Exercice 1
On rappelle que $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

1. Que signifie la phrase "$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est continue". (Donner la définition utilisant des ϵ.)
2. Montrer que si $0 \leq x < y$, alors
$$0 < \sqrt{y} - \sqrt{x} < \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}(y - x)$$
3. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \sqrt{x}$ est continue.

Exercice 2
Evaluer les limites suivantes :
$$1. \quad \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}, \qquad 2. \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin(a/x)}{\sin(b/x)}$$
3. Montrer que $\lim_{x \to 0} \sin(1/x)$ n'existe pas.

Exercice 3

1. Evaluer les limites
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}, \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}.$$
2. L'équation
$$\frac{\sin x}{x} = 1/2$$
a-t-elle 0 solutions, un nombre fini de solutions ou un nombre infini de solutions dans $\mathbb{R}$? (On pourra faire un dessin. Enoncer soigneusement les théorèmes utilisés.)

Exercice 4 (Eéquation fonctionnelle)
On s'intéresse aux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation
$$(E) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y)f(x - y) = \Big(f(x)f(y)\Big)^2.$$

1. Etude d'un exemple
   (a) Vérifier que $\varphi : x \mapsto e^{-x^2}$ satisfait (E).
   (b) Prouver que φ est paire, continue sur $\mathbb{R}$, et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ (*sans utiliser la dérivée*).
   (c) En déduire que φ est bijective de $[0, +\infty[$ sur un intervalle I à déterminer. Enfin, calculer sa bijection réciproque φ^{-1} définie sur l'intervalle I.

2. Retour aux généralités
   Soit (E_1), l'équation obtenue en faisant $y = 0$ dans (E) , et (E_2), l'équation obtenue en faisant $x = y$ dans (E)
   (a) A l'aide de (E_1), montrer que $(f(0))^2 = (f(0))^4$ et en déduire les trois seules valeurs possibles de $f(0)$.
   (b) Prouver que si $f(0) = 0$, alors la fonction f est la fonction nulle.
   (c) On cherche à démontrer que si f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$, alors f est la fonction nulle. Supposons que $f(0) \neq 0$ et soit x_0 tel $f(x_0) = 0$.
   Démontrer que la suite $\left(\frac{x_0}{2^n}\right)_n$ vérifie $f(\frac{x_0}{2^n}) = 0$. Aboutir à une contradiction et conclure.
   (d) En déduire que si f vérifie (E), alors soit f est nulle, soit f est à valeurs strictement positives, soit f est à valeurs strictement négatives. *(on pourra utiliser le TVI).*
   (e) En faisant $x = 0$ dans (E), déduire de ce qui précède, que f est nécessairement paire.