Problème. Étude de fonctions.

Partie I.

On étudie dans cette partie quelques propriétés de la fonction $v(x) = \ln\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$, qui seront utiles dans la seconde partie.

1. Déterminer l'ensemble de définition de v. Étudier sa parité.
   Préciser l'intervalle d'étude choisi. On le note I.
2. Calculer la fonction dérivée de v, dresser le tableau de variation de v.
3. a) Montrer que $\forall x \in I, v(x)$ peut s'écrire sous la forme $v(x) = x - \ln(2) + \varepsilon(x)$ où ε est une fonction positive que l'on déterminera.
   b) Vérifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)$. En déduire que la courbe représentative de v admet une asymptote quand x tend vers $+\infty$.
4. Représenter graphiquement v en précisant sa tangente en 0.

Partie II.

On étudie dans cette partie quelques propriétés de la fonction

$$u(x) = \frac{\ln\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)}{x} = \frac{v(x)}{x}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de u. Étudier sa parité.
   Préciser l'intervalle d'étude choisi.
2. a) Montrer que pour tout x strictement positif (resp. négatif), $u(x)$ est strictement positif (resp. négatif).
   b) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$.
3. a) En utilisant les résultats de la partie I, montrer, pour x strictement positif que $0 < u(x) < 1$.
   b) Déterminer les limites de u en $+\infty$ et $-\infty$.
   c) Encadrer $u(x)$ lorsque x est négatif.

Partie III.

On étudie dans cette partie l'application f :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \end{array}$$

1. Donner l'ensemble de définition de f ainsi que sa limite en 0.
2. Asymptote en $+\infty$.
   a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   b) Montrer qu'il existe un réel λ (à déterminer) tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lambda$.
   c) Montrer, pour tout $x > 0$, l'égalité : $f(x) - \lambda x = \lambda x\left[e^{u(x)-1} - 1\right]$ (u est la fonction définie dans la partie II).
   d) On pose $G(x) = u(x) - 1$, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{G(x)} - 1}{G(x)}$ ainsi que $\lim\limits_{x\to+\infty} xG(x)$, en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - \lambda x)$.
   e) Donner l'asymptote de f en $+\infty$.