Université de Marseille, janvier 2009
Licence de Mathématiques, 1ere année
Analyse, 2eme semestre, TD 2

Exercice 1 (Limite, limite à droite et limite à gauche)

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. Soit f une application définie sur $A = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f admet l comme limite en a si et seulement si f admet (en a) l comme limite à droite et comme limite à gauche.

2. Montrer que f admet l comme limite à gauche en a si et seulement si f vérifie la condition suivante :

   Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A,
   $$x_n \uparrow a, \text{ quand } n \to \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = l,$$
   où $x_n \uparrow a$ quand $n \to \infty$ signifie $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ et $x_{n+1} \geq x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Reprendre les questions 1 et 2 avec $l = \infty$ et avec $l = -\infty$.

Exercice 2 (Opérations sur les limites)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $I =]a, b[$. Soit f et g deux applications de I dans $\mathbb{R}$ et $l, m \in \mathbb{R}$. On suppose que $l = \lim_{x\to a,\, x>a} f(x)$ et $m = \lim_{x\to a,\, x>a} g(x)$.

1. Montrer que $l + m = \lim_{x\to a,\, x>a}(f + g)(x)$.

2. On suppose que $m \neq 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ t.q. $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in J =]a, c[$. Montrer que $\frac{l}{m} = \lim_{x\to a,\, x>a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

3. On suppose que $m = 0$, $l > 0$ et que $g(x) > 0$ pour tout $x \in I$. Montrer que $\lim_{x\to a,\, x>a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

4. On prend ici $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ et $g(x) = x$. Les applications fg et f/g (qui est bien définie sur I) ont-elles une limite à droite en 0 ?

Exercice 3 (Quelques exemples. . .)

Pour les exemples suivants, la fonction f est définie sur $I = \mathbb{R}$.

1. On définit f par $f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. L'application f a-t-elle une limite en 0 ? une limite à droite en 0 ? une limite à gauche en 0 ?

2. On définit f par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - (x + 1)$ pour tout x. Quelle la limite de f en $+\infty$?

3. On définit f par $f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x^2})}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. L'application f a-t-elle une limite en 0 ? une limite à droite en 0 ? une limite à gauche en 0 ?

4. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $E(x) = \sup\{n \in \mathbb{Z}\,;\ n \le x\}$. On définit f par $f(x) = x - \sqrt{x - E(x)}$ pour tout $x \neq 0$. Soit $n \in \mathbb{Z}$, L'application f a-t-elle une limite en n ? une limite à droite en n ? une limite à gauche en n ?

Exercice 4 (Autres exemples...)

1. $f(x) = \frac{\sqrt{x^3-3x+2}}{2x^2-x-1}$ pour $x \in]0,1[$. Quelle est la limite (à gauche) de f en 1 ?
2. $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+4}}$ pour $x \in]0,1[$. Quelle est la limite (à droite) de f en 0 ?
3. Soit $a > 0$. On définit f par $f(x) = \frac{(1+x)^a}{x}$ pour $x \in]0,1[$. Quelle est la limite (à droite) de f en 0 ?
4. $f(x) = (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$ pour $x \in]0,1[$. Quelle est la limite (à droite) de f en 0 ?

Exercice 5 (Fonction périodique admettant une limite)

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. on suppose qu'il existe $T > 0$ t.q. $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on dit alors que f est périodique de période T). On suppose de plus que f admet une limite finie, notée l, en $+\infty$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|f(x) - l| \le \varepsilon$.
2. En déduire que f est une fonction constante.

Exercice 6 (Fonctions monotones)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $I =]a,b[$. Soit f une application strictement croissante de I dans $\mathbb{R}$. On pose $A = \{f(x),\ x \in I\}$, $\alpha = \inf A$ et $\beta = \sup A$. (Si A est non minorée, on pose $\inf A = -\infty$. Si A est non majorée, on pose $\sup A = +\infty$.)

1. Montrer que $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ (on pourra distinguer les cas $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha = -\infty$). Montrer que $\lim_{x\to b} f(x) = \beta$.
2. Soit $c \in I$. Montrer que f admet une limite à droite en c, notée $f_d(c)$, et une limite à gauche en c, notée $f_g(c)$. Montrer que $f_g(c) \le f(c) \le f_d(c)$.
3. On suppose que $f_d(c) = f_g(c)$ pour tout $c \in I$ (avec f_d et f_g définies à la question précédente). Montrer que f est continue et que f est bijective de $]a,b[$ dans $]\alpha,\beta[$.