et } y(-t) = -y(t) \tag{6.23}$$
   alors O est centre de symétrie.

6.3.2 Tangente en un point à une courbe pararamétrée

Définition 6.5 *Soit $M_0(x(t_0), y(t_0)) \in S$ et $M = F(t_0 + h)$ (pour h tel que $t_0 + h \in I$). On dit que S admet une demi-tangente en M_0 si $\dfrac{\overrightarrow{M_0M}}{M_0M}$ admet une limite quand $h \to 0^+$. De même si $h \to 0^-$. On dit que S admet une tangente en M_0 si elle admet des demi-tangentes colinéaires (elles seront égales ou opposées, et non nulles). Ces demi-tangentes définissent alors une unique droite passant par M_0, appelée la tangente à S en M_0.*

De manière plus intuitive, la tangente à S en M_0 est la “limite” de la droite MM_0 lorsque M tend vers M_0 en restant sur S (il resterait à préciser le sens de la limite d'une droite).

Exemple 6.5 *Si*

$$F(t) = \begin{cases} (e^{-1/t}, 0) & si\ t \geq 0, \\ (0, e^{-1/t}) & si\ t < 0, \end{cases} \tag{6.24}$$

alors la courbe S possède deux demi-tangentes non colinéaires (et F est pourtant C^∞).

Définition 6.6 *Supposons que F soit dérivable en $t_0 \in I$. Si $F'(t_0) \neq 0$, M_0 est appelé un point régulier de S et sinon, il est appelé point stationnaire.*

Proposition 6.1 (Tangente en un point stationnaire) *Soit $t_0 \in I$. Si F est dérivable en t_0 et si $F'(t_0) \neq 0$, alors S admet une tangente en M_0 et un de ses vecteurs directeurs est $\overrightarrow{v} = x'(t_0)\overrightarrow{i} + y'(t_0)\overrightarrow{j}$.*

Soit $M = F(t_0 + \Delta t) \in S$. La droite (M_0M) a pour vecteur directeur

$$\frac{F(t_0 + \Delta t) - F(t_0)}{\Delta t} \tag{6.25}$$

Lorsque Δt tends vers 0,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t_0 + \Delta t) - F(t_0)}{\Delta t} = F'(t_0). \tag{6.26}$$

Ainsi dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, un vecteur directeur de la tangente à la courbe en M_0 est

$$x'(t_0)\overrightarrow{i} + y'(t_0)\overrightarrow{j}. \tag{6.27}$$

La tangente admet la représentation paramétrique suivante

$$\begin{cases} x(\theta) = x(t_0) + x'(t_0)\theta \\ y(\theta) = y(t_0) + y'(t_0)\theta \end{cases} \qquad (\theta \in \mathbb{R}), \tag{6.28}$$

et l'équation cartésienne

$$y'(t_0)(x - x(t_0)) - x'(t_0)(y - y(t_0)) = 0. \tag{6.29}$$

Proposition 6.2 (Tangente en un point stationnaire) *S'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que F soit dérivable jusqu'à l'ordre k en t_0 et tel que $F^{(k)}(t_0) \neq 0$, alors S admet une tangente en M_0. Elle a pour vecteur directeur la première dérivée $F^{(p)}(t_0)$ non nulle.*

La tangente admet la représentation paramétrique suivante

$$\begin{cases} x(\theta) = x(t_0) + x^{(p)}(t_0)\theta \\ y(\theta) = y(t_0) + y^{(p)}(t_0)\theta \end{cases} \qquad (\theta \in \mathbb{R}), \tag{6.30}$$

et l'équation cartésienne

$$y^{(p)}(t_0)(x - x(t_0)) - x^{(p)}(t_0)(y - y(t_0)) = 0. \tag{6.31}$$

6.3.3 Position de la courbe par rapport à la tangente

Supposons que F soit suffisamment dérivable. Soit $t_0 \in I$. S'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que F soit dérivable jusqu'à l'ordre k en t_0 et tel que $F^{(k)}(t_0) \neq 0$, soit $p = \min\{k \in \mathbb{N}^*; F^{(k)}(t_0) \neq 0\}$. Soit q le plus petit entier $> p$ (s'il existe) tel que les vecteurs $(F^{(p)}(t_0), F^{(q)}(t_0))$ forment une base de $\mathbb{R}^2$. Posons

$$\overrightarrow{u(t_0)} = x^{(p)}(t_0)\overrightarrow{i} + y^{(p)}(t_0)\overrightarrow{j} \tag{6.32}$$

$$\overrightarrow{v(t_0)} = x^{(q)}(t_0)\overrightarrow{i} + y^{(q)}(t_0)\overrightarrow{j} \tag{6.33}$$

La formule de Taylor-Young vectorielle donne

$$F(t_0+h) = F(t_0) + F^{(p)}(t_0)\frac{h^p}{p!} + \sum_{k=p+1}^{k=q-1} F^{(k)}(t_0)\frac{h^k}{k!} + F^{(q)}(t_0)\frac{h^q}{q!} + h^q\varepsilon(h). \tag{6.34}$$

Comme pour $p \leq k \leq (q-1)$ les vecteurs $F^{(p)}(t_0), F^{(k)}(t_0)$ sont linéairement dépendants, il existe des scalaires λ_k tels que $F^{(k)}(t_0) = \lambda_k F^{(p)}(t_0)$, pour tout $p \leq k \leq (q-1)$. On obtient donc

$$F(t_0+h) = F(t_0) + F^{(p)}(t_0)\sum_{k=p}^{k=q-1} \lambda_k \frac{h^k}{k!} + F^{(q)}(t_0)\frac{h^q}{q!} + h^q\varepsilon(h). \tag{6.35}$$

Lorsque $h \to 0$, $\frac{h^p}{p!}$ et $\frac{h^q}{q!}$ sont des équivalents des coordonnées $(x(t_0+h), y(t_0+h))$ de $F(t_0+h)$ dans le repère $(M_0, \overrightarrow{u(t_0)}, \overrightarrow{v(t_0)})$. On en déduit

1. p impair et q pair:
   La courbe est d'un même côté par rapport à la tangente et de part et d'autre de l'axe passant par M_0 et porté par le vecteur $\overrightarrow{v(t_0)}$. On dit que M_0 est un *méplat* ou *point ordinaire*.
2. p impair et q impair:
   La courbe traverse la tangente et l'axe passant par M_0 et porté par le vecteur $\overrightarrow{v(t_0)}$. M_0 est appelé *point d'inflexion*.
3. p pair et q impair:
   La courbe traverse la tangente et est situtée d'un même côté par rapport à l'axe passant par M_0 et porté par le vecteur $\overrightarrow{v(t_0)}$. M_0 est appelé *point de rebroussement de première espèce*.
4. p pair et q pair:
   La courbe est situtée d'un même côté par rapport à la tangente et l'axe passant par M_0 et porté par le vecteur $\overrightarrow{v(t_0)}$. M_0 est appelé *point de rebroussement de seconde espèce*.

Définition 6.7 *$M(t_0)$ est appelé point birégulier si $(F'(t_0), F''(t_0))$ forment une base.*

Exemple 6.6 *Soit $F(t) = (t^2 + t^4, t^3 - t^4)$. F est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$; $M(0) = (0,0)$ est un point stationnaire. Par contre $F''(0) = (2,0)$ et $F^{(3)}(0) = (0,6)$. Donc $p = 2, q = 3$. L'origine est donc un point de rebroussement de première espèce.*

Remarque 6.3
Lorsque $M(t_0)$ est un point birégulier, le signe du déterminant formé par $(F'(t_0), F''(t_0))$:

$$x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)$$

donne la concavité de la courbe au point $M(t_0)$. Plus précisément, on a

1. $x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0) > 0$, alors la courbe “tourne en $M(t_0)$ dans le sens direct” (dans une orientation directe “classique”, la courbe “tourne à gauche”, elle tourne sa concavité vers le haut.

2. $x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0) < 0$, alors la courbe “tourne en $M(t_0)$ dans le sens indirect” (dans une orientation directe “classique”, la courbe “tourne à droite”, elle tourne sa concavité vers le bas.

6.3.4 Branches infinies

Définition 6.8 *On dit que la courbe S de représentation paramétrique (I, F) admet une branche infinie quand $t \to t_0$ où t_0 peut être fini ou ∞, quand l'une ou l'autre des composantes $x(t)$ ou $y(t)$ tend vers l'infini.*

1. *Si $\lim_{t\to t_0} |x(t)| = \infty$ et $\lim_{t\to t_0} y(t) = y_0$ (fini) alors la droite $y = y_0$ est asymptote.*

2. *Si $\lim_{t\to t_0} x(t) = x_0$, (fini) et $\lim_{t\to t_0} |y(t)| = \infty$ alors la droite $x = x_0$ est asymptote.*

3. *Si $\lim_{t\to t_0} |x(t)| = \infty$ et $\lim_{t\to t_0} |y(t)| = \infty$ on étudie la limite de $\frac{y}{x}$ quand $t \to t_0$.*

   (a) *Si $\lim_{t\to t_0} |\frac{y(t)}{x(t)}| = \infty$ (respectivement 0), la courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique (Oy) (respectivement (Ox)).*

   (b) *Si $\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a \in \mathbb{R}^*$, la courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique $y = ax$.*

      i. *Si $\lim_{t\to t_0} |y(t) - ax(t)| = \infty$, la courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique $y = ax$.*

      ii. *Si $\lim_{t\to t_0}(y(t) - ax(t)) = b$, (fini), la courbe admet une asymptote d'équation $y = ax + b$. La précision de la position de la courbe par rapport à l'asymptote s'obtient en étudiant le signe au voisinage de t_0 de $y(t) - ax(t) - b$.*

Exemple 6.7 *1. $F(t) = (\frac{t^2}{t^2-1}, \frac{t}{t-1})$. La courbe est définie sur $]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$. En $\pm\infty$ les limites sont finies, la courbe n'a donc pas d'asymptote en $\pm$. Par contre*

$$\lim_{t\to(-1)^-} x(t) = +\infty, \ \text{et} \ \lim_{t\to(-1)^-} y(t) = \frac{1}{2}. \tag{6.36}$$

Donc $y = \frac{1}{2}$ est asymptote horizontale en $t = (-1)^-$. De même

$$\lim_{t\to(-1)^+} x(t) = -\infty, \ \text{et} \ \lim_{t\to(-1)^+} y(t) = \frac{1}{2}, \tag{6.37}$$

et $y = \frac{1}{2}$ est asymptote horizontale en $t = (-1)^+$. De plus

$$\lim_{t\to 1^-} x(t) = -\infty \ , \ \lim_{t\to 1^+} x(t) = +\infty, \tag{6.38}$$

et

$$\lim_{t\to 1} \frac{y(t)}{x(t)} = 2. \tag{6.39}$$

On calcule alors

$$\lim_{t\to 1}(y(t) - 2x(t)) = -\frac{1}{2}. \tag{6.40}$$

On en déduit donc que la droite $y = 2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe. Pour connaître la position de la courbe par rapport à l'asymptote, on étudie

$$s(t) = y(t) - 2x(t) + \frac{1}{2} = \frac{1-t}{2(1+t)}.$$

On obtient que

$$\lim_{t \to 1^-} s(t) = 0^+,$$

donc la courbe est au-dessus de l'asymptote, et on obtient que

$$\lim_{t \to 1^+} s(t) = 0^-,$$

donc la courbe est au-dessous de l'asymptote.

2. *$F(t) = (t + \frac{1}{t}, t + \frac{1}{2t^2})$. On peut montrer qu'on a des branches infinies en $0, \pm\infty$. En $\pm\infty$, on montre que la droite $y = x$ est asymptote et qu'elle est au-dessus de l'asymptote en $-\infty$ et au-dessous en $+\infty$. En $t = 0$, la courbe présente une direction asymptotique verticale. Il n'y a pas d'asymptote, mais une branche parabolique.*

6.3.5 Points multiples

Définition 6.9
S'il existe $t_1 \neq t_2$ tels que $F(t_1) = F(t_2)$, le point M de coordonnées $(x(t_1) = x(t_2), y(t_1) = y(t_2))$ est appelé point double (voire multiple s'il y a plusieurs valeurs de t qui correspondent au même point).

Exemple 6.8 *$F(t) = (\frac{t^2+t-2}{t(t-2)}, \frac{t^2+t-2}{t-2})$. La courbe est définie sur $]-\infty, 0[\cup]0, 2[\cup]2, +\infty[$. $(0,0)$ est un point double qui correspond aux valeurs $t = 1$ et $t = -2$ (et ce sont les seules).*

6.3.6 Plan d'étude d'une courbe plane paramétrée

Nous allons exposer ce plan à travers un exemple

$$F(t) = (t^2, \frac{(1+t)^2}{1+t^2})$$

1. Domaine de définition : $I = \mathbb{R}$
2. Réduction du domaine d'étude : ici pas de périodicité, ni de symétries apparentes.
3. Variations de F. F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On a

$$F'(t) = (2t, \frac{2(1+t)(1-t)}{(1+t^2)^2}).$$

   Comme $F'(t) \neq 0$, pour tout t, tous les points sont réguliers et la tangente à la courbe en $M(t)$ est portée par $F'(t)$. On définit $m(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$. On a

$$m(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1, \text{ ou } t = -1,$$

   donc aux points $(F(1) = (1,2)$ et $F(-1) = (1,0)$, la courbe admet une tangente horizontale. De plus, $\lim_{t \to 0} |m(t)| = \infty$, donc au point $F(0) = (0,1)$, la courbe admet une tangente verticale.

4. Branches infinies De plus $\lim_{|t|\to+\infty}|x(t)| = +\infty$ et $\lim_{|t|\to+\infty}|y(t)| = 1$, donc la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe (et c'est la seule).
5. Points multiples On montre que $F(t_1) = F(t_2)$ n'a pas de solution réelle. Donc la courbe n'a pas de point multiple.

6.4 Courbes en coordonnées polaires

Soit le plan P muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Définition 6.10 *Soit M un point de P de coordonnées (x, y) dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Tout couple $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ est appelé coordonnées polaires de M. On dit que θ est un angle polaire de M et r est un rayon vecteur de M. Le point O est appelé pôle.*

A tout couple $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ correspond un unique point de plan P. A un point du plan P distinct du pôle correspond une double infinité de coordonnées polaires : si (r, θ), (r', θ') sont deux systèmes de coordonnées polaires d'un point M, alors il existe $h \in \mathbb{Z}$ tel que $r' = (-1)^h r$ et $\theta' = \theta + h\pi$.

Définition 6.11 *Les courbes en coordonnées polaires sont les courbes définies par l'équation : $\overrightarrow{F(\theta)} = r(\theta)\overrightarrow{u(\theta)}$, où $\overrightarrow{u(\theta)} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{OM}$. $r(\theta)$ est appelée équation polaire de la courbe.*

Ces courbes polaires sont des courbes planes paramétrées, mais il est plus commode de les étudier directement. Toutes les propriétés de la courbe vont dépendre de $r(\theta)$.

Exemple 6.9 *1. $r(\theta) = \frac{p}{1+e\cos\theta}$, est l'équation polaire d'une conique. p est la distance du foyer à la directrice et e l'excentricité.*

(a) $e < 1$ correspond à une ellipse,

(b) $e = 1$ correspond à une parabole,

(c) $e > 1$ correspond à une hyperbole.

En effet, puisque $x = r(\theta)\cos\theta$, $y = r(\theta)\sin\theta$ on a $r(\theta) = p - ex$. Donc $(1-e^2)x^2 + y^2 + 2exp = p^2$.

2. $r(\theta) = \frac{c}{\sin(\theta-\alpha)}$ est l'équation polaire d'une droite (D) ne passant pas par l'origine. c est la distance à l'origine et α l'angle $(Ox, (D))$.

3. $r(\theta) = D\cos(\theta - \alpha)$ est l'équation polaire du cercle passant par O et de diamètre D.

6.4.1 Tangente en un point

Si $r(\theta)$ est dérivable, alors F l'est et on a $F'(\theta) = r'(\theta)\overrightarrow{u(\theta)} + r(\theta)\overrightarrow{u'(\theta)}$. Mais

$$\overrightarrow{u(\theta)} = cos\theta\overrightarrow{i} + sin\theta\overrightarrow{j},$$

d'où

$$\overrightarrow{u'(\theta)} = -sin\theta\overrightarrow{i} + cos\theta\overrightarrow{j}.$$

Ainsi, $u'(\theta)$ est un vecteur unitaire obtenu à partir de $u(\theta)$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Si $F'(\theta) \neq 0$, dans le repère $(O, \overrightarrow{u(\theta)}, \overrightarrow{u'(\theta)})$ la tangente à la courbe au point $M(\theta)$ a pour pente
$$\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}.$$
Si $r'(\theta) = 0$, la tangente est parallèle au vecteur $\overrightarrow{u'(\theta)}$.
2. Si $F'\theta_0) = 0$, la courbe passe par le pôle et s'il existe k tel que $r^{(k)}(\theta) \neq 0$, la tangente existe : c' est la droite d'angle polaire $\theta = \theta_0$

6.4.2 Branches infinies

La courbe présente une branche infinie si r ou θ tendent vers l'infini. Trois cas se présentent

1. $\lim_{|\theta| \to +\infty} |r(\theta)| = +\infty$. La courbe présente une branche en spirale (pas de direction asymptotique).
2. $\lim_{|\theta| \to +\infty} |r(\theta)| = r_0 \in \mathbb{R}$. La courbe admet un cercle asymptote de centre 0 et de rayon r_0.
3. $\lim_{\theta \to \theta_0} |r(\theta)| = +\infty$. La courbe admet une branche infinie de direction asymptotique la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u(\theta_0)}$. Les coordonnées cartésiennes de $M(r, \theta)$ dans le repere $(O, \overrightarrow{u(\theta_0)}, \overrightarrow{u'(\theta_0)})$ sont $X = r\cos(\theta - \theta_0)$, $Y = r\sin(\theta - \theta_0)$. Quand θ tends vers θ_0, $|X|$ tend vers $+\infty$. Si $\lim_{\theta \to \theta_0} r(\theta)\sin(\theta - \theta_0) = k$, on a
   (a) $k = \pm\infty$, la courbe a une branche parabolique de direction $\overrightarrow{u(\theta_0)}$.
   (b) $k \in \mathbb{R}$, la droite d'équation $Y = k$ est asymptote à la courbe. La position de la courbe par rapport à l'asymptote est déduite du signe de $r(\theta)\sin(\theta - \theta_0) - k$. En pratique on pose $(\theta - \theta_0) = h$, on cherche un développement limité en 0 de $r(h + \theta_0)\sin h = k + ah + h\varepsilon(h)$.

6.4.3 Etude des points multiples

Ce sont les points tels qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que
$$r(\theta) = r(\theta + 2k\pi), \text{ ou } r(\theta) = -r(\theta + (2k+1)\pi), \tag{6.41}$$
et le pôle si l'équation $r(\theta) = 0$ a plusieurs solutions en θ.

6.4.4 Plan d'étude d'une courbe polaire

Soit la courbe d'équation polaire $r = r(\theta)$.

1. Ensemble de définition. On le note I.
2. Périodicité : le plus petit $T > 0$ tel que
$$r(\theta + T) = r(\theta)\ \forall\theta \in I.$$
Dans ce cas, le point M' correspondant à $\theta + T$ se déduit du point $M(\theta)$ par la rotation de centre O et d'angle T. Il suffira de faire varier θ dans un intervalle de longueur T et de déduire la courbe par des rotations de centre O et d'angles $kT,\ k \in \mathbb{Z}$.
3. Symétries. Si I est un intervalle centré en 0, et si

(a) $r(\theta) = r(-\theta)$ ou $r(\theta) = -r(\pi - \theta)$, $0x$ est axe de symétrie,

(b) $r(\theta) = -r(-\theta)$ ou $r(\theta) = r(\pi - \theta)$, $0y$ est axe de symétrie,

(c) $r(\theta) = r(\pi + \theta)$, 0 est centre de symétrie.

4. Etude des variations et du signe de r et tangentes en les points remarquables.

5. Recherche des branches infinies.

6. Recherche des points multiples.

7. Tracé de la courbe.

Exemple 6.10 *Etudions la courbe d'équation polaire*

$$r(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

1. *Ensemble de définition :* $\mathbb{R}$ *privé de* $k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$.

2. *Périodicité :* 2π. *On réduit le domaine d'étude à* $]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$

3. *Symétries :* $r(\theta) = -r(-\theta)$, *on a donc une symétrie par rapport à l'axe* $(0y)$; *on réduit donc le domaine d'étude à* $]0, \pi[$.

4. *Etude des variations de* r: r *est décroissante sur* $]0, \pi[$. $\lim_{\theta \to 0^+} r(\theta) = +\infty$ *et* $r(\pi/2) = 0$. *Un calcul direct conduit à* $F'(\theta) \neq 0\ \forall \theta$. *La courbe admet donc en tout point une tangente de pente* $\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}$ *dans le repère orthonormé* $(O, \overrightarrow{u(\theta)}, \overrightarrow{u'(\theta)})$. *De plus* $r(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \pi/2$, *donc la courbe admet au pôle une tangente d'angle polaire* $\pi/2$, *c'est-à-dire l'axe* (Oy).

5. *Recherche des branches infinies : Comme*

$$\lim_{\theta \to 0^+} r(\theta) = +\infty,$$

la courbe admet une branche infinie de direction asymptotique la droite d'angle polaire 0. *Dans le repère* $(0, 0x, 0y)$, *l'ordonnée du point* $M(\theta)$ *est* $r(\theta)\sin(\theta - 0) = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$. *On a* $\lim_{\theta \to 0^+} r(\theta)\sin(\theta) = 2$. *Donc la courbe admet une asymptote d'équation* $Y = 2$ *dans le repère* $(O, 0x, Oy)$. *De plus* $r(\theta)\sin\theta - 2 = -2\sin^2\frac{\theta}{2} < 0$, *pour* $\theta \to 0^+$.

6. *Recherche des points multiples: on a un point double correspondant à* $\theta = -\frac{\pi}{2}$ *et* $\theta = \frac{\pi}{2}$. *La tangente en ce point a pour pente* 1 *en* $\frac{\pi}{2}$ *et* -1 *en* $-\frac{\pi}{2}$.

6.5 Exercices

Exercice 6.1 *1. Soit* I *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *et* $t_0 \in I$. *Soit* $f : I \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$. *On suppose que chacune des applications composantes* f_i *sont dérivables sur* I. *Etudier la dérivabilité en* t_0 *de l'application qui à* $t \in I$ *associe* $\|f(t)\| := \sqrt{f_1^2(t) + f_2^2(t)}$ *dans les cas suivants*

(a) $f(t_0) \neq 0$,

(b) $f(t_0) = 0$ *et* $f'(t_0) \neq 0$.

2. *Soit* $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *et* $f(t) = (\sin t, 1)$. *Montrer que l'application qui à* $t \in I$ *associe* $\|f(t)\|_1 := |\sin t| + |1|$ *n'est pas dérivable en* $t_0 = 0$.

3. *Soit* $I = [-1, 0]$ *et* $f(t) = (t, t+1)$. *Montrer que l'application qui à* $t \in I$ *associe* $\|f(t)\|_\infty := \max\{|t|, |t+1|\}$ *n'est pas dérivable en* $t_0 = -\frac{1}{2}$

Exercice 6.2 *Soit* a, b *2 réels non nuls. Soit* $S_{a,b}$ *le support de la courbe de représentation paramétrique* $F_{a,b}(t) = (2t + \frac{a^3}{t^3}, t^2 + \frac{b^3}{t})$ *sur* $I =]0, +\infty[$.

1. *Donner une condition nécessaire et suffisante pour que* $S_{a,b}$ *possède un et un seul point de rebroussement.*

2. *Donner une condition nécessaire et suffisante pour que* $S_{a,b}$ *possède au moins un point double.*

Exercice 6.3 *Préciser l'étude locale à l'origine des courbes suivantes*

1. $$F(t) = (t^2 + t^4, t^3 - t^4) \text{ sur } I = \mathbb{R},$$

2. $$F(t) = \cos^3 t, \sin t) \text{ sur } I = \mathbb{R},$$

3. $$F(t) = 2(t - \sin t)), 2(1 - \cos t)) \text{ sur } I = \mathbb{R}.$$

Exercice 6.4 *Construire les courbes définies paramétriquement par*

1. $$F(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t),$$

2. $$F(t) = ((1+t)e^{-\frac{1}{t}}, (t-1)e^{\frac{1}{t}}),$$

3. $$F(t) = (\frac{1-t^2}{1+t^2}, t\frac{1-t^2}{1+t^2}),$$

4. $$F(t) = (\frac{t}{1+t^3}, \frac{t^2}{1+t^3}),$$

5. $$F(t) = (t^2 e^{-t}, t^4 e^{-t}).$$

Exercice 6.5 (Extrait du concours "petites mines" 2006) *Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. *Soit* Γ *la courbe d'équation polaire* $r(\theta) = \frac{\sin\theta}{2 - \cos\theta}$.

1. *Montrer qu'il existe une symétrie* s *telle que* $s(M(\theta) = M(-\theta)$. *En déduire un domaine d'étude de la courbe.*

2. *Donner une équation cartésienne de la tangente à la courbe au point* $M(\frac{\pi}{2}$.

3. Tracer l'allure de la courbe.

Exercice 6.6 *Etudier les branches infinies des courbes définies en coordonnées polaires par*

1.

$$r(\theta) = \frac{\cos\theta}{1 - 2\sin(\theta)},$$

2.

$$r(\theta) = \frac{\cos\theta}{\cos(\theta) - \sin(\theta)}.$$

Exercice 6.7 *Construire les courbes déquation polaire suivante*

1.

$$r(\theta) = +\tan(\frac{\theta}{2}),$$

2.

$$r(\theta) = 1 + \cos\theta,$$

3.

$$r(\theta) = \frac{\pi}{\theta},$$

4.

$$r(\theta) = \frac{\sin 2\theta}{\cos(\theta) + \sin(\theta)}.$$