

Université de Marseille, 18 mars 2010
Licence de Mathématiques, 1ère année
Analyse, 2ème semestre, ds2

Tous les documents sont autorisés.

Exercice 1 (Etude de fonctions) (*barème : 10 points*)

1. Montrer que pour tout entier n , la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ admet un développement limité à l'ordre n en zéro. Calculer explicitement ce développement pour $n = 2$.

corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe C^n sur l'intervalle $] -1, +\infty[$. Elle admet donc un développement limité à l'ordre n en zéro. Son développement limité à l'ordre 2 en zéro est

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

-
2. Soit $g :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$. Montrer que g se prolonge par continuité en zéro (à droite).

corrigé

Pour tout $x \in]0, 1[$, la question 1 donne $g(x) = 1 + \frac{1}{2}x - x\varepsilon(-x)$. On en déduit que g se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$.

Soit $f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} -\frac{\ln(1-x)}{x} & \text{si } x \in]0, 1[, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

3. Montrer que f est de classe C^∞ sur $]0, 1[$.

corrigé

La fonction f est le quotient de deux fonctions de classe C^∞ sur $]0, 1[$. La fonction qui est au dénominateur ne s'annule pas. On en déduit que f est aussi de classe C^∞ sur $]0, 1[$.

-
4. Montrer que f est dérivable à droite en zéro et donner la valeur de cette dérivée (notée $f'(0)$).

corrigé

En utilisant une nouvelle fois la question 1, on remarque que, pour tout $x \in]0, 1[$, on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{2} - \varepsilon(-x).$$

On en déduit que f est dérivable à droite en 0 et que $f'(0) = \frac{1}{2}$.

5. Calculer la fonction dérivée f' sur $]0, 1[$. La fonction f' est-elle continue en zéro ?

corrigé

Pour tout $x \in]0, 1[$ on a $f'(x) = \frac{1}{x^2} \ln(1-x) + \frac{1}{x(1-x)}$. On utilise la question 1 et le fait que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x\eta(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \eta(x) = 0.$$

On obtient, pour tout $x \in]0, 1[$, $f'(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \varepsilon(-x) + \frac{1}{x} + 1 + \eta(x)$ et donc

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \varepsilon(-x) + \eta(x).$$

Ceci donne $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f'(x) = \frac{1}{2} = f'(0)$. La fonction f' est donc continue en 0.

6. Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, on a $\ln(1-x) + \frac{x}{1-x} \geq 0$. En déduire le signe de $f'(x)$ pour $x \in]0, 1[$.

corrigé

Pour $x \in [0, 1[$, on pose $h(x) = \ln(1-x) + \frac{x}{1-x}$. La fonction h est continue sur $[0, 1[$, elle est dérivable sur $]0, 1[$ et on a, pour tout $x \in]0, 1[$, $h'(x) = \frac{x}{(1-x)^2} > 0$. La fonction h est donc strictement croissante et, comme $h(0) = 0$, on en déduit que $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, 1[$ et $h(x) > 0$ pour tout $x \in]0, 1[$.

Comme $f'(x) = \frac{1}{x^2} h(x)$, pour tout $x \in]0, 1[$, on a donc aussi $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]0, 1[$ (et donc aussi pour tout $x \in [0, 1[$ car $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$).

7. Dresser le tableau de variations de f et tracer l'allure de son graphe sur $[0, 1[$ (on pensera à calculer la limite de f en 1).

corrigé

La fonction f est continue sur $[0, 1[$, dérivable sur $]0, 1[$ (et dérivable à droite en 0). Sa dérivée est strictement positive sur $[0, 1[$. La fonction f est donc strictement croissante. On a $f(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f(x) = +\infty$.

Exercice 2 (Fonction convexe) (barème : 5 points)

Soit φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que φ est dérivable (c'est-à-dire dérivable en tout point de $\mathbb{R}$) et que φ' est une fonction croissante.

1. Soit $x < z < y$. Montrer que $\frac{\varphi(z) - \varphi(x)}{z - x} \leq \frac{\varphi(y) - \varphi(z)}{y - z}$.

corrigé

La fonction φ est continue sur $[x, z]$ et dérivable sur $]x, z[$, le théorème des accroissements finis donne l'existence de $c \in]x, z[$ t.q.

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(x)}{z - x} = \varphi'(c).$$

De même, le théorème des accroissements finis donne l'existence de $d \in]z, y[$ t.q.

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(z)}{y - z} = \varphi'(d).$$

Comme φ' est croissante et $c < z < d$, on a $\varphi'(c) \leq \varphi'(d)$ et donc $\frac{\varphi(z) - \varphi(x)}{z - x} \leq \frac{\varphi(y) - \varphi(z)}{y - z}$.

2. Montrer que φ est convexe, c'est-à-dire que

$$\varphi(tx + (1 - t)y) \leq t\varphi(x) + (1 - t)\varphi(y) \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R} \text{ et tout } t \in [0, 1]. \quad (1)$$

[Pour $x < y$ et $t \in]0, 1[$, on pourra utiliser la question 1 avec $z = tx + (1 - t)y$.]

corrigé

L'inégalité (1) est immédiate pour $x = y$. Elle est aussi immédiate pour $x \neq y$ et $t = 0$ ou $t = 1$. Il reste à étudier le cas $x \neq y$ et $t \in]0, 1[$. On peut aussi supposer $x < y$ (quitte à changer x en y , y en x et t en $1 - t$).

On applique alors la question 1 avec $z = tx + (1 - t)y$, de sorte que $z - x = (1 - t)(y - x)$ et $y - z = t(y - x)$. On obtient

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(x)}{(1 - t)(y - x)} = \frac{\varphi(z) - \varphi(x)}{z - x} \leq \frac{\varphi(y) - \varphi(z)}{y - z} = \frac{\varphi(y) - \varphi(z)}{t(y - x)}.$$

Ce qui donne, comme $y - x > 0$, $t > 0$ et $(1 - t) > 0$,

$$t(\varphi(z) - \varphi(x)) \leq (1 - t)(\varphi(y) - \varphi(z)).$$

On en déduit bien l'inégalité (1).

3. On définit ici la fonction ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = |x|$ si $x \in \mathbb{R}$. Montrer que ψ est convexe. La fonction ψ est-elle dérivable en tout point de $\mathbb{R}$?

corrigé

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, 1]$, on a

$$\psi(tx + (1 - t)y) = |tx + (1 - t)y| \leq t|x| + (1 - t)|y| = t\psi(x) + (1 - t)\psi(y).$$

Ce qui montre bien que ψ est convexe. La fonction ψ n'est pas dérivable en 0.

Exercice 3 (Recherche d'un maximum et convexité) (barème : 10 points)

Soit φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\varphi\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}\varphi(y) \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

(Noter que φ n'est pas nécessairement dérivable.)

1. Dans cette question, on suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $\varphi(a) = \max\{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$.
(On a donc $\varphi(a) \geq \varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.)

(a) Soit $\theta \neq 0$. Montrer que

$$\varphi(a) \leq \frac{1}{2}\varphi(a + \theta) + \frac{1}{2}\varphi(a - \theta), \quad \varphi(a + \theta) \leq \varphi(a) \quad \text{et} \quad \varphi(a - \theta) \leq \varphi(a).$$

Montrer que $\varphi(a + \theta) = \varphi(a - \theta) = \varphi(a)$.

corrigé

On remarque que $a = \frac{1}{2}(a + \theta) + \frac{1}{2}(a - \theta)$. L'inégalité (2) donne donc $\varphi(a) \leq \frac{1}{2}\varphi(a + \theta) + \frac{1}{2}\varphi(a - \theta)$. Puis, comme $\varphi(a) = \max\{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$, on a, bien sûr, $\varphi(a + \theta) \leq \varphi(a)$ et $\varphi(a - \theta) \leq \varphi(a)$.

En utilisant ces trois inégalités, on remarque que

$$\varphi(a) \leq \frac{1}{2}\varphi(a + \theta) + \frac{1}{2}\varphi(a - \theta) \leq \frac{1}{2}\varphi(a + \theta) + \frac{1}{2}\varphi(a).$$

On a donc $\frac{1}{2}\varphi(a) \leq \frac{1}{2}\varphi(a + \theta) \leq \frac{1}{2}\varphi(a)$. Ce qui donne bien $\varphi(a + \theta) = \varphi(a)$.
De même on a $\varphi(a - \theta) = \varphi(a)$ (par exemple en changeant θ en $-\theta$).

-
- (b) Montrer que $\varphi(x) = \varphi(a)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (la fonction φ est donc constante).

corrigé

Soit $x \neq a$. On pose $\theta = x - a$. La question précédente donne $\varphi(x) = \varphi(a + \theta) = \varphi(a)$. La fonction φ est donc constante.

-
2. On s'intéresse maintenant à une situation un peu plus compliquée. Soit g une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $f = \varphi + g$ et on suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $f(a) = \max\{f(x), x \in \mathbb{R}\}$.

(a) Soit $h \neq 0$.

- i. Montrer que $\varphi(a + h) - \varphi(a) \leq g(a) - g(a + h)$.

corrigé

On remarque que $\varphi(a + h) + g(a + h) = f(a + h) \leq f(a) = \varphi(a) + g(a)$.
on a donc $\varphi(a + h) - \varphi(a) \leq g(a) - g(a + h)$.

-
- ii. Montrer que $\varphi(a + h) - \varphi(a) \geq g(a - h) - g(a)$.

corrigé

La question précédente, changeant h en $-h$, donne $\varphi(a - h) - \varphi(a) \leq g(a) - g(a - h)$. Ce qui peut s'écrire

$$\varphi(a) - \varphi(a - h) \geq g(a - h) - g(a).$$

Or l'inégalité (2) donne

$$\frac{1}{2}\varphi(a) + \frac{1}{2}\varphi(a) \leq \frac{1}{2}\varphi(a + h) + \frac{1}{2}\varphi(a - h).$$

On a donc $\varphi(a+h) - \varphi(a) \geq \varphi(a) - \varphi(a-h)$ et, finalement, on obtient bien

$$\varphi(a+h) - \varphi(a) \geq \varphi(a) - \varphi(a-h) \geq g(a-h) - g(a).$$

-
- (b) Montrer que φ est dérivable en a et que $\varphi'(a) = -g'(a)$. [On pourra commencer par calculer, en fonction de $g'(a)$, la limite de $(g(a-h) - g(a))/h$ quand h tend vers 0.]

corrigé

Comme $\frac{g(a-h)-g(a)}{h} = -\frac{g(a-h)-g(a)}{-h}$, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a-h) - g(a)}{h} = -g'(a).$$

La question précédente donne, pour tout $h > 0$,

$$\frac{g(a-h) - g(a)}{h} \leq \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h} \leq -\frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

et, pour tout $h < 0$,

$$\frac{g(a-h) - g(a)}{h} \geq \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h} \geq -\frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

Comme $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a-h)-g(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{g(a+h)-g(a)}{h} = -g'(a)$, on en déduit que φ est dérivable en a et que $\varphi'(a) = -g'(a)$.

N.B. On a donc montré que φ est nécessairement dérivable au point où f atteint son maximum.

3. (Exemple) On définit ici φ et g par $\varphi(x) = |x|$ et $g(x) = -x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$. On pose $f = \varphi + g$. Donner les deux points $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $f(a) = f(b) = \max\{f(x), x \in \mathbb{R}\}$. [On pourra commencer par dessiner la courbe de f .]

corrigé

La fonction f est paire. On l'étudie sur $\mathbb{R}_+$. On a $f(x) = x(1-x)$ pour $x \geq 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ puis strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$. On en déduit que les points a et b sont les points $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.
