Université de Marseille, janvier 2008
Licence de Mathématiques, 1ere année
Analyse, 2eme semestre, TD 1: Suites de nombres réels

Pour les exercices suivants, on rappelle que si A est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, il existe un nombre réel, noté $\sup(A)$, qui est le plus petit des majorants de A. De même, si A est une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$, il existe un nombre réel, noté $\inf(A)$, qui est le plus grand des minorants de A.

Exercice 1

Soit A est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. On pose $-A = \{-a,\, a \in A\}$. Montrer que $-A$ est une partie non vide minorée $\mathbb{R}$. Comparer $\inf(-A)$ et $\sup(A)$.

Exercice 2

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. On suppose que A est majorée et on pose $a = \sup(A)$. Montrer qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a.

2. On suppose que A n'est pas majorée. Montrer qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers l'infini.

Exercice 3

Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ t.q. $A \subset B$. On suppose que B est majorée. Montrer que A est majorée et que $\sup(A) \leq \sup(B)$. Cette dernière inégalité est-elle nécessairement stricte si l'inclusion de A dans B est stricte ?

Exercice 4

Soit A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. On pose $A + B = \{a + b,\, a \in A$ et $b \in B\}$. Montrer que $A + B$ est majorée et comparer $\sup(A + B)$ et $\sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 5

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ et bornées. Montrer que :

1. $A \cup B$ est une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$ et que $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}, \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$.

2. Montrer que si $A \cap B$ est non vide, c'est une partie bornée de $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} \sup(A \cap B) &\leq \min\{\sup A, \sup B\}, \\ \inf(A \cap B) &\geq \max(\inf A, \inf B). \end{aligned}$$

   Donner un exemple où les inégalités sont strictes.

3. Montrer que $A+B := \{x = a+b, a \in A, b \in B\}$ est une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$ et que

$$\begin{aligned} \sup(A+B) &= \sup A + \sup B, \\ \inf(A+B) &= \inf A + \inf B. \end{aligned}$$

4. Montrer que si $A \subset \mathbb{R}_+, B \subset \mathbb{R}_+$ alors $A.B = \{ab; a \in A, b \in B\}$ est borné et

$$\sup(A.B) = \sup A \sup B, \inf(A.B) = \inf A \inf B \tag{1}$$

Exercice 6

1. Soit $S = \{x; x = (-\frac{1}{2})^m - \frac{3}{n}, m, n \in \mathbb{N}^*\}$. Trouver $\sup S$ et $\inf S$.
2. Soit $K = \{x \in R; x = \frac{1}{1-a}, a \in]0, \frac{1}{2}]\}$. Trouver $\inf K$ et $\sup K$.

Exercice 7

Soit une suite de nombres complexes (u_n) , on définit la suite $v_n = \frac{u_1+...+u_n}{n}$

1. Montrer que (u_n) converge vers l implique (v_n) converge vers l
2. On suppose que (u_n) est réelle.

   (a)-Montrer que (u_n) tend vers $+\infty$ implique quev_n diverge vers $+\infty$.

   (b)-On suppose que la suite (u_n) est croissante, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = l \in \overline{\mathbb{R}_+} \Rightarrow \lim u_n = l. \tag{2}$$

3. Généralisation. Soit (λ_n) une suite de nombres réels strictement positifs et (u_n) une suite complexe qui converge vers $l \in C$. On suppose que

$$\lim_{n\to+\infty}(\sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k) = +\infty. \tag{3}$$

   Montrer que la suite

$$v_n = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k u_k}{\sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k} \tag{4}$$

   converge vers l,i;e:

$$\left\{ \lim_{n\to+\infty}(\sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k) = +\infty, \lim_{n\to+\infty} u_n = l \right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k u_k}{\sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k} = l. \tag{5}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $x_n = \frac{E(10^n x)}{10^n}$ et $y_n = x_n + \frac{1}{10^n}$ respectivement appelées valeurs approchées à $\frac{1}{10^n}$ près par défaut et par excès de x. Montrer que ces deux suites convergent vers x. En déduire que D, ensemble des nombres décimaux, est *dense dans* $\mathbb{R}$.

5. Soit (u_n) une suite de nombres complexes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{k=n} C_n^k u_n$. On suppose que (u_n) converge vers $l \in C$, montrer que (v_n) converge vers l.

Exercice 8

1. Montrer que toute suite convergente dans $\mathbb{R}$ est bornée (c'est-à-dire majorée et minorée).

2. Montrer que toute suite croissante majorée est convergente dans $\mathbb{R}$.

3. Montrer que de toute suite réelle non majorée (resp. non minorée) on peut extraire une sous suite qui tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Exercice 9 (Moyennes harmonique et arithmétique)

1. Montrer que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $0 < a < b$, on a :
$$a < \frac{2ab}{a+b} < \frac{a+b}{2} < b.$$

2. Soit $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $0 < u_0 < v_0$. On définit, par récurrence, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$$u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$
   (a) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies (c'est-à-dire que $u_n + v_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) et que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes (dans $\mathbb{R}$).
   (b) Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n$.
   (c) Vérifier que la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
   (d) Donner la limite commune au suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 10

Soit $l \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ecrire à l'aide des quantificateurs les phrases suivantes :

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers l quand n tend vers $+\infty$.

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

3. $f(x)$ ne tend pas vers l quand x tend vers a.

4. $f(x)$ ne tend pas vers l quand x tend vers $+\infty$.

.