Exercice 1 (équation fonctionnelle du DS1)
On s'interesse aux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation

$$(E) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y)f(x-y) = \Big(f(x)f(y)\Big)^2 .$$

RAPPEL DES QUESTIONS PRECEDENTES

Soit (E_1), l'équation obtenue en faisant $y=0$ dans (E) , et (E_2), l'équation obtenue en faisant $x=y$ dans (E)

1. A l'aide de (E_1), montrer que $(f(0))^2 = (f(0))^4$ et en déduire les trois seules valeurs possibles de $f(0)$.
2. Prouver que si $f(0)=0$, alors la fonction f est la fonction nulle.

   On cherche à démontrer que si f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$, alors f est la fonction nulle. Supposons que $f(0) \neq 0$ et soit x_0 tel $f(x_0)=0$.
3. **En utilisant l'équation (E_2), trouver l'expression de $f(x/2)$ en fonction de celle de $f(x)$.**
   Démontrer que la suite $\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)_n$ vérifie $f(\dfrac{x_0}{2^n})=0$. Aboutir à une contradiction et conclure.
4. En déduire que si f vérifie (E), alors soit f est nulle, soit f est à valeurs strictement positives, soit f est à valeurs strictement négatives. *(on pourra utiliser le TVI).*
5. En faisant $x=0$ dans (E), déduire de ce qui précède, que f est nécessairement paire.

- DEBUT DU DEVOIR -

Recherche de toutes les solutions de (E) qui sont **strictement positives sur $\mathbb{R}$ et de classe C^2**
(*i.e.* deux fois dérivables, à dérivée seconde continue).

Nous cherchons à prouver que f est nécessairement du type : $x \mapsto \alpha^{x^2}$, où $\alpha > 0$.

Soit f une fonction solution de (E), de classe C^2 et strictement positive sur $\mathbb{R}$.
Posons, pour tout x réel, $g(x) = \ln(f(x))$.

1. Justifier que g est aussi deux fois dérivable et que g'' est continue.
2. Quelle est l'équation fonctionnelle (F) réalisée par la fonction $g = \ln \circ f$?
3. Prouver que l'équation obtenue en faisant $x=y$ dans (F) est (F_2) : $g(2x) = 4g(x)$.
4. Montrer que pour tout x réel, $g''(2x) = g''(x)$.
5. Démontrer que g'' est constante, en utilisant la suite $\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)_n$, pour un nombre réel x_0 quelconque.
6. En déduire que g est du type $x \mapsto ax^2+bx+c$.
7. Grâce à (F_2), conclure que f est du type : $x \mapsto \alpha^{x^2}$.

Exercice 2 (involutions continues)

Soit E un ensemble. On dit qu'une application f de E dans E est une *involution* de E si elle vérifie $\forall x \in E, \quad f(f(x)) = x$, ce qu'on peut encore écrire $f \circ f = \mathrm{id}_E$, où id_E désigne l'application identité de E.

1. Montrer que toute involution f de E dans E est bijective.

   À partir de maintenant, on désigne par f une involution continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. *Généralités* :
   (a) Montrer que les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto -x$, $x \mapsto a-x$ avec a réel sont des involutions continues.
   (b) Comment se traduit sur la courbe représentative de f le fait que f soit une involution ?
3. *Involutions croissantes.*
   Montrer que la seule involution continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ est la fonction identité, $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.
   Indication : prendre un réel x et regarder les cas, suivant que $f(x)$ est supérieur ou inférieur à x.
4. *Involutions décroissantes.*
   Soit f une involution continue strictement décroissante de $\mathbb{R}$.
   On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = x - f(x)$.
   (a) Montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   (b) Vérifier l'égalité : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g^{-1}(-g(x))$.
   (c) Montrer que, réciproquement, si g est une bijection continue et strictement monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $f = g^{-1} \circ (-\mathrm{id}_{\mathbb{R}}) \circ g$ est une involution continue strictement décroissante de $\mathbb{R}$.
   (d) Exemple : déterminer les fonctions f que l'on obtient en utilisant les fonctions $g : x \mapsto x^3 + a$, avec $a \in \mathbb{R}$.