Université de Marseille, février 2009
Licence de Mathématiques, 1ere année
Analyse, 2eme semestre, TD 5

Exercice 1

Déterminer le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes.

$$f_1(x) := \ln(x + \sqrt{x^2+1})\,, \quad f_2(x) := x^x\,, \quad f_3(x) := \frac{1}{\sin(x)}\,.$$

$$f_4(x) := \begin{cases} x^2\cos(\frac{1}{x}) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0\,. \end{cases}$$

Exercice 2

Soit $f :]0, 2\pi[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := x - \sin(x)$. Montrer que f possède une fonction réciproque dérivable. On note g cette fonction réciproque. Déterminer $g'(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2})$.

Exercice 3

Soit g la fonction définie par

$$g(x) := \begin{cases} x\ln(|x|) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0\,. \end{cases}$$

Calculer $g'(x)$ pour $x \neq 0$. Donner l'équation de la tangente au graphe de g en $x = 1$ et en $x = -1$. La fonction g est-elle continue en $x = 0$? Est-elle dérivable en $x = 0$?

Exercice 4 (Opérations sur les dérivées)

Soit $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $x \in]a, b[$ et f, g deux applications de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et g sont dérivables en x.

1. Montrer que $(f + g)$ est dérivable en x et $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
2. Montrer que fg est dérivable en x et $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
3. On suppose que $g(y) \neq 0$ pour tout $y \in]a, b[$. Montrer que f/g est dérivable en x et que :
$$(f/g)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Exercice 5 (Dérivée en un point)

Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable pour tout $x \neq 0$ et que f' (définie sur $\mathbb{R}^\star$) admet une limite en 0, notée l. Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = l$. [On pourra utiliser le théorème des accroissements finis.]

Exercice 6 (Dérivabilité de $x \mapsto |x|^a$)

Etudier, selon les valeurs du paramètre $a > 0$, la continuité et la dérivabilité de l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|^a$ pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$ et $f(0) = 0$.

Exercice 7 (Dérivée non continue)

On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} &f(x) = 0, \text{ si } x \le 0, \\ &f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}, \text{ si } x > 0. \end{aligned}$$

Montrer que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La dérivée de f est-elle continue ?

Exercice 8 (Dérivée et propriété des valeurs intermédiaires)

Soit $-\infty \le a < b \le \infty$ et f une application de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable pour tout $x \in]a, b[$. On va montrer, dans cet exercice, que f' (définie sur $]a, b[$) vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

Soit $c, d \in]a, b[$, $c < d$, et γ appartenant à l'intervalle ouvert dont les bornes sont $f'(c)$ et $f'(d)$.

1. Montrer qu'il existe $\eta \in]0, d - c[$ t.q. γ appartienne à l'intervalle ouvert dont les bornes sont $\frac{f(c+\eta)-f(c)}{\eta}$ et $\frac{f(d-\eta)-f(d)}{-\eta}$.
2. On définit g de $[c, d - \eta]$ dans $\mathbb{R}$ (avec η donné par la question précédente) par :

$$g(x) = \frac{f(x + \eta) - f(x)}{\eta}, \text{ pour } x \in [c, d - \eta].$$

   Montrer que g est continue sur l'intervalle $[c, d - \eta]$ et en déduire qu'il existe $y \in [c, d - \eta]$ t.q. $g(y) = \gamma$.
3. Montrer qu'il existe $z \in [c, d]$ t.q. $f'(z) = \gamma$.

Exercice 9 (Propriété des valeurs intermédiaires n'implique pas continuité)

En utilisant les deux exercices précédents, donner un exemple d'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires et non continue.

Exercice 10 (Accroissements finis "généralisés")

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit f et g deux applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et g est dérivables pour tout $x \in]a, b[$ et que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

1. Montrer que $g(x) - g(a) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b]$.

2. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ t.q. :

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

[On pourra considérer la fonction u définie sur $[a, b]$ par $u(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x)$.]

Exercice 11

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est deux fois dérivable pour tout $x \in]a, b[$ (c'est-à-dire que f est dérivable pour tout $x \in]a, b[$ et que f', qui est donc définie sur $]a, b[$, est aussi dérivable pour tout $x \in]a, b[$). Soit $x_0 \in]a, b[$.

1. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ t.q. :

$$f(x_0) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_0 - a) + \frac{(x_0 - a)(x_0 - b)}{2} A.$$

2. On définit φ sur $[a, b]$ par :

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - \frac{(x - a)(x - b)}{2} A.$$

Montrer qu'il existe $c \in]a, x_0[$ et $d \in]x_0, b[$ t.q. $\varphi'(c) = \varphi'(d) = 0$.

3. Montrer qu'il existe $\theta \in]a, b[$ t.q. :

$$f(x_0) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_0 - a) + \frac{(x_0 - a)(x_0 - b)}{2} f''(\theta).$$

Exercice 12

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x + e^x$. Montrer que f est strictement croissante, continue et bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note g l'application récirpoque de f. Montrer que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $g'(1)$ et $g''(1)$.

Exercice 13 (Dérivabilité en un point)

Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que f est dérivable en tout point x différent de a et que f' (définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$) admet une limite en a, notée a_1. Montrer que f est dérivable en a et que $f'(a) = a_1$. [Cette question a été faite dans un exercice précédent avec $a = 0$.]

2. On suppose que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $f^{(n)}$ (définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$) admet une limite en a, notée a_n. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. [On pourra raisonner par récurrence sur n.]