Chapitre 3

Dérivée

3.1 Définitions

Définition 3.1 *Soit $-\infty \leq a < b \leq \infty$, f une application de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$ et $x \in]a,b[$. Pour $h \in]a-x, b-x[$, $h \neq 0$, on pose $\varphi(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. On dit que f est dérivable en x si φ a une limite finie en 0 (cette limite est alors unique, d'après la proposition 1.1, chapitre 1). On note alors $f'(x)$ cette limite (on a donc $f'(x) = \lim_{h\to 0} \varphi(h)$).*

Remarque 3.1 On reprend les hypothèses de la définition précédente. Soit $-\infty \leq a < b \leq \infty$. f une application de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$ et $x \in]a,b[$. Pour $h \in]a-x, b-x[$, $h \neq 0$ on pose $\varphi(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. On suppose que φ a une limite finie en 0. Cette limite est notée $f'(x)$. En posant $\varphi(0) = f'(x)$, la fonction φ est alors continue en 0.

Nous donnons maintenant une autre manière de définir la dérivée. L'intérêt de cette seconde définition est qu'elle sera généralisable pour des applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ si $n > 1$.

Définition 3.2 *Soit $-\infty \leq a < b \leq \infty$, f une application de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$ et $x \in]a,b[$. On dit f est différentiable en x si il existe $A \in \mathbb{R}$ t.q.*

$$f(x+h) = f(x) + Ah + hg(h), \text{ pour } h \text{ t.q. } x+h \in]a,b[,$$

avec $\lim_{h\to 0} g(h) = 0$ (et donc g continue en 0 si on pose $g(0) = 0$). La différentielle de f en x est alors l'application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $h \mapsto Ah$. (La proposition 3.1 montre que A est unique.)

Voici le lien entre ses deux définitions.

Proposition 3.1 *Soit $-\infty \leq a < b \leq \infty$, f une application de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$ et $x \in]a,b[$. On a alors :*

1. *L'application f est dérivable en x si et seulement si elle est différentiable en x.*
2. *Si f est dérivable, la différentielle de f est l'application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $h \mapsto f'(x)h$.*

Démonstration :
Pour $h \in]a-x, b-x[$, $h \neq 0$, on pose $\varphi(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
Si f est dérivable en x, on a $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = f'(x)$, c'est-à-dire $\varphi(h) = f'(x) + g(h)$ avec $\lim_{h\to 0} g(h) = 0$. On en déduit donc que $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + hg(h)$ avec $\lim_{h\to 0} g(h) = 0$. Ceci montre que f est

différentiable en x et que la différentielle de f en x est l'application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à h associe $f'(x)h$.

Réciproquement, on suppose maintenant que f est différentiable en x. Il existe donc $A \in \mathbb{R}$ t.q. $f(x+h) = f(x) + Ah + hg(h)$ (pour h t.q. $x + h \in]a, b[$) et $\lim_{h\to 0} g(h) = 0$. On en déduit que $\varphi(h) = A + g(h)$ et donc, comme $\lim_{h\to 0} g(h) = 0$, que f est dérivable en x et $f'(x) = A$.

On a donc bien montré les deux assertions de la proposition 3.1. ■

Définition 3.3 (Tangente à la courbe) *Soit $-\infty \le a < b \le \infty$, f une application de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ et $x \in]a, b[$. On suppose que f est dérivable en x. La tangente à la courbe de f au point $(x, f(x))$ est la droite d'équation $y \mapsto f(x) + f'(x)(y - x)$.*

Remarque 3.2 Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable en x. En général (c'est à dire en dehors de certains points particuliers que nous appellerons "points d'inflexion"), la droite de pente $f'(x)$ et passant par le point $(x, f(x))$ est la seule, parmi toutes les droites passant par le point $(x, f(x))$, à ne pas traverser le courbe de f au point $(x, f(x))$.

Remarque 3.3 Soit $-\infty \le a < b \le \infty$, f une application de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ et $x \in]a, b[$. Le fait que f soit dérivable en x implique que f est continue en x. La réciproque est fausse comme le montre l'exemple $f(x) = |x|$ pour $x \in \mathbb{R}$ (f est continue en 0 mais non dérivable en 0).

3.2 Opérations sur les dérivées

Proposition 3.2 *Soit $-\infty \le a < b \le \infty$. f et g deux applications de $I =]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ et $x \in]a, b[$. On suppose que f et g sont dérivables en x. Alors :*

1. *L'application $f + g$ est dérivable en x et $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.*
2. *L'application fg est dérivable en x et $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$.*
3. *On suppose $g(y) \neq 0$ pour tout $y \in I$. L'application f/g est alors définie sur I, f/g est dérivable en x et :*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Démonstration :

Pour simplifier les écritures (cela ne change pas les raisonnements), on se limite au cas $I = \mathbb{R}$.

1. Pour $h \neq 0$, on remarque que
$$\frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$
Comme les deux termes de droite ont une limite quand $h \to 0$, on en déduit que le terme de gauche a aussi une limite quand $h \to 0$. Cette limite est $f'(x) + g'(x)$. Ceci prouve bien que $f + g$ est dérivable en x et que $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

2. la démonstration est un peu plus longue pour ce deuxième item. Pour $h \neq 0$, on a :
$$\frac{fg(x+h) - fg(x)}{h} = \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h)}{h} + \frac{f(x)(g(x+h) - g(x))}{h}.$$
Comme f est dérivable en x et que g est continue en x (car g est dérivable en x), le premier terme du membre de droite tend vers $f'(x)g(x)$ quand x tend vers 0. Comme g est dérivable en x, le second terme du membre de droite tend vers $f(x)g'(x)$ quand x tend vers 0. On obtient bien, finalement, que fg est dérivable en x et que $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

3. Pour ce troisième item, on commence par montrer que la fonction $1/g$ (qui est bien définie sur I car g ne s'annule pas) est dérivable et par calculer sa dérivée. Pour $h \neq 0$, on a :
$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right) = \frac{g(x) - g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} = -\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\frac{1}{g(x+h)g(x)}.$$
Comme g est continue et dérivable en x, on en déduit que $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$ et donc que $\frac{1}{g}$ est dérivable en x et que sa dérivée est $\frac{-g'(x)}{g^2(x)}$.

   Pour conclure on utilise maintenant le deuxième item en remarquant que $\frac{f}{g} = f\left(\frac{1}{g}\right)$. On obtient que $\frac{f}{g}$ est dérivable en x et que
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{g'(x)f(x)}{g^2(x)}.$$
■

Proposition 3.3 (Dérivée d'une fonction composée) *Soit I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, g une application de I dans $\mathbb{R}$ et f application de J dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\mathrm{Im}(g) \subset J$. Soit $x \in I$. On suppose que g est dérivable en x et f dérivable en $g(x)$. Alors, $f \circ g$ est dérivable en x et $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$.*

Démonstration : Ici aussi, on suppose, pour simplifier les écritures, que $I = J = \mathbb{R}$. On va raisonner ici en utilisant plutôt la notion de différentiabilité (équivalente, par la proposition 3.1, à la notion de dérivabilité).
Comme g est différentiable en x, on a pour tout $h \in \mathbb{R}$,
$$g(x+h) = g(x) + g'(x)h + hr(h),$$
avec $\lim_{h\to 0} r(h) = 0$ (et donc r continue en 0 en posant $r(0) = 0$, comme cela est dit dans la définition 3.2). Pour tout $h \in \mathbb{R}$, on a donc :
$$f \circ g(x+h) = f(g(x+h)) = f(g(x) + g'(x)h + hr(h)). \tag{3.1}$$
On utilise maintenant le fait que f est différentiable en $g(x)$, on a donc pour tout $k \in \mathbb{R}$,
$$f(g(x) + k) = f(g(x)) + f'(g(x))k + ks(k), \tag{3.2}$$
avec $\lim_{k\to 0} s(k) = 0$ (et donc s continue en 0 en posant $s(0) = 0$). Dans (3.2), on prend $k = g'(x)h + hr(h)$, on obtient, avec (3.1), pour tout $h \in \mathbb{R}$:
$$f \circ g(x+h) = f \circ g(x) + f'(g(x))g'(x)h + f'(g(x))hr(h) + (g'(x)h + hr(h))s(g'(x)h + hr(h)),$$

que l'on peut aussi écrire

$$f \circ g(x+h) = f \circ g(x) + f'(g(x))g'(x)h + hR(h),$$

avec $R(h) = f'(g(x))r(h) + g'(x)s(g'(x)h + hr(h)) + r(h)s(g'(x)h + hr(h))$. Par composition de fonctions continues (les fonctions s et r sont continues en 0), on a $\lim_{h\to 0} s(g'(x)h + hr(h)) = 0$ et donc $\lim_{h\to 0} R(h) = 0$. Ce qui prouve que $f \circ g$ est différentiable, et donc dérivable, en x et que sa dérivée est $f'(g(x))g'(x)$. ■

Proposition 3.4 (Fonction réciproque) *Soit $-\infty \le a < b \le \infty$ et f une application de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est strictement croissante et continue. On rappelle (théorème 2.5 que f est alors une bijection de $]a,b[$ dans $]\alpha,\beta[$ (avec $\alpha = \inf(\mathrm{Im}(f))$ et $\beta = \sup(\mathrm{Im}(f))$). On note g la fonction réciproque de f. Soit $x \in]a,b[$. on suppose que f dérivable en x et $f'(x) \ne 0$. Alors g est dérivable en $f(x)$ et $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$.*

Démonstration : Le théorème 2.5 donne que g est continue (sur tout l'intervalle $]\alpha,\beta[$) et donc continue en $f(x)$ (c'est-à-dire au point $f(x)$). On montre maintenant que g est dérivable en $f(x)$. On pose $y = f(x)$, de sorte que $x = g(y)$. Soit $h \ne 0$ t.q. $y + h \in]\alpha,\beta[$ (noter que $y \in]\alpha,\beta[$). On a, comme $f \circ g(z) = z$ pour tout $z \in]\alpha,\beta[$:

$$\frac{g(y+h) - g(y)}{h} = \frac{g(y+h) - g(y)}{(y+h) - y} = \frac{g(y+h) - g(y)}{f \circ g(y+h) - f \circ g(y)}.$$

Mais $g(y) = x$ et $g(y+h) = g(y) + k(h) = x + k(h)$ avec $\lim_{h\to 0} k(h) = 0$ car g est continue en y (noter d'ailleurs que $k(h) \ne 0$ car $h \ne 0$ et g injective). On a donc :

$$\frac{g(y+h) - g(y)}{h} = \frac{x + k(h) - x}{f(x+k(h)) - f(x)} = \frac{k(h)}{f(x+k(h)) - f(x)}$$

Par composition de limite (proposition 1.8) ou composition de fonctions continues (en posant $k(0) = 0$), on en déduit :

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(y+h) - g(y)}{h} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{f(x+k) - f(x)} = \frac{1}{f'(x)},$$

ce qui montre bien que g est dérivable en y et $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$. ■

Remarque 3.4 Dans la proposition 3.4, si on admet que g est dérivable en $f(x)$, la formule donnant g' au point $f(x)$ est facile à retrouver en écrivant que $g \circ f(y) = y$, pour tout y, et en dérivant la fonction composée $g \circ f$ (proposition 3.3) en x. En effet, en supposant que g est dérivable en $f(x)$, la proposition 3.3 donne que $g \circ f$ est dérivable en x et $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$. Comme $g \circ f(y) = y$ pour tout y, on a aussi $(g \circ f)'(x) = 1$ et donc, puisque l'on a supposé que $f'(x) \ne 0$, $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$.

Exemple 3.1

1. On note ln l'application de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ dont la dérivée est l'application $x \mapsto 1/x$ et qui s'annule en 1 (nous verrons au chapitre 5 que cette application existe, c'est la primitive s'annulant en 1 de l'application $x \mapsto 1/x$ définie sur $]0,+\infty[$). L'application ln est strictement croissante et continue (car dérivable) et son image est égale $\mathbb{R}$. La fonction réciproque de la fonction ln existe donc et est strictement croissante continue de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$ (théorème 2.5). Cette fonction réciproque s'appelle la fonction exponentielle, c'est l'application $x \mapsto e^x$. En appliquant la proposition 3.4, avec $f = \ln$ et g la fonction réciproque, on obient pour tout $x \in]0,\infty[$, $g'(\ln(x)) = x$ (car $f'(x) = 1/x \ne 0$) et donc, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $g'(y) = g(y)$ (car $x = g(\ln(x))$). On a ainsi montré que la dérivée de la fonction exponentielle est la fonction exponentielle elle-même.

2. On définit ici l'application f de $]0,\infty[$ dans $]0,\infty[$ par $f(x) = x^4$ si $x \in]0,\infty[$. On montre tout d'abord que f est dérivable en tout point de $]0,+\infty[$ et $f'(x) = 4x^3$ pour tout $x \in]0,+\infty[$. On en déduit que, pour tout $x > 0$, $g'(x) = \frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}}$ où g est la fonction réciproque de f.

3.3 Théorème des Accroissements Finis

Nous commençons par un cas particulier du théorème des Accroissements Finis.

Théorème 3.1 (Théorème de Rolle) *Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. on suppose que f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ (c'est-à-dire dérivable en tout point de $]a,b[$). on suppose aussi que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in]a,b[$ t.q. $f'(c) = 0$.*

Démonstration : Nous démontrons ce théorème en distinguant 3 cas possibles.

Premier cas. On suppose que $f(x) = f(a)$ pour tout $x \in [a,b]$. On prend alors pour c un point quelconque de $]a,b[$ (par exemple $c = \frac{1}{2}(a+b)$) et on a bien $f'(c) = 0$.

Deuxième cas. On suppose qu'il existe $x \in [a,b]$ t.q. $f(x) > f(a)$. Comme f est continue sur $[a,b]$, d'après le théorème 2.3, il existe $c \in [a,b]$ t.q. $f(c) = M = \max\{f(x),\ x \in [a,b]\}$. Comme $M > f(a) = f(b)$, on a donc $c \in]a,b[$. Pour $h \neq 0$ t.q. $a \leq c+h \leq b$, on pose

$$\varphi(h) = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Pour $h > 0$, on a $f(c+h) \leq M = f(c)$ et donc $\varphi(h) \leq 0$. On en déduit que $f'(c) = \lim_{h \to 0, h>0} \varphi(h) \leq 0$.

Pour $h < 0$, on a $f(c+h) \leq M = f(c)$ et donc $\varphi(h) \geq 0$. On en déduit que $f'(c) = \lim_{h \to 0, h<0} \varphi(h) \geq 0$.

Finalement, on a donc nécessairement $f'(c) = 0$.

Troisième cas. On suppose qu'il existe $x \in [a,b]$ t.q. $f(x) < f(a)$. On raisonne alors de manière semblable au cas précédent. On remarque qu'il existe $c \in]a,b[$ t.q. $f(c) = m = \min\{f(x),\ x \in [a,b]\}$. Puis, on montre que $f'(c) = 0$. ■

Nous donnons maintenant le théorème des Accroissements Finis.

Théorème 3.2 (Théorème des Accroissements Finis) *Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. on suppose que f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors, il existe $c \in]a,b[$ t.q. $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.*

Démonstration : On va utiliser le théorème 3.1 pour une fonction bien choisie. Pour $x \in [a,b]$, on pose

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

La fonction g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. De plus, on a $g(b) = g(a) = f(a)$. Le théorème 3.1 montre donc qu'il existe $c \in]a,b[$ t.q. $g'(c) = 0$. Comme $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, pour tout $x \in]a,b[$, on a donc $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, c'est-à-dire $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$. ■

Voici maintenant quelques conséquences du théorème des Accroissements Finis.

Remarque 3.5 Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. on suppose f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On a alors :

1. $f(b) - f(a) = \gamma(b-a)$ avec $\overline{m} \le \gamma \le \overline{M}$, $\overline{m} = \inf\{f'(x),\ x \in]a,b[\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $\overline{M} = \sup\{f'(x),\ x \in]a,b[\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. (C'est équivalent à la conclusion du théorème des Accroissements Finis sauf que le théorème des Accroissements Finis donne des inégalités strictes sur γ lorsque les bornes $\overline{m}$ et $\overline{M}$ ne sont pas atteintes. Cette équivalence est due au fait que f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.)
2. On suppose de plus qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ t.q. $|f'(x)| \le M$ pour tout $x \in]a,b[$. Alors $|f(b) - f(a)| \le M|b-a|$. (C'est cette forme du théorème des Accroissements Finis qui pourra être généralisée au cas d'une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, voir le théorème 7.1. La forme donnée dans le théorème 3.2 n'étant plus vraie si $p > 1$.)
3. On suppose de plus que $f'(x) \ge 0$ pour tout $x \in]a,b[$. Alors f est croissante.
4. On suppose de plus que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a,b[$. Alors f est strictement croissante.
5. On suppose de plus que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a,b[$. Alors f est constante.

On suppose maintenant que f et g sont continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ et que $f'(x) = g'(x)$ pour tout $x \in]a,b[$. Alors $f - g$ est constante.

3.4 Fonctions de classe C^n

Définition 3.4 *Soit $-\infty \le a < b \le \infty$ et f une application de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$.*

1. *f est dérivable sur $]a,b[$ si f est dérivable en tout point de $]a,b[$.*
2. *f est de classe C^0 (on écrit $f \in C^0(]a,b[)$ ou $f \in C(]a,b[)$) si f est continue sur $]a,b[$.*
3. *$n \ge 1$. f est de classe C^n sur $]a,b[$ (on écrit $f \in C^n(]a,b[)$) si f est dérivable sur $]a,b[$ et f' est de classe C^{n-1}.*
4. *f est de classe C^∞ sur $]a,b[$ si, pour tout $n \ge 0$, f est de classe C^n sur $]a,b[$.*

Notation : $f^{(0)} = f$ et, pour $n \ge 1$, $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Exemple 3.2 Exemples de fonctions de classe C^∞.

1. $a = -\infty$, $b = \infty$. $f(x) = e^x$ pour $x \in \mathbb{R}$. f est de classe C^∞ et $f^{(n)} = f$ pour tout $n \ge 0$.
2. $a = 0$, $b = \infty$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $g(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ pour $x \in]a,b[$. g est de classe C^∞, $g'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, pour tout $x \in]a,b[$, et, par récurrence sur n, $g^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$ pour tout $x \in]a,b[$ et pour tout $n \ge 2$.
3. $a = 0$, $b = \infty$. $h(x) = \ln(x)$ pour $x \in]a,b[$. h est de classe C^∞ et $h'(x) = x^{-1}$ pour tout $x \in]a,b[$ (pour calculer les dérivées suivantes de h, on utilise alors le deuxième item). (On rappelle que la fonction ln est définie, sur $\mathbb{R}_+^\star$, comme étant la primitive de $x \mapsto 1/x$ s'annulant en 1. L'existence de cette primitive est montrée au chapitre 5.)

3.5 Exercices

Exercice 3.1 (Opérations sur les dérivées)

Soit $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $x \in]a,b[$ et f, g deux applications de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et g sont dérivables en x.

1. Montrer que $(f+g)$ est dérivable en x et $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
2. Montrer que fg est dérivable en x et $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
3. On suppose que $g(y) \neq 0$ pour tout $y \in]a,b[$. Montrer que f/g est dérivable en x et que :

$$(f/g)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Exercice 3.2 (Dérivée en un point)

Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable pour tout $x \neq 0$ et que f' (définie sur $\mathbb{R}^\star$) admet une limite en 0, notée l. Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = l$. [On pourra utiliser le théorème des accroissements finis.]

Exercice 3.3 (Dérivabilité de $x \mapsto |x|^a$)

Etudier, selon les valeurs du paramètre $a > 0$, la continuité et la dérivabilité de l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|^a$ pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$ et $f(0) = 0$.

Exercice 3.4 (Dérivée non continue)

On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 0, \text{ si } x \leq 0,$$
$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}, \text{ si } x > 0.$$

Montrer que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La dérivée de f est-elle continue ?

Exercice 3.5 (Dérivée et propriété des valeurs intermédiaires)

Soit $-\infty \leq a < b \leq \infty$ et f une application de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable pour tout $x \in]a,b[$. On va montrer, dans cet exercice, que f' (définie sur $]a,b[$) vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

Soit $c, d \in]a,b[$, $c < d$, et γ appartenant à l'intervalle ouvert dont les bornes sont $f'(c)$ et $f'(d)$.

1. Montrer qu'il existe $\eta \in]0, d-c[$ t.q. γ appartienne à l'intervalle ouvert dont les bornes sont $\frac{f(c+\eta)-f(c)}{\eta}$ et $\frac{f(d-\eta)-f(d)}{-\eta}$.
2. On définit g de $[c, d-\eta]$ dans $\mathbb{R}$ (avec η donné par la question précédente) par :

$$g(x) = \frac{f(x+\eta) - f(x)}{\eta}, \text{ pour } x \in [c, d-\eta].$$

   Montrer que g est continue sur l'intervalle $[c, d-\eta]$ et en déduire qu'il existe $y \in [c, d-\eta]$ t.q. $g(y) = \gamma$.

3. Montrer qu'il existe $z \in [c, d]$ t.q. $f'(z) = \gamma$.

Exercice 3.6 (Propriété des valeurs intermédiaires n'implique pas continuité)

En utilisant les deux exercices précédents, donner un exemple d'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires et non continue.

Exercice 3.7 (Accroissements finis "généralisés")

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit f et g deux applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et g est dérivables pour tout $x \in]a, b[$ et que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

1. Montrer que $g(x) - g(a) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b]$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ t.q. :
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
[On pourra considérer la fonction u définie sur $[a, b]$ par $u(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x)$.]

Exercice 3.8

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est deux fois dérivable pour tout $x \in]a, b[$ (c'est-à-dire que f est dérivable pour tout $x \in]a, b[$ et que f', qui est donc définie sur $]a, b[$, est aussi dérivable pour tout $x \in]a, b[$). Soit $x_0 \in]a, b[$.

1. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ t.q. :
$$f(x_0) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_0 - a) + \frac{(x_0 - a)(x_0 - b)}{2} A.$$
2. On définit φ sur $[a, b]$ par :
$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - \frac{(x - a)(x - b)}{2} A.$$
Montrer qu'il existe $c \in]a, x_0[$ et $d \in]x_0, b[$ t.q. $\varphi'(c) = \varphi'(d) = 0$.
3. Montrer qu'il existe $\theta \in]a, b[$ t.q. :
$$f(x_0) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_0 - a) + \frac{(x_0 - a)(x_0 - b)}{2} f''(\theta).$$

Exercice 3.9

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x + e^x$. Montrer que f est strictement croissante, continue et bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note g l'application réciproque de f. Montrer que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $g'(1)$ et $g''(1)$.

Exercice 3.10 (Limite à l'infini)

Soit f une fonction dérivable de $]0, \infty[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Montrer que $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Exercice 3.11 (Dérivabilité en un point)

Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que f est dérivable en tout point x différent de a et que f' (définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$) admet une limite en a, notée a_1. Montrer que f est dérivable en a et que $f'(a) = a_1$. [Cette question a été faite dans un exercice précédent avec $a = 0$.]

2. On suppose que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $f^{(n)}$ (définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$) admet une limite en a, notée a_n. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. [On pourra raisonner par récurrence sur n.]

Exercice 3.12 (Fonctions höldériennes)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ et $k \in \mathbb{R}, k > 0$. On suppose que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|f(y) - f(x)| \le k|y - x|^\beta$.

1. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

2. On suppose, dans cette question, que $\beta > 1$. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que $f'(x) = 0$. En déduire que f est constante.

3. (Exemple) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = |x|^{\frac{1}{2}}$. Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|g(y) - g(x)| \le |y - x|^{\frac{1}{2}}$. [On pourra montrer qu'on peut supposer $|y| \ge |x|$, et distinguer les cas où x et y sont de même signe et où x et y sont de signe contraire.]

Exercice 3.13 (Exercice de rédaction. . .)

Soit φ une application de $]0, \infty[$ dans $\mathbb{R}$, dérivable (en tout point de $]0, \infty[$) et t.q. $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$.

1. On suppose que $\varphi'(x) \le 0$ pour tout $x > 0$. Montrer que $\varphi(x) \ge 0$ pour tout $x > 0$.

2. On suppose que $\varphi'(x) < 0$ pour tout $x > 0$. Montrer que $\varphi(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

Exercice 3.14 (Etude d'une fonction)

Soit $a > 0$. On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} &f(x) = (1 + \tfrac{a}{|x|})^x, \text{ si } x \ne 0, \\ &f(0) = 1. \end{aligned}$$

(On rappelle que $b^x = e^{x \ln b}$, pour $b > 0$ et $x \in \mathbb{R}$.)

1. (Continuité de f)

   (a) Montrer que $e^z \ge 1 + \dfrac{z^2}{2}$ pour tout $z \in \mathbb{R}_+$.
   En déduire que $\ln(1 + y) \le \sqrt{2y}$, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$.

   (b) En utilisant la question précédente, montrer que $1 \le f(x) \le e^{\sqrt{2ax}}$, pour tout $x \in]0, \infty[$.

   (c) Montrer que $\lim_{x\to 0, x>0} f(x) = 1$.

   (d) Montrer que f est continue en 0. [On pourra remarquer que $f(x)f(-x) = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.]

2. (Dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^\star$) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\star$ et que $f'(x) > 0$ pour tout $x \ne 0$. [Pour $x > 0$, on pourra mettre $f'(x)$ sour la forme $f(x)\varphi(x)$ et utiliser l'exercice 3.13.] Montrer que f est strictement croissante.

3. (Dérivabilité en 0 ?) Montrer que $\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$. L'application f est-elle dérivable en 0 ? (Justifier la réponse. . .)

4. (Limites en $\pm\infty$) Donner (en fonction de a) les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de f.

   Dans la suite, on note l et m ces limites.

5. (Fonction réciproque) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]m, l[$. On note g la fonction réciproque de f (de sorte que g est une application de $]m, l[$ dans $\mathbb{R}$). Montrer que g est dérivable en 1 (noter que $1 \in]m, l[$) et calculer $g'(1)$. [Pour $h \neq 0$, on pourra appliquer le théorème des Accoissements Finis à la fonction f entre les points $g(1 + h)$ et $g(1)$.]

6. (Régularité de la fonction réciproque) Montrer que la fonction réciproque de f est de classe C^1 sur $]m, l[$ mais que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

3.6 Exercices corrigés

Exercice 3.15 (Corrigé de l'exercice 3.8)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est deux fois dérivable pour tout $x \in]a, b[$ (c'est-à-dire que f est dérivable pour tout $x \in]a, b[$ et que f', qui est donc définie sur $]a, b[$, est aussi dérivable pour tout $x \in]a, b[$). Soit $x_0 \in]a, b[$.

1. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ t.q. :

$$f(x_0) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_0 - a) + \frac{(x_0 - a)(x_0 - b)}{2}A.$$

—————————————corrigé—————————————

Il suffit de définir de définir A par la formule suivante :

$$A = \frac{2}{(x_0 - a)(x_0 - b)}\left(f(x_0) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_0 - a)\right).$$

On obtient bien

$$f(x_0) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_0 - a) + \frac{(x_0 - a)(x_0 - b)}{2}A. \tag{3.3}$$

———————————————————————————

2. On définit φ sur $[a, b]$ par :

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - \frac{(x - a)(x - b)}{2}A.$$

Montrer qu'il existe $c \in]a, x_0[$ et $d \in]x_0, b[$ t.q. $\varphi'(c) = \varphi'(d) = 0$.

—————————————corrigé—————————————

La fonction φ est continue sur l'intervalle $[a, x_0]$ et dérivable sur l'intervalle $]a, x_0[$, on peut donc utiliser le théorème des accroissements finis (théorème 3.2). Il donne l'existence de $c \in]a, x_0[$ t.q. $\varphi(x_0) - \varphi(a) = \varphi'(c)(x_0 - a)$. Comme $\varphi(a) = 0$ et $\varphi(x_0) = 0$ (par le choix de A), on a donc $\varphi'(c) = 0$.

De même, la fonction φ est continue sur l'intervalle $[x_0, b]$ et dérivable sur l'intervalle $]x_0, b[$, on peut donc utiliser le théorème des accroissements finis. Il donne l'existence de $d \in]x_0, b[$ t.q. $\varphi(x_0) - \varphi(b) = \varphi'(d)(x_0 - b)$. Comme $\varphi(b) = \varphi(x_0) = 0$, on a donc $\varphi'(d) = 0$.

---

3. Montrer qu'il existe $\theta \in]a, b[$ t.q. :

$$f(x_0) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_0 - a) + \frac{(x_0 - a)(x_0 - b)}{2} f''(\theta).$$

corrigé

La fonction φ' est continue sur l'intervalle $[c, d]$ et dérivable sur l'intervalle $]c, d[$ (car $c, d \in]a, b[$ et que f' est dérivable sur $]a, b[$), on peut donc utiliser le théorème des accroissements finis. Il donne l'existence de $\theta \in]c, d[$ t.q. $\varphi''(\theta) = 0$. Or, pour tout $x \in]a, b[$, on a $\varphi''(x) = f''(x) - A$. On a donc $A = \varphi''(\theta)$. En reportant cette valeur de A dans (3.3) on obtient bien $f(x_0) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0 - a) + \frac{(x_0-a)(x_0-b)}{2} f''(\theta)$.

N.B. Pour les questions 2 et 3, on peut aussi utiliser la version "réduite" du théorème 3.2, c'est-à-dire le théorème de Rolle (théorème 3.1).

Exercice 3.16 (Corrigé de l'exercice 3.11)

Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que f est dérivable en tout point x différent de a et que f' (définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$) admet une limite en a, notée a_1. Montrer que f est dérivable en a et que $f'(a) = a_1$. [Cette question a été faite dans un exercice précédent avec $a = 0$.]

corrigé

On veut montrer que $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = a_1$, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ t.q. :

$$h \neq 0,\ |h| \leq \alpha \Rightarrow \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - a_1 \right| \leq \varepsilon. \tag{3.4}$$

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche donc α vérifiant (3.4). Comme $\lim_{x \to a} f'(x) = a_1$, il existe $\alpha > 0$ t.q. :

$$y \neq a,\ |y - a| \leq \alpha \Rightarrow |f'(y) - a_1| \leq \varepsilon. \tag{3.5}$$

Soit maintenant $h \neq 0$ t.q. $|h| \leq \alpha$. En appliquant le théorème des accroissements finis (théorème 3.2) à la fonction f (qui est continue sur l'intervalle fermé dont les bornes sont a et $a + h$ et dérivable sur l'intervalle ouvert dont les bornes sont a et $a + h$) il existe y strictement compris entre a et $a + h$ t.q. $f(a + h) - f(a) = hf'(y)$. Comme $|y - a| \leq |h| \leq \alpha$, on peut utiliser (3.4) et on obtient :

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - a_1 \right| = |f'(y) - a_1| \leq \varepsilon.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc bien trouvé $\alpha > 0$ vérifiant 3.5. Ceci prouve que f est dérivable en a et que $f'(a) = a_1$. Comme $\lim_{x \to a} f'(x) = a_1$, on a donc aussi montré que f' est continue en a.

---

2. On suppose que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $f^{(n)}$ (définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$) admet une limite en a, notée a_n. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. [On pourra raisonner par récurrence sur n.]

corrigé

On va montrer, par récurrence sur n, que f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Pour $n = 0$, on a bien f de classe C^0 (car f est continue sur $\mathbb{R}$).

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f est de classe C^n, en on va montrer que f est de classe C^{n+1}. On pose $g = f^{(n)}$. La fonction g est donc continue sur $\mathbb{R}$. Les hypothèses de la question donne aussi que g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ et que $\lim_{x\to a} g'(x) = a_{n+1}$ (car $g' = f^{(n+1)}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$). On peut donc appliquer la question 1 à la fonction g. Elle donne que g est dérivable en a et que g' est continue en a. Comme $g = f^{(n)}$, on a donc $f^{(n)}$ dérivable en a et $f^{(n+1)}$ continue en a. Les hypothèses de la question donnant aussi que $f^{(n)}$est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ et que $f^{(n+1)}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, on obtient finalement que f est de classe C^{n+1}.

On a bien ainsi montré, par récurrence sur n, que f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci signifie que f est de classe C^∞.

Exercice 3.17 (Corrigé de l'exercice 3.12)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ et $k \in \mathbb{R}, k > 0$. On suppose que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|f(y) - f(x)| \le k|y - x|^\beta$.

1. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

corrigé

On va même montrer que f est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\alpha = (\frac{\varepsilon}{k})^{\frac{1}{\beta}}$, de sorte que $\alpha > 0$ et :

$$x, y \in \mathbb{R},\ |x - y| \le \alpha \Rightarrow |f(y) - f(x)| \le k|y - x|^\beta \le k\alpha^\beta = \varepsilon.$$

Ceci montre bien que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

---

2. On suppose, dans cette question, que $\beta > 1$. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que $f'(x) = 0$. En déduire que f est constante.

corrigé

Pour $h \neq 0$, on a, en utilisant l'hypothèse sur f avec $y = x + h$, $|f(x + h) - f(x)| \le k|h|^\beta$. On en déduit :

$$0 \le |\frac{f(x + h) - f(h)}{h}| \le k|h|^{\beta-1}.$$

Comme $\beta > 1$, on a $\lim_{h\to 0} k|h|^{\beta-1} = 0$ et donc $\lim_{h\to 0} |\frac{f(x+h)-f(h)}{h}| = 0$ (on raisonne ici avec un x fixé). Ceci prouve que $f'(x) = 0$.

On a donc montré que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En utilisant le théorème des accroissements finis, ceci implique que f est constante (voir la remarque 3.5). On rappelle ici cette démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^\star$. Le théorème des accroissements finis (théorème 3.2) donne l'existence de y entre 0 et x t.q. $f(x) - f(0) = xf'(y)$. comme $f'(y) = 0$, on a donc $f(x) = f(0)$. La fonction f est donc constante.

---

3. (Exemple) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = |x|^{\frac{1}{2}}$. Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|g(y) - g(x)| \leq |y - x|^{\frac{1}{2}}$. [On pourra montrer qu'on peut supposer $|y| \geq |x|$, et distinguer les cas où x et y sont de même signe et où x et y sont de signe contraire.]

———————————————————**corrigé**———————————————————

Soit $x, y \in \mathbb{R}$. En changeant éventuellement x en y et y en x (ce qui ne change pas $|g(y) - g(x)|$ et $|y - x|$), on peut supposer $|y| \geq |x|$. En changeant éventuellement y en $-y$ et x en $-x$ (ce qui ne change toujours pas $|g(y) - g(x)|$ et $|y - x|$), on peut également supposer $y \geq 0$. On distingue maintenant 2 cas selon le signe de x.

Cas 1. On suppose ici $x \geq 0$. On a alors $|g(y) - g(x)| = \sqrt{y} - \sqrt{x}$ et $|y - x| = y - x$. On remarque alors que $(\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 = y + x - 2\sqrt{y}\sqrt{x} \leq y + x - 2\sqrt{x}\sqrt{x}$ (car $\sqrt{y} \geq \sqrt{x}$) et donc $(\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 \leq y + x - 2x = y - x$, ce qui donne bien :

$$|g(y) - g(x)| = \sqrt{y} - \sqrt{x} \leq \sqrt{y - x} = |y - x|^{\frac{1}{2}}.$$

Cas 2. On suppose ici $x < 0$. Comme $g(y) \geq g(x) \geq 0$, on a $|g(y) - g(x)| = g(y) - g(x) \leq g(y)$. En utilisant le premier cas précédent avec le couple $(0, y)$, on a :

$$g(y) = |g(y) - g(0)| \leq y^{\frac{1}{2}}.$$

Comme $0 \leq y \leq y - x$, on a $y^{\frac{1}{2}} \leq |y - x|^{\frac{1}{2}}$ et donc :

$$|g(y) - g(x)| \leq g(y) \leq y^{\frac{1}{2}} \leq |y - x|^{\frac{1}{2}}.$$

———————————————————————————————————————

Exercice 3.18 (Corrigé de l'exercice 3.13)

Soit φ une application de $]0, \infty[$ dans $\mathbb{R}$, dérivable (en tout point de $]0, \infty[$) et t.q. $\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = 0$.

1. On suppose que $\varphi'(x) \leq 0$ pour tout $x > 0$. Montrer que $\varphi(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$.

———————————————————**corrigé**———————————————————

Soit $x > 0$. On veut montrer que $\varphi(x) \geq 0$.

Soit $y > x$. La fonction f est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$. Le théorème des accroissemens finis donne donc l'existence de $z \in]x, y[$ t.q. $\varphi(y) - \varphi(x) = (y - x)\varphi'(z)$. Comme $\varphi'(z) \leq 0$ et $y > x$, on a donc $\varphi(x) \geq \varphi(y)$. On peut maintenant passer à la limite dans cette inégalité quand y tend vers $+\infty$ (avec x fixé) et on obtient :

$$\varphi(x) \geq \lim_{y \to \infty} \varphi(y) = 0.$$

———————————————————————————————————————

2. On suppose que $\varphi'(x) < 0$ pour tout $x > 0$. Montrer que $\varphi(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

———————————————————**corrigé**———————————————————

Soit $x > 0$. En appliquant encore une fois le théorème des accroissemens finis, il existe $z \in]x, x + 1[$ t.q. $\varphi(x + 1) - \varphi(x) = \varphi'(z)$. Comme $\varphi'(z) < 0$ n a donc $\varphi(x) > \varphi(x + 1)$. Or, on sait, par la question 1, que $\varphi(x + 1) \geq 0$. On a donc $\varphi(x) > 0$.

———————————————————————————————————————

Exercice 3.19 (Corrigé de l'exercice 3.14)
Soit $a > 0$. On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$f(x) = (1 + \tfrac{a}{|x|})^x, \text{ si } x \neq 0,$$
$$f(0) = 1.$$

(On rappelle que $b^x = e^{x \ln b}$, pour $b > 0$ et $x \in \mathbb{R}$.)

1. (Continuité de f)

   (a) Montrer que $e^z \geq 1 + \dfrac{z^2}{2}$ pour tout $z \in \mathbb{R}_+$.
   En déduire que $\ln(1+y) \leq \sqrt{2y}$, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$.

   ———————————————**corrigé**———————————————

   On pose, pour $z \in \mathbb{R}$, $g(z) = e^z - 1 - \frac{z^2}{2}$. La fonction g est de classe C^∞ et on a $g'(z) = e^z - z$, $g''(z) = e^z - 1$ pour tout $z \in \mathbb{R}$. Comme $g''(z) \geq 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}_+$, la fonction g' est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (d'après le troisième item de la remarque 3.5). On a donc $g'(z) \geq g'(0) = 1 \geq 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}_+$. La fonction g est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$ (toujours par le troisième item de la remarque 3.5), ce qui donne $g(z) \geq g(0) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}_+$. Ce qui donne bien :

   $$e^z \geq 1 + \frac{z^2}{2} \text{ pour tout } z \in \mathbb{R}_+.$$

   Soit $y \in \mathbb{R}_+$. On applique l'inégalité précédente avec $z = \sqrt{2y} \in \mathbb{R}_+$, on obtient que $e^{\sqrt{2y}} \geq 1 + y$. Comme la fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$, on obtient :

   $$\sqrt{2y} \geq \ln(1+y).$$

   ———————————————————————————————————

   (b) En utilisant la question précédente, montrer que $1 \leq f(x) \leq e^{\sqrt{2ax}}$, pour tout $x \in]0, \infty[$.

   ———————————————**corrigé**———————————————

   Soit $x > 0$. Comme $f(x) = e^{x \ln(1 + \frac{a}{x})}$, on a $f(x) \geq 1$ (car $x \ln(1 + \frac{a}{x}) > 0$) et, en utilisant la question précédente avec $y = \frac{a}{x}$, $f(x) \leq e^{x\sqrt{2\frac{a}{x}}} = e^{\sqrt{2ax}}$.

   ———————————————————————————————————

   (c) Montrer que $\lim_{x \to 0, x > 0} f(x) = 1$.

   ———————————————**corrigé**———————————————

   En passant à limite, quand $x \to 0$ avec $x > 0$, dans l'inégalité $1 \leq f(x) \leq e^{\sqrt{2ax}}$, on obtient que $\lim_{x \to 0, x > 0} f(x) = 1$.

   ———————————————————————————————————

   (d) Montrer que f est continue en 0. [On pourra remarquer que $f(x)f(-x) = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.]

   ———————————————**corrigé**———————————————

   Comme $f(x) = \frac{1}{f(-x)}$ pour tout $x < 0$, on a (avec la question précédente) :

   $$\lim_{x \to 0,\, x < 0} f(x) = \frac{1}{\lim_{x \to 0,\, x > 0} f(x)} = 1.$$

   On a donc $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$, et, comme $f(0) = 1$, on en déduit que f est continue en 0.

   ———————————————————————————————————

2. (Dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^\star$) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\star$ et que $f'(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$. [Pour $x > 0$, on pourra mettre $f'(x)$ sour la forme $f(x)\varphi(x)$ et utiliser l'exercice 3.13.] Montrer que f est strictement croissante.

———————————————————**corrigé**———————————————————

Pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a $f(x) = e^{x\ln(1+\frac{a}{x})}$. On en déduit que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^\star$ comme composée de fonctions de classe C^1 (on a même f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^\star$).

De même, pour $x \in \mathbb{R}_-^\star$, on a $f(x) = e^{x\ln(1-\frac{a}{x})}$. On en déduit que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_-^\star$ comme composée de fonctions de classe C^1. La fonction f est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\star$.

Pour $x > 0$, on a $f'(x) = f(x)\varphi(x)$ avec :

$$\varphi(x) = \ln(1 + \frac{a}{x}) - \frac{a}{a+x}.$$

En tout point de $\mathbb{R}_+^\star$, φ est dérivable et on a, pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$:

$$\varphi'(x) = -\frac{a}{x(a+x)} + \frac{a}{(a+x)^2} = -\frac{a^2}{x(a+x)^2} < 0.$$

De plus, on a $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$. Avec l'exercice 3.13, on en déduit que $\varphi(x) > 0$ pour tout $x > 0$. Comme $f'(x) = f(x)\varphi(x)$ et que $f(x) > 0$, on a donc aussi $f'(x) > 0$ pour tout $x > 0$. En utilisant le quatrième item de la remarque 3.5, on en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Pour $x \in \mathbb{R}_-^\star$ on a $f(x) = \frac{1}{f(-x)}$. On a donc f dérivable sur $\mathbb{R}_-^\star$ et $f'(x) = \frac{f'(-x)}{f(-x)^2}$ (pour tout $x < 0$). On a donc aussi $f'(x) > 0$ pour tout $x > 0$, ce qui donne que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$. Finalement, on a bien montré que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

———————————————————————————————————————

3. (Dérivabilité en 0 ?) Montrer que $\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$. L'application f est-elle dérivable en 0 ? (Justifier la réponse. . .)

———————————————————**corrigé**———————————————————

En reprenant la fonction φ introduite à la question précédente, on a $\lim_{x\to 0,\, x>0} \varphi(x) = +\infty$. Comme $f'(x) = f(x)\varphi(x)$ pour tout $x > 0$ et que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, on en déduit :

$$\lim_{x\to 0,\, x>0} f'(x) = +\infty.$$

Comme $f'(x) = \frac{f'(-x)}{f(-x)^2}$ pour tout $x < 0$, on a aussi $\lim_{x\to 0,\, x<0} f'(x) = +\infty$. On a donc $\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$.

On va montrer maintenant que $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = +\infty$ (ce qui prouve bien que f n'est pas dérivable en 0).

Soit $M \in \mathbb{R}$. Comme $\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$, il existe $\alpha > 0$ t.q. :

$$x \neq 0,\ |x| \leq \alpha \Rightarrow f'(x) \geq M.$$

Soit $h \neq 0$, $|h| \leq \alpha$. En appliquant le théorème des accroissements finis (théorème 3.2) à la fonction f sur l'intervalle dont les bornes sont 0 et h, il existe x strictement entre 0 et h t.q. $f(h) - f(0) = hf'(x)$. Comme $x \neq 0$ et $|x| < |h| \leq \alpha$, on a $f'(x) \geq M$ et donc :

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(x) \geq M.$$

On a donc :

$$h \neq 0,\ |h| \leq \alpha \Rightarrow \frac{f(h) - f(0)}{h} \geq M.$$

Ceci prouve que $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = +\infty$ et donc que f n'est pas dérivable en 0.

---

4. (Limites en $\pm\infty$) Donner (en fonction de a) les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de f.

corrigé

Pour $y \in]-\frac{1}{a}, +\infty[$, on pose $\psi(y) = \ln(1 + ay)$. |a fonction ψ est dérivable et $\psi'(y) = \frac{a}{1+ay}$. On a donc, en particulier :

$$\lim_{y \to 0} \frac{\ln(1 + ay)}{y} = \psi'(0) = a.$$

On a donc (en posant $y = \frac{1}{x}$) $\lim_{x \to +\infty} x \ln(1 + \frac{a}{x}) = a$. On en déduit que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^a$.

Comme $f(x) = \frac{1}{f(-x)}$, on a $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{\lim_{x \to +\infty} f(x)} = e^{-a}$.

Dans la suite, on note l et m ces limites.

corrigé

On a donc $l = e^a$ et $m = e^{-a}$

---

5. (Fonction réciproque) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]m, l[$. On note g la fonction réciproque de f (de sorte que g est une application de $]m, l[$ dans $\mathbb{R}$). Montrer que g est dérivable en 1 (noter que $1 \in]m, l[$) et calculer $g'(1)$. [Pour $h \neq 0$, on pourra appliquer le théorème des Accoissements Finis à la fonction f entre les points $g(1 + h)$ et $g(1)$.]

corrigé

La fonction f est continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ses limites en $+\infty$ et $-\infty$ sont l et m. Le théorème 2.5 donne alors que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]m, l[$ et que sa fonction réciproque, notée g, est continue strictement croissante de $]m, l[$ dans $\mathbb{R}$.

On va montrer maintenant que g est dérivable en 1 et que $g'(1) = 0$, c'est-à-dire que

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(1 + h) - g(1)}{h} = 0.$$

L'idée principale est de remarquer que, pour $h \neq 0$ (et t.q. $1 + h \in]m, l[$), on a :

$$\frac{g(1 + h) - g(1)}{h} = \frac{\tau}{f(\tau) - f(0)},$$

avec $\tau = g(1+h) - g(1) = g(1+h)$ (car $g(1) = 0$ puisque $f(0) = 1$) et donc $f(\tau) = 1+h = f(0)+h$. (Noter aussi que $\tau \neq 0$ car g est injective).

Comme g est continue, on a $\lim_{h\to 0} g(1+h) - g(1) = 0$. Pour montrer que $\lim_{h\to 0} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} = 0$, il suffit donc de montrer que $\lim_{\tau\to 0} \frac{\tau}{f(\tau)-f(0)} = 0$, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ t.q. :

$$\tau \neq 0,\ |\tau| \leq \alpha \ \Rightarrow \ |\frac{\tau}{f(\tau) - f(0)}| \leq \varepsilon. \tag{3.6}$$

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $\alpha > 0$ satisfaisant (3.6). Comme $\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$, il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$x \neq 0,\ |x| \leq \alpha \ \Rightarrow \ f'(x) \geq \frac{1}{\varepsilon}. \tag{3.7}$$

Soit $\tau \neq 0$ t.q. $|\tau| \leq \alpha$. On applique le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle dont les bornes sont 0 et τ. Il donne l'existence de z strictement entre 0 et τ t.q. $f(\tau) - f(0) = \tau f'(z)$. On a donc $\frac{\tau}{f(\tau)-f(0)} = \frac{1}{f'(z)}$. Comme $f'(z) \geq \frac{1}{\varepsilon} > 0$ (grâce à (3.7) car $|z| \leq |\tau| \leq \alpha$), on a donc $0 < \frac{\tau}{f(\tau)-f(0)} \leq \varepsilon$.

ce qui donne :

$$|\frac{\tau}{f(\tau) - f(0)}| \leq \varepsilon.$$

On a donc trouvé $\alpha > 0$ satisfaisant (3.6). Ce qui prouve que g est dérivable en 1 et $g'(1) = 0$.

---

6. (Régularité de la fonction réciproque) Montrer que la fonction réciproque de f est de classe C^1 sur $]m, l[$ mais que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

corrigé

La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\star$ (mais pas sur $\mathbb{R}$ car f n'est pas dérivable en 0) et f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^\star$ (on a montré que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$). On en déduit que la fonction réciproque de f, notée g, est de classe C^1 sur $\{f(x),\ x \in \mathbb{R}^\star\}$, c'est-à-dire sur $]m, 1[\cup]1, l[$. Plus précisément, pour tout $y \in]m, 1[\cup]1, l[$, on a :

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

Comme g est continue sur $]m, l[$ et que f' est continue et non nulle sur $\mathbb{R}^\star$, on en déduit bien que g' est continue sur $]m, 1[\cup]1, l[$ (noter que $g(y) \neq 0$ si $y \neq 0$ car g est injective). Dans la question 6, on a montré que g est dérivable en 1 et que $g'(1) = 0$. Pour montrer que g est de classe C^1 sur $]m, l[$, il reste donc seulement à montrer que g' est continue en 1. Or, comme $\lim_{y\to 1} g(y) = g(1) = 0$, on a :

$$\lim_{y\to 1} g'(y) = \lim_{y\to 1} \frac{1}{f'(g(y))} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{f'(x)} = 0.$$

Ce qui prouve la continuité de g' en 1. On a bien, finalement, montré que g est de classe C^1 sur $]m, l[$.

Exercice 3.20 (Points fixes de f, si $f \circ f = f$)

Soit $-\infty < a < b < +\infty$ et f une fonction continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$. On rappelle que $x \in [a, b]$ est un point fixe de f si $f(x) = x$.

1. Montrer que f admet au moins un point fixe. [On pourra considérer la fonction g définie sur $[a, b]$ par $g(x) = f(x) - x$.]

corrigé

On remarque que $g(a) = f(a) - a \geq 0$ (car $f(a) \geq a$) et $g(b) = f(b) - b \leq 0$ (car $f(b) \leq b$). Comme g est continue sur $[a, b]$ et $g(a) \geq 0 \geq g(b)$, le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence de $c \in [a, b]$ t.q. $g(c) = 0$.

On suppose dans la suite que $f \circ f = f$. On pose $\mathrm{Im}(f) = \{f(x),\, x \in [a, b]\}$.

2. Montrer que tout élément de $\mathrm{Im}(f)$ est un point fixe de f.

corrigé

Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe $x \in [a, b]$ t.q. $y = f(x)$. On a donc $f(y) = f(f(x)) = f \circ f(x) = f(x) = y$. Ce qui prouve que y est un point fixe de f.

3. On suppose, dans cette question, que f admet un seul point fixe. Montrer que f est constante.

corrigé

Puisque f admet un seul point fixe, la question précédente donne que $\mathrm{Im}(f)$ ne peut contenir que un seul point. Ce qui prouve que f est constante.

On suppose dans la suite que f admet au moins 2 points fixes (disctints) et que f est dérivable (c'est-à-dire dérivable en tout point de $]a, b[$).

4. Montrer qu'il existe $m, M \in [a, b]$ t.q. $\mathrm{Im}(f) = [m, M]$ et $m < M$.

corrigé

L'image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue est encore un intervalle fermé borné. Il existe donc $m, M \in \mathbb{R}$ t.q. $m \leq M$ et $\mathrm{Im}(f) = [m, M]$. Comme f admet au moins 2 points fixes, $\mathrm{Im}(f)$ contient au moins deux points. Donc, $m < M$.

5. Montrer que $f'(x) = 1$ pour tout $x \in]m, M[$ (ici et dans la suite, m et M sont donnés par la question précédente).

corrigé

Pour tout $x \in]m, M[$, on a $f(x) = x$ (car $]m, M[\subset \mathrm{Im}(f)$). On a donc, pour tout $x \in]m, M[$, $f'(x) = 1$.

6. On suppose, dans cette question, que $m > a$.

   (a) Montrer que $f'(m) = 1$.

   corrigé

   On a $a < m < M \leq b$. La fonction f est donc dérivable en m. Pour $0 < h < M - m$, on a $f(m)$=m et $f(m+h) = m+h$ (car m et $(m+h)$ sont dans $\mathrm{Im}(f)$ et sont donc des points fixes de f). On a donc :
   $$\frac{f(m+h) - f(m)}{h} = 1.$$

On en déduit que :

$$f'(m) = \lim_{h\to 0} \frac{f(m+h)-f(m)}{h} = \lim_{h\to 0, h>0} \frac{f(m+h)-f(m)}{h} = 1.$$

(b) Montrer qu'il existe $x \in]a, m[$ t.q. $f(x) < m$.

corrigé

Comme f est dérivable en m et que $f'(m) = 1$, on a $f(x) = f(m) + (x-m) + (x-m)\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to m} \varepsilon(x) = 0$. Il existe donc $\eta > 0$ t.q. :

$$|x-m| \leq \eta \Rightarrow |\varepsilon(x)| < 1.$$

Pour $x \in [a, m[$ avec $m - x < \eta$ on a donc :

$$f(x) < f(m) + (x-m) + |x-m| = f(m).$$

(c) En déduire que l'hypothèse $m > a$ est en contradiction avec la définition de m.

corrigé

Si $m > a$, on vient de montrer l'existence de $x \in [a, b]$ t.q. $f(x) < f(m)$, ce qui impossible car $f(x) \in \mathrm{Im}(f) = [m, M]$ et $f(m) = m$ (car $m \in \mathrm{Im}(f)$ et donc m est un point fixe de f).

---

7. Montrer que $m = a$, $M = b$ et $f(x) = x$ pour tout $x \in [a, b]$.

corrigé

La question précédente donne $m \leq a$ et donc finalement $m = a$ (car $[m, M] = \mathrm{Im}(f) \subset [a, b]$). De manière analogue, on peut montrer que $M = b$. On a donc $\mathrm{Im}(f) = [a, b]$ et donc $f(x) = x$ pour tout $x \in [a, b]$.

---

8. Montrer que le résultat de la question précédente peut être faux si on retire l'hypothèse "f dérivable". [On cherche donc f continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$ t.q. $f \circ f = f$, f admet au moins deux points fixes distincts et il existe $x \in [a, b]$ t.q. $f(x) \neq x$.]

corrigé

On peut prendre, par exemple, $a = 0$, $b = 3$, $f(x) = 1$ si $0 \leq x < 1$, $f(x) = x$ si $1 \leq x \leq 2$, $f(x) = 2$ si $2 < x \leq 3$.

Exercice 3.21 (Calcul de limites)

Calculer $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{2x}}{x}$ et $\lim_{x\to 0, x>0} \frac{x}{(\ln(1+x))^2}$.

corrigé

$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$ car $|\frac{\sin(x)}{x}| \leq \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $fx) = e^x - e^{2x}$. La fonction f est dérivable en 0 et $f(0) = 0$. On en déduit $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{2x}}{x} = f'(0) = -1$.

Pour $x \in]-1, \infty[$,, on pose $g(x) = \ln(1+x)^2$. La fonction g est dérivable en 0 et $g(0) = 0$. On en déduit $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)^2}{x} = g'(0) = 0$. Comme $g(x) > 0$ quand $x > 0$, on a donc $\lim_{x\to 0, x>0} \frac{x}{(\ln(1+x))^2} = +\infty$.

Exercice 3.22 (Fonction sous linéaire)

Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et t.q. $f(0) = 0$. On définit la fonction g de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ (avec $\mathbb{R}_+ = [0, \infty[$) par :

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \text{ si } x > 0,$$

$$g(0) = f'(0).$$

1. Montrer que g est continue en tout point de $\mathbb{R}_+$.

—————————————**corrigé**—————————————

La fonction g est continue sur $]0, \infty[$ car c'est le quotient de deux fonctions continues et que son dénominateur ne s'annule par (sur $]0, \infty[$). On peut aussi noter que g est dérivable sur $]0, \infty[$

Comme f est dérivable en 0 et que $f(0) = 0$, On a $\lim_{x \to 0, x>0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$. La fonction g est donc continue en 0 (et donc continue sur tout $\mathbb{R}+ = [0, \infty[$).

———————————————————————————————

On suppose maintenant qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, t.q., pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leq \alpha x + \beta$.

2. Montrer que g est majorée (c'est-à-dire que l'ensemble $\{g(x),\ x \in \mathbb{R}_+\}$ est majoré)

—————————————**corrigé**—————————————

La fonction g est continue sur $[0, 1]$. La restriction de g à $[0, 1]$ est donc majorée (car $[0, 1]$ est fermé et borné). Il existe donc M t.q., pour tout $x \in [0, 1]$, $g(x) \leq M$.

Puis, pour $x > 1$, on remarque que $g(x) \leq \alpha + \frac{\beta}{x} \leq \alpha + |\beta|$. On a donc finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) \leq C = \max\{M, \alpha + |b|\}$, ce qui prouve que g est majorée.

———————————————————————————————

3. On suppose, dans cette question, que $\alpha < f'(0)$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $g(a) = \sup\{g(x),\ x \in \mathbb{R}_+\}$. Montrer que $g(a) = f'(a)$.

—————————————**corrigé**—————————————

On choisit $\varepsilon = f'(0) - \alpha > 0$, et on pose $A = \frac{|\beta|}{\varepsilon} \geq 0$. Pour $x \geq A$, on a donc $g(x) \leq \alpha + \frac{\beta}{x} \leq \alpha + \varepsilon = f'(0)$.

La fonction g est continue sur l'intervalle fermé borné $[0, A]$, il existe donc $a \in [0, A] \subset \mathbb{R}_+$ t.q. $g(a) = \sup\{g(x),\ x \in [0, A]\}$. Mais, comme $\sup\{g(x),\ x \in [0, A]\} \geq g(0) = f'(0)$ et que pour $x > A$ on a $g(x) \leq f'(0)$, on a donc $g(a) = \sup\{g(x),\ x \in \mathbb{R}_+\}$.

Si $a = 0$, on a bien $g(a) = f'(a)$. Si $a > 0$, le fait que $g(a) = \sup\{g(x),\ x \in \mathbb{R}_+\}$ et que g soit dérivable en a permet de montrer que $g'(a) = 0$ (comme dans la démonstration du théorème des accroissements finis). Comme $xg(x) = f(x)$ pour tout $x > 0$, on a $g(x) + xg'(x) = f'(x)$ pour tout $x > 0$ et donc $g(a) = f'(a)$.

———————————————————————————————

4. On suppose, dans cette question, que $f(x) = x - \frac{x^3}{1+x^2}$.

   (a) La fonction f vérifie-t-elle les hypothèses données au début de l'exercice ?

   —————————————**corrigé**—————————————

   Oui... f est dérivable et $f(0) = 0$.

   ———————————————————————————————

(b) Donner des valeurs de α et β pour lesquelles, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leq \alpha x + \beta$.

corrigé

Comme $\frac{x^3}{1+x^2} \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, les valeurs suivantes conviennent : $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

(c) Montrer qu'il existe un unique $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $g(a) = \sup\{g(x),\, x \in \mathbb{R}_+\}$ et donner cette valeur de a.

corrigé

On a $g(x) < 1$, pour tout $x \in]0, \infty[$, et $g(0) = 1$. Il existe donc un unique $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $g(a) = \sup\{g(x),\, x \in \mathbb{R}_+\}(= 1)$ et $a = 0$.

5. On suppose, dans cette question, que $\alpha = f'(0)$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $g(a) = \sup\{g(x),\, x \in \mathbb{R}_+\}$ et que $g(a) = f'(a)$.

corrigé

On pose $\gamma = \sup\{g(x),\, x \in \mathbb{R}_+\}$. On a $\gamma \geq g(0) = f'(0)$ et donc distingue deux cas ;

Premier cas : $\gamma = f'(0)$. Dans ce cas, $a = 0$ convient car $g(0) = f'(0) = \gamma$.

Deuxième cas : $\gamma > f'(0)$.

On choisit alors $\varepsilon = \frac{\gamma - f'(0)}{2} > 0$, et on pose $A = \frac{|\beta|}{\varepsilon} \geq 0$. Pour $x \geq A$, on a donc $g(x) \leq \alpha + \frac{\beta}{x} \leq \alpha + \varepsilon = f'(0) + \varepsilon = \frac{\gamma + f'(0)}{2} < \gamma$. On a donc $\sup\{g(x),\, x \in [A, \infty[\} < \gamma$ et donc :

$$\gamma = \sup\{g(x), x \in \mathbb{R}_+\} = \sup\{g(x), x \in [0, A]\}.$$

La fonction g est continue sur l'intervalle fermé borné $[0, A]$, il existe donc $a \in [0, A] \subset \mathbb{R}_+$ t.q. $g(a) = \sup\{g(x),\, x \in [0, A]\}$. Ce qui donne bien $g(a) = \gamma$.

La démonstration de $g(a) = f'(a)$ est identique à celle de la question 3.

6. Montrer, en donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenable f) qu'il peut ne pas exister $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $g(a) = \sup\{g(x),\, x \in \mathbb{R}_+\}$ (pour cet exemple, on aura donc nécessairement $\alpha > f'(0)$).

corrigé

On peut prendre, par exemple, f définie par $f(x) = x + \frac{x^3}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a bien f dérivable, $f(0) = 0$. Comme $\frac{x^2}{1+x^2} < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, les valeurs $\alpha = 2$ et $\beta = 0$ conviennent et on a $g(x) < 2$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Enfin, on a $\lim_{x\to\infty} g(x) = 2$. on en déduit que $\sup\{g(x),\, x \in \mathbb{R}_+\}$ =2 et qu'il n'existe pas d'élément a de $\mathbb{R}_+$ t.q. $g(a) = \sup\{g(x),\, x \in \mathbb{R}_+\}$.

Exercice 3.23 (TAF...)

Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable pour tout $x \neq 0$ et que $\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$.

1. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

corrigé

On va montrer que $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \infty$ (ce qui prouve que f n'est pas dérivable en 0), c'est-à-dire que pour tout $M \in \mathbb{R}$ il existe $\alpha > 0$ t.q. :

$$h \neq 0,\ |h| \leq \alpha \ \Rightarrow\ \frac{f(h) - f(0)}{h} \geq M. \tag{3.8}$$

Soit donc $M \in \mathbb{R}$. Comme $\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$. il existe $\alpha > 0$ t.q. :

$$x \neq 0,\ |x| \leq \alpha \Rightarrow f'(x) \geq M. \tag{3.9}$$

Soit maintenant $h \neq 0$ avec $|h| \leq \alpha$, le théorème des accroissements finis (théorème 3.2) donne l'existence de $c \in]\min(0,h), \max(0,h)[$ t.q. :

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(c).$$

Comme $|h| \leq \alpha$, on a $c \in]-\alpha, \alpha[$ et, comme $c \neq 0$, (3.9) donne $f'(c) \geq M$, on a donc $\frac{f(h)-f(0)}{h} \geq M$.

On a bien ainsi montré que pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $\alpha > 0$ vérifiant (3.8). Ceci montre que $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = +\infty$ et donc que f n'est pas dérivable en 0.

---

2. On suppose maintenant que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, strictement croissante et que $f(0) = 0$. On note g la fonction réciproque de f [l'existence de la function g a été vue en cours]. Montrer que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = 0$.

corrigé

On reprend ici essentiellement la démonstration faite en cours pour montrer la dérivabilité d'une fonction réciproque.

On veut montrer que $\lim_{h\to 0} \frac{g(h)-g(0)}{h} = 0$, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\beta > 0$ t.q. :

$$h \neq 0,\ |h| \leq \beta \Rightarrow |\frac{g(h) - g(0)}{h}| \leq \varepsilon. \tag{3.10}$$

Soit $h \neq 0$. Comme $f \circ g(h) = h$, $f(0) = 0$ et $g(0) = 0$ (noter que $g(h) \neq 0$ car $h \neq 0$ et g injective), on a :

$$\frac{g(h) - g(0)}{h} = \frac{g(h)}{f(g(h)) - f(0)}.$$

Le théorème des accroissements finis donne l'existence de $d \in]\min(0, g(h)), \max(0, g(h))[$ t.q. :

$$f(g(h)) - f(0) = g(h)f'(d)$$

(bien sûr, le point d dépend de h). On a donc :

$$\frac{g(h) - g(0)}{h} = \frac{1}{f'(d)}. \tag{3.11}$$

Cette égalité, avec (3.9) et la continuité de g (qui a été vue en cours) nous suggère le choix de β, à partir de ε, pour avoir (3.10). En effet, soit $\varepsilon > 0$. On choisit $M = 1/\varepsilon$. Il existe alors $\alpha > 0$ vérifiant (3.9). Mais, comme g est continue en 0, il existe $\beta > 0$ t.q. :

$$y \in \mathbb{R},\ |y| \leq \beta \Rightarrow |g(y)| \leq \alpha.$$

Si $|h| \leq \beta$, on a donc $|g(h)| \leq \alpha$. Ce qui donne $d \in] - \alpha, \alpha[$ et donc (comme on a aussi $d \neq 0$), $f'(d) \geq M = 1/\varepsilon > 0$. Finalement, on obtient avec (3.11),

$$|\frac{g(h) - g(0)}{h}| = \frac{g(h) - g(0)}{h} \leq \varepsilon.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ on a donc trouvé β vérifiant (3.10). Ce qui prouve que g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

Exercice 3.24

Etudier l'existence et la valeur d'une limite éventuelle en x_0 pour les fonctions suivantes.

- $f_1(x) = \frac{x+|x|}{x}$, pour $x \neq 0$, et $x_0 = 0$,
- $f_2(x) = (\frac{\pi}{2} - x)\tan x$, pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[$, et $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

corrigé

La limite à gauche de f_1 en 0 est 0 et la limite à droite est 2. Donc, f n'a pas de limite en 0

pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[$, on a :

$$f_2(x) = \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos(x) - \cos(\frac{\pi}{2})} \sin(x).$$

Comme $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)-\cos(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}} = -\sin(\frac{\pi}{2}) = -1$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, on en déduit :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f_2(x) = 1.$$

Exercice 3.25

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes. Monter qu'elles sont dérivables et donner une expression de leur dérivée.

- $f_1(x) = x^{\frac{1}{x}}$,
- $f_2(x) = \ln(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)})$.

corrigé

La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ et est dérivable comme composée de fonctions dérivables. Comme $f_1(x) = e^{\ln(x)/x}$, on a, pour tout $x > 0$:

$$f_1'(x) = \frac{1}{x^2}(1 - \ln(x))x^{\frac{1}{x}}.$$

La fonction f_2 est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Elle est dérivable comme composée de fonctions dérivables et on trouve, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, $f_2'(x) = \frac{2}{\cos(x)}$.

Exercice 3.26

En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que $1 < \frac{e^x-1}{x} < e^x$, pour tout $x > 0$.

corrigé

Soit $x > 0$. Comme la fonction $y \mapsto e^y$ est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$, le théorème des accroissements finis donne l'existence de $c \in]0, x[$ t.q. $e^x - e^0 = xe^c$. On a donc :

$$\frac{e^x - 1}{x} = e^c.$$

Comme la fonction $y \mapsto e^y$ est strictement croissante, on a $1 = e^0 < e^c < e^x$ (car $0 < c < x$) et donc :

$$1 < \frac{e^x - 1}{x} < e^x.$$
