Université de Marseille, avril 2010
Licence de Mathématiques, 1ère année
Analyse, 2ème semestre, dm2

Exercice 1 (Maximum/minimum)

1. Soient $a < b$ des nombres réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction.
   (a) On suppose dans cette question que f est deux fois dérivable et que pour tout $x \in [a, b]$, $f''(x) \leq 0$. Montrer que pour tout x, on a $f(x) \geq \min\{f(a), f(b)\}$.
   (b) On suppose maintenant que f est une seule fois dérivable et que f atteint son maximum en a. Montrer que $f'(a) \leq 0$. Donner un exemple de cette situation où on a $f'(a) < 0$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit a un nombre réel.
   (a) On suppose que f est de classe C^4. Si $f'(a) = f''(a) = f^{(3)}(a) = 0$ et $f^{(4)}(a) \neq 0$, montrer que f a un maximum ou minimum local en a.
   (b) On suppose que f est de classe C^3. Si $f'(a) = f''(a) = 0$ et $f^{(3)}(a) \neq 0$, montrer que f n'a ni maximum ni minimum local en a.
   (c) On suppose que f est seulement continue et qu'elle tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Montrer que f est minorée et qu'elle atteint sa borne inférieure.

Exercice 2 (Limites)

1. Calculer les limites suivantes :
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}, \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 2} + x, \quad \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 2} + x,$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x}{\sin x - x}.$$
2. Calculer
$$l = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^x.$$
   Donner un équivalent de $l - \left(\frac{x+1}{x}\right)^x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 3 (Un peu d'analyse numérique)

Donner une valeur approchée de $\sin(1)$ à 10^{-6}-près, c'est-à-dire donner un nombre réel l tel que $|\sin(1) - l| \leq 10^{-6}$. [On pourra considérer la fonction sinus sur $[0, 1]$ et écrire la formule de Taylor-Lagrange à un ordre convenable à déterminer ; on remarquera que le reste dans cette formule se borne facilement.]

Exercice 4 (Un peu plus d'analyse numérique)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit a un réel fixé. Pour $h \neq 0$, on pose
$$\Delta(h) = \frac{f(a + h) + f(a - h) - 2f(a)}{h^2}.$$

1. On suppose que f est de classe C^2. Montrer que $\Delta(h)$ tend vers $f''(a)$ lorsque h tend vers 0.
2. On suppose que f est 3 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe une constante M telle que pour tout réel x, on ait $|f^{(3)}(x)| \leq M$. Montrer que pour tout $h \neq 0$, on a
$$|\Delta(h) - f''(a)| \leq Mh/3.$$

Exercice 5 (Changement de variable)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante, de classe C^1, vérifiant $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$.

1. Montrer que φ est une bijection de $[\alpha, \beta]$ dans $[a, b]$.
2. Montrer que
$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$
[On pourra introduire $G = F \circ \varphi$, où F est une primitive de f sur $[a, b]$, et calculer G'.]
Remarque. L'égalité ci-dessus est appelée la formule du changement de variable. On dit qu'on calcule l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ en faisant le changement de variable $x = \varphi(t)$.
3. Calculer les intégrales suivantes :
   (a) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$. [On pourra considérer le chagement de variable $x = \sin t$.]
   (b) $\int_1^2 e^x \sin(e^x)\, dx$. [On pourra considérer le changement de variable $x = \ln t$.]

Exercice 6 (Analyse et Algèbre (facultatif))
Soient x et y deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, de classe C^1. On désigne par $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{R}$. On note $M(t) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice dont les deux lignes sont formées par les vecteurs (lignes) $x(t)$ et $y(t)$, $M_x(t)$ la matrice dont les deux lignes sont formées par les vecteurs (lignes) $x'(t)$ et $y(t)$ et $M_y(t)$ la matrice dont les deux lignes sont formées par les vecteurs (lignes) $x(t)$ et $y'(t)$.

1. Soit f une fonction bilinéaire de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire que, pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, les applications $z \mapsto f(z, u)$ et $z \mapsto f(u, z)$ sont des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$). On rappelle qu'une application bilinéaire est nécessairement continue. Pour tout réel t, on pose $g(t) = f(x(t), y(t))$. Montrer que g est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1, et que
$$g'(t) = f(x'(t), y(t)) + f(x(t), y'(t))$$
pour tout $t \in \mathbb{R}$. [On pourra, par exemple, écrire $f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t)) = f(x(t+h) - x(t), y(t+h)) + f(x(t), y(t+h) - y(t))$.]
2. En utilisant la question 1 et l'application $N \mapsto \det(N)$ (de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$), montrer que $\varphi'(t) = \det(M_x(t)) + \det(M_y(t))$, avec $\varphi(t) = \det(M(t))$.
3. On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on suppose qu'il existe une matrice $A(t) = \begin{bmatrix} a_{1,1}(t) & a_{1,2}(t) \\ a_{2,1}(t) & a_{2,2}(t) \end{bmatrix}$ t.q., pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M'(t) = A(t)M(t)$. Montrer que $M_x(t) = A_x(t)M(t)$ et $M_y(t) = A_y(t)M(t)$ avec
$$A_x = \begin{bmatrix} a_{1,1}(t) & a_{1,2}(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ A_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{2,1}(t) & a_{2,2}(t) \end{bmatrix}.$$
4. Montrer que $\det(M_x(t)) = a_{1,1}(t)\det(M(t))$ et $\det(M_y(t)) = a_{2,2}(t)\det(M(t))$. En déduire que $\varphi'(t) = \text{trace}(A(t))\varphi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (avec $\varphi(t) = \det(M(t))$).

NB : Les courageux pourront montrer que le résultat de la question 4 (c'est-à-dire $\varphi'(t) = \text{trace}(A(t))\varphi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$) est encore vrai si la matrice M(t) est formée de n vecteurs lignes $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ de $\mathbb{R}^n$ et que $M'(t) = A(t)M(t)$ avec $n \geq 1$ et $x_1, \ldots, x_n$ fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$, de classe C^1.