Exercice 1

1. $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est continue lorsque $\forall x_0 \in \mathbb{R}_+, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}_+, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
2. Si $0 \leq x < y$, $(\sqrt{y} - \sqrt{x})(\sqrt{y} + \sqrt{x}) = (\sqrt{y})^2 - (\sqrt{x})^2 = y - x$, d'où le résultat, en divisant les deux membres par $(\sqrt{y} + \sqrt{x})$, qui est non nul, comme somme de deux termes positifs dont l'un au moins est strictement positif.
3. Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$ et soit $\varepsilon > 0$. Cherchons $\alpha > 0$, tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon$.
   D'après ce qui précède, il suffirait d'avoir $\dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}|x - x_0| < \varepsilon$.
   Or si $\underline{x_0 \neq 0}$, la quantité $\dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$ peut-être majorée par $\dfrac{1}{\sqrt{x_0}}$, donc il suffit que $\dfrac{1}{\sqrt{x_0}}|x - x_0| < \varepsilon$.

   Posons dans ce cas $\alpha = \varepsilon\sqrt{x_0}$.
   On a bien $|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}|x - x_0| < \dfrac{1}{\sqrt{x_0}}|x - x_0| < \varepsilon$.

   Maintenant, si $\underline{x_0 = 0}$, on cherche $\alpha > 0$, tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+, x < \alpha \Rightarrow \sqrt{x} < \varepsilon$. Il suffit de poser cette fois-ci $\alpha = \varepsilon^2$.

Exercice 2

1. Pour x différent de 2, on a $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = x - 1$ donc $\lim\limits_{x \mapsto 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim\limits_{x \mapsto 2}(x - 1) = 1$.
2. Quand x tend vers l'infini, $1/x$ tend vers 0, de même que a/x et b/x, donc $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin(a/x)}{(a/x)} = 1 = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin(b/x)}{(b/x)}$, d'où en écrivant $\dfrac{\sin(a/x)}{\sin(b/x)} = (\dfrac{a}{b})\dfrac{\sin(a/x)}{(a/x)}\dfrac{(b/x)}{\sin(b/x)}$, on obtient $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin(a/x)}{\sin(b/x)} = \dfrac{a}{b}$.
3. Considérons les deux suites $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$ et $y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \pi/2}$; on remarque que $\left(\sin(\dfrac{1}{x_n})\right)_n$ converge vers 0, puisqu'elle est constante égale à 0, et $\left(\sin(\dfrac{1}{y_n})\right)_n$ converge vers 1, puisque constante égale à 1.
   Par conséquent, si $x \mapsto \sin(1/x)$ avait une limite ℓ en 0, en vertu du théorème de caractérisation séquentielle des fonctions continues, les deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ convergeant toutes les deux vers 0, leur image par f devrait avoir comme limite commune précisément ℓ. Ce qui est faux, d'où $\lim\limits_{x\mapsto 0} \sin(1/x)$ n'existe pas.

Exercice 3

1. La fonction sinus étant dérivable en 0, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ est égale à $\cos(0)$, c'est-à-dire 1.
   La fonction sinus étant bornée sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$ est égale à 0, puisque $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0, quand x tend vers l'infini.
2. Par conséquent, la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ étant continue sur $]0, +\infty[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle passe par $\dfrac{1}{2}$ qui est entre 0 et 1. Ce qui signifie que l'équation proposée a au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

   Plaçons-nous maintenant sur $\mathbb{R}^*$, puisque de toutes façons, 0 ne peut pas être solution.
   L'équation peut s'écrire de manière équivalente : $\sin x - \dfrac{x}{2} = 0$. Il est clair qu'en dehors de $[-2, 2]$, il n'y a pas de solution, puisque sinus est bornée par -1 et 1.
   Etudions donc la fonction $g : x \mapsto \sin x - \dfrac{x}{2}$, qui est manifestement **paire**, sur $]0, \frac{2\pi}{3}]$; elle est dérivable, de dérivée : $x \mapsto \cos x - \frac{1}{2}$, donc croissante sur $]0, \frac{\pi}{3}]$ et décroissante sur $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$.

   $g(\frac{\pi}{3}) > 0$ et $g(\frac{2\pi}{3}) < 0$, donc g continue sur $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ prend la valeur 0 entre ses deux valeurs $g(\frac{\pi}{3}) > 0$ et $g(\frac{2\pi}{3}) < 0$, une et une seule fois, car elle est strictement monotone sur cet intervalle (donc injective). Et sur $]0, \frac{\pi}{3}]$, la stricte croissance de g l'empêche de s'annuler , puisqu'elle a comme limite 0 en 0.

   Finalement, g s'annule une seule fois sur $]0, 2]$, et par parité, on obtient qu'elle s'annule une seule fois sur $[-2, 0[$. Conclusion, l'équation a exactement deux solutions sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^*$).

Exercice 4 (équation fonctionnelle)

1. **(a)** Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $e^{-(x+y)^2}e^{-(x-y)^2} = e^{-(x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2)} = e^{-2(x^2+y^2)} = (e^{-(x^2+y^2)})^2 = (e^{-x^2}e^{-y^2})^2$.

   (b) φ est paire puisque pour tout x réel, $e^{-(-x)^2} = e^{-(x^2)}$.

   Elle est continue comme composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, que sont l'exponentielle et la fonction polynôme $x \mapsto -x^2$.

   φ est de plus strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, car composée de la fonction décroissante sur $[0, +\infty[$: $x \mapsto -x^2$ (en effet si $\underline{0 < x < y}$, alors $x^2 < y^2$, et donc $-x^2 > -y^2$) et de l'exponentielle qui est croissante sur $\mathbb{R}$ donc aussi sur $[0, +\infty[$.

   (c) D'après le théorème de la bijection, φ étant continue et strictement monotone sur $[0, +\infty[$, elle est bijective de $[0, +\infty[$ dans $]\lim\limits_{+\infty} \varphi; \varphi(0)] = I =]0, 1]$ (les bornes ont été inversées en raison de la décroissance de φ).
   Résolvons l'équation $y = \varphi(x)$ d'inconnue x pour obtenir l'expression analytique de φ^{-1} :
   Soit $y \in I =]0, 1]$; $y = e^{-x^2} \Leftrightarrow \ln y = -x^2 \Leftrightarrow x^2 = -(\ln y) \Leftrightarrow x = \sqrt{-\ln y}$, car $x > 0$. Conclusion $\varphi^{-1}(y) = \sqrt{-\ln y}$.

2. **(a)** (E_1) est l'équation : $f(x)f(x) = (f(x)f(0))^2$.

   En faisant $x = 0$ dans (E_1) on obtient : $(f(0)^2 = (f(0))^4$, ce qui s'écrit : $f(0)^2(1 - f(0)^2) = 0$, d'où $f(0) = 0$ ou $f(0)^2 = 1$, par conséquent les trois seules valeurs possibles pour $f(0)$ sont : $0, -1, 1$.

   (b) (E_2) est l'équation : $f(2x)f(0) = f(x)^4$.

   Si $f(0) = 0$, alors $f(x)^4 = 0$, donc $f(x) = 0$, et ceci, pour tout x réel, ce qui signifie que f est la fonction nulle.

   (c) On suppose que $f(0) \neq 0$ et que x_0 est tel que $f(x_0) = 0$.
   D'après (E_2), et (a), on a pour tout x réel, $f(2x) = \pm f(x)^4$, soit $f(x) = \pm f\left(\frac{x}{2}\right)^4$. Donc, puisque $f(x_0) = 0$, on en déduit que $f\left(\frac{x_0}{2}\right) = 0$. Par récurrence, on prouve que $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = 0$, pour tout entier n.
   On a alors la contradiction suivante : f est continue, la suite $\left(\frac{x_0}{2^n}\right)_n$ converge de manière évidente vers 0, donc d'après le critère séquentiel de continuité, la suite $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)_n$ devrait converger vers $f(0)$. Cette dernière étant la suite nulle, on devrait avoir $f(0) = 0$!

   Donc les hypothèses de départ sont erronées, c'est-à-dire que : soit $f(0) = 0$, auquel cas on a prouvé au (b) que f est nulle, soit $f(0) \neq 0$, et alors il ne peut pas exister de nombre x_0 qui annule f. Par conséquent, **si f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$, alors f est identiquement nulle**.

   (d) Si f **continue** vérifie (E), alors soit f est nulle, soit f ne s'annule jamais, d'où il ne se peut pas que f prenne au moins **une** valeur **strictement positive** et au moins **une** valeur **strictement négative**, car alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle devrait s'annuler au moins une fois sans être identiquement nulle.

   (e) En faisant $x = 0$ dans (E), on a $f(y)f(-y) = (f(0)f(y))^2$, pour tout y réel.

   Suivant les valeurs de $f(0)$, on aura : si $f(0) = 0$, alors f est nulle, donc paire ;

   si $f(0) = \pm 1$, $f(y)f(-y) = f(y)^2$, d'où puisque f ne s'annule jamais, $f(-y) = f(y)$, ceci pour tout y réel.

   Donc f est paire nécesairement.