Université de Marseille, février 2009
Licence de Mathématiques, 1ere année
Analyse, 2eme semestre, TD 3 et 4

Exercice 1

1. On suppose que les limites finies à droite $f(x_0^+)$ et à gauche $f(x_0^-)$ d'une fonction f en x_0 sont égales à $L \in \mathbb{R}$. Est la fonction f alors continue en x_o?
2. Est-ce que l'implication suivante est vraie ou fausse : $|f|$ continue <=> f continue?
3. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Donner les définitions suivantes :
a) f est continue au point $x_0 \in I$.
b) f est continue sur I.
c) f est uniformément continue sur I.

Exercice 2

Soient f et g les fonctions définies par

$$f(x) := \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \in]-\infty, -1[\\ -x-1 & \text{si} \quad x \in [-1, 0[\\ x+1 & \text{si} \quad x \in [0, \infty[\end{cases} \quad , \quad g(x) := \begin{cases} a\sin(x) + cos(x) & \text{si} \quad x < \pi/2 \\ \pi - x & \text{si} \quad x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \\ \frac{x^2}{2} + b & \text{si} \quad x > \pi \end{cases} .$$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Déterminer les réels a et b tels que la fonction g soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

1. Soit a et b deux réels. Montrer l'identité $\sup(a, b) = 1/2(a + b + |b - a|)$.
2. Soit f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On pose $\sup(f, g)\,(x) := \sup(f(x), g(x))$. Déduire de la question précédente la continuité de l'application $\sup(f, g)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (Fonction continue, non nulle en un point)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f est continue en a et que $f(a) \neq 0$. Montrer que f est non nulle sur un intervalle ouvert contenant a.

Exercice 5 (Limite en $+\infty$)

Soit $f\ : \mathbb{R}\ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 6 (Fonction lipschitzienne)

Soit $f\ : \mathbb{R}\ \to \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+$. On suppose que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que f est continue (sur tout R).

Exercice 7

Pour quelle valeur de α la fonction f, définie ci-après, est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} \text{ si } x \neq 2 \\ \alpha \text{ si } x = 2. \end{cases}$$

Exercice 8 (Polynôme de degré impair)

Montrer que toute fonction polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de degré impair, s'annule en au moins un point.

Exercice 9 (Existence d'un maximum)

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Montrer que f admet un maximum (c'est-à-dire qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q., pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leq f(a)$).

Exercice 10 (Injectivité et continuité donne monotonie)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et f $[a, b] \to \mathbb{R}$ continue et injective. Montrer que f est monotone. [Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.]

Exercice 11 (Prolongement par continuité)

Soit f l'application de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{1 - |x|}.$$

1. La fonction f est-elle continue en 0 ?
2. Calculer $\lim_{x\to-1} f(x)$ et $\lim_{x\to1} f(x)$.
3. Existe-t-il une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}$ et qui est égale à f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$?

Exercice 12

Soit f et g deux fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, continues et t.q. $f(0) = g(1) = 0$ et $g(0) = f(1) = 1$. Montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+,\ \exists x \in [0, 1],\ f(x) = \lambda g(x).$$

Exercice 13 (Moyennes harmonique et arithmétique)

1. Montrer que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $0 < a < b$, on a :

$$a < \frac{2ab}{a+b} < \frac{a+b}{2} < b.$$

2. Soit $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $0 < u_0 < v_0$. On définit, par récurrence, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

   (a) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies (c'est-à-dire que $u_n + v_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) et que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes (dans $\mathbb{R}$).

   (b) Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n$.

   (c) Vérifier que la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

   (d) Donner la limite commune au suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 14 (Valeur intermédiaire)
Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, l'ensemble $\{s \in [0,1] \text{ t.q. } f(s) = \frac{f(0)+f(t)}{2}\}$ est non vide.

   Pout $t \in [0,1]$, on pose $\varphi(t) = \inf\{s \in [0,1] \text{ t.q. } f(s) = \frac{f(0)+f(t)}{2}\}$.

2. Montrer que $\varphi(t) \in [0,1]$ et que $f(\varphi(t)) = \frac{f(0)+f(t)}{2}$.

3. Montrer que si f est strictement croissante, l'application φ ainsi définie de $[0,1]$ dans $[0,1]$ est continue.

4. Donner un exemple de fonction f pour lequel la fonction φ n'est pas continue.

Exercice 15 (Fonction dont l'image est discrète)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue (en tout point de $\mathbb{R}$).

1. On suppose que $f(x) \in \{0,1\}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante. [utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.]

2. On remplace maintenant l'hypothèse "$f(x) \in \{0,1\}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$" par "$\text{card}\{f(x), x \in \mathbb{R}\} < \infty$". Peut on aussi montrer que f est constante ? (justifier la réponse...)

Exercice 16 (Continuité de "max" et "min")

1. Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\max\{x,y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ et $\min\{x,y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.

2. Soit f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit les applications $f\top g$ et $f\perp g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$(f\top g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \ (f\perp g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}, \ \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$

   Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f et g sont continues en a. Montrer que $f\top g$ et $f\perp g$ sont continues en a.

Exercice 17 (Convexe implique continue)

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est convexe, c'est à dire que $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

On pose $\alpha = f(1) - f(0)$, $\beta = f(0) - f(-1)$ et $\gamma = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

1. Soit $x \in]0,1[$. Montrer que $\beta x \leq f(x) - f(0) \leq \alpha x$. [Utiliser le fait que $x = t1 + (1-t)0$, avec $t = x$, et $0 = tx + (1-t)(-1)$, avec $t = \frac{1}{1+x}$.]

2. Soit $x \in]-1,1[$. Montrer que $|f(x) - f(0)| \leq \gamma |x|$. En déduire que f est continue en 0.

3. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 18 (Borne supérieure atteinte)

Soit f une application continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ (on rappelle que $\mathbb{R}_+ = [0, \infty[$). On suppose que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Monter que $\{f(x),\ x \in \mathbb{R}_+\}$ est majoré est qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $f(a) = \sup\{f(x),\ x \in \mathbb{R}_+\}$.

Exercice 19 (Exercice sur les valeurs intermédiaires)

Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $f(0) = f(1)$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. pour $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$, on pose $g(x) = f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$.

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n}) = 0$.

2. Montrer qu'il existe $x_0, x_1 \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ t.q. $g(x_0) \leq 0$ et $g(x_1) \geq 0$.

3. Monter qu'il existe $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ t.q. $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$.