

3.5 Algorithmes d'optimisation sous contraintes

3.5.1 Méthodes de gradient avec projection

On rappelle le résultat suivant de projection sur un convexe fermé :

Proposition 3.40 (Projection sur un convexe fermé). *Soit E un espace de Hilbert, muni d'une norme $\|\cdot\|$ induite par un produit scalaire $(\cdot, \cdot)$, et soit K un convexe fermé non vide de E . Alors, tout $x \in E$, il existe un unique $x_0 \in K$ tel que $\|x - x_0\| \leq \|x - y\|$ pour tout $y \in K$. On note $x_0 = p_K(x)$ la projection orthogonale de x sur K . Soient $x \in E$ et $x_0 \in K$. On a également :*

$$x_0 = p_K(x) \text{ si et seulement si } (x - x_0, x_0 - y) \geq 0, \quad \forall y \in K.$$

Dans le cadre des algorithmes de minimisation avec contraintes que nous allons développer maintenant, nous considérerons $E = \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ une fonction convexe, et K fermé convexe non vide. On cherche à calculer une solution approchée de $\bar{x}$, solution du problème (3.48).

Algorithme du gradient à pas fixe avec projection sur K (GPFK) Soit $\rho > 0$ donné, on considère l'algorithme suivant :

Algorithme (GPFK)

Initialisation : $x_0 \in K$

Itération :

$$x_k \text{ connu} \quad x_{k+1} = p_K(x_k - \rho \nabla f(x_k))$$

où p_K est la projection sur K définie par la proposition 3.40.

Lemme 3.41. *Soit $(x_k)_k$ construite par l'algorithme (GPFK). On suppose que $x_k \rightarrow x$ quand $n \rightarrow \infty$. Alors x est solution de (3.48).*

DÉMONSTRATION – Soit $p_K : \mathbb{R}^n \rightarrow K \subset \mathbb{R}^n$ la projection sur K définie par la proposition 3.40. Alors p_K est continue. Donc si

$x_k \rightarrow x$ quand $n \rightarrow +\infty$ alors $x = p_K(x - \rho \nabla f(x))$ et $x \in K$ (car $x_k \in K$ et K est fermé).

La caractérisation de $p_K(x - \rho \nabla f(x))$ donnée dans la proposition 3.40 donne alors :

$(x - \rho \nabla f(x) - x/x - y) \geq 0$ pour tout $y \in K$, et comme $\rho > 0$, ceci entraîne $(\nabla f(x)/x - y) \leq 0$ pour tout $y \in K$. Or f est convexe donc $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)(y - x)$ pour tout $y \in K$, et donc $f(y) \geq f(x)$ pour tout $y \in K$, ce qui termine la démonstration. ■

Théorème 3.42 (Convergence de l'algorithme GPFK).

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, et K convexe fermé non vide. On suppose que :

1. *il existe $\alpha > 0$ tel que $(\nabla f(x) - \nabla f(y)|x - y) \geq \alpha|x - y|^2$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,*
2. *il existe $M > 0$ tel que $|\nabla f(x) - \nabla f(y)| \leq M|x - y|$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,*

alors :

1. *il existe un unique élément $\bar{x} \in K$ solution de (3.48),*
2. *si $0 < \rho < \frac{2\alpha}{M^2}$, la suite (x_k) définie par l'algorithme (GPFK) converge vers $\bar{x}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.*

DÉMONSTRATION –

1. La condition 1. donne que f est strictement convexe et que $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $|x| \rightarrow +\infty$. Comme K est convexe fermé non vide, il existe donc un unique $\bar{x}$ solution de (3.48).
2. On pose, pour $x \in \mathbb{R}^n$, $h(x) = p_K(x - \rho \nabla f(x))$. On a donc $x_{k+1} = h(x_k)$. Pour montrer que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge, il suffit donc de montrer que h est strictement contractante dès que

$$0 < \rho < \frac{2\alpha}{M^2}. \quad (3.61)$$

Grâce au lemme 3.43 démontré plus loin, on sait que p_K est contractante. Or h est définie par :

$$h(x) = p_K(\bar{h}(x)) \quad \text{où } \bar{h}(x) = x - \rho \nabla f(x).$$

On a déjà vu que $\bar{h}$ est strictement contractante si la condition (3.61) est vérifiée (voir théorème 3.19 page 226), et plus précisément :

$$|\bar{h}(x) - \bar{h}(y)| \leq (1 - 2\alpha\rho + M^2\rho^2)|x - y|^2.$$

On en déduit que :

$$|h(x) - h(y)|^2 \leq |p_K(\bar{h}(x)) - p_K(\bar{h}(y))|^2 \leq |\bar{h}(x) - \bar{h}(y)|^2 \leq (1 - 2\alpha\rho + \rho^2 M^2)|x - y|^2.$$

L'application h est donc strictement contractante dès que $0 < \frac{2\alpha}{M^2}$. La suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge donc bien vers $x = \bar{x}$ ■

Lemme 3.43 (Propriété de contraction de la projection orthogonale). *Soit E un espace de Hilbert, $\|\cdot\|$ la norme et $(\cdot, \cdot)$ le produit scalaire, K un convexe fermé non vide de E et p_K la projection orthogonale sur K définie par la proposition 3.40, alors $\|p_K(x) - p_K(y)\| \leq \|x - y\|$ pour tout $(x, y) \in E^2$.*

DÉMONSTRATION – Comme E est un espace de Hilbert,

$$\|p_K(x) - p_K(y)\|^2 = (p_K(x) - p_K(y) | p_K(x) - p_K(y)).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \|p_K(x) - p_K(y)\|^2 &= (p_K(x) - x + x - y + y - p_K(y) | p_K(x) - p_K(y)) \\ &= (p_K(x) - x | p_K(x) - p_K(y))_E + (x - y | p_K(x) - p_K(y)) + \\ &\quad (y - p_K(y) | p_K(x) - p_K(y)). \end{aligned}$$

Or $(p_K(x) - x | p_K(x) - p_K(y)) \leq 0$ et $(y - p_K(y) | p_K(x) - p_K(y)) \leq 0$, d'où :

$$\|p_K(x) - p_K(y)\|^2 \leq (x - y | p_K(x) - p_K(y)),$$

et donc, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|p_K(x) - p_K(y)\|^2 \leq \|x - y\| \|p_K(x) - p_K(y)\|,$$

ce qui permet de conclure. ■

Algorithme du gradient à pas optimal avec projection sur K (GPOK)

L'algorithme du gradient à pas optimal avec projection sur K s'écrit :

Initialisation $x_0 \in K$

Itération x_k connu

$w_k = -\nabla f(x_k)$; calculer α_k optimal dans la direction w_k

$x_{k+1} = p_K(x_k + \alpha_k w^{(k)})$

La démonstration de convergence de cet algorithme se déduit de celle de l'algorithme à pas fixe.

Remarque 3.44. On pourrait aussi utiliser un algorithme de type Quasi-Newton avec projection sur K .

Les algorithmes de projection sont simples à décrire, mais ils soulèvent deux questions :

1. Comment calcule-t-on p_K ?
2. Que faire si K n'est pas convexe ?

On peut donner une réponse à la première question dans les cas simples :

Cas 1. On suppose ici que $K = C^+ = \{x \in \mathbb{R}^n, x = (x_1, \dots, x_k)^t, x_i \geq 0 \forall i\}$.

Si $y \in \mathbb{R}^n$ $y = (y_1 \dots y_n)^t$, on peut montrer (exercice 132 page 267) que

$$(p_K(y))_i = y_i^+ = \max(y_i, 0), \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Cas 2. Soit $(\alpha_i)_{i=1, \dots, n} \subset \mathbb{R}^n$ et $(\beta_i)_{i=1, \dots, n} \subset \mathbb{R}^n$ tels que $\alpha_i \leq \beta_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Si

$$K = \prod_{i=1, n} [\alpha_i, \beta_i],$$

alors

$$(p_K(y))_i = \max(\alpha_i, \min(y_i, \beta_i)), \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Dans le cas d'un convexe K plus "compliqué", ou dans le cas où K n'est pas convexe, on peut utiliser des méthodes de dualité introduites dans le paragraphe suivant.

3.5.2 Méthodes de dualité

Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \\ g_i \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \\ K = \{x \in \mathbb{R}^n, g_i(x) \leq 0 \ i = 1, \dots, p\}, \text{ et } K \text{ est non vide.} \end{cases} \quad (3.62)$$

On définit un problème "primal" comme étant le problème de minimisation d'origine, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \bar{x} \in K, \\ f(\bar{x}) \leq f(x), \text{ pour tout } x \in K, \end{cases} \quad (3.63)$$

On définit le "lagrangien" comme étant la fonction L définie de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda \cdot g(x) = f(x) + \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i(x), \quad (3.64)$$

avec $g(x) = (g_1(x), \dots, g_p(x))^t$ et $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)^t$.

On note C^+ l'ensemble défini par

$$C^+ = \{\lambda \in \mathbb{R}^p, \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)^t, \lambda_i \geq 0 \text{ pour tout } i = 1, \dots, p\}.$$

Remarque 3.45. Le théorème de Kuhn-Tucker entraîne que si $\bar{x}$ est solution du problème primal (3.63) alors il existe $\lambda \in C^+$ tel que $D_1 L(\bar{x}, \lambda) = 0$ (c'est-à-dire $Df(\bar{x}) + \lambda \cdot Dg(\bar{x}) = 0$) et $\lambda \cdot g(\bar{x}) = 0$.

On définit alors l'application M de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$M(\lambda) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda), \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R}^p. \quad (3.65)$$

On peut donc remarquer que $M(\lambda)$ réalise le minimum (en x) du problème sans contrainte, qui s'écrit, pour $\lambda \in \mathbb{R}^p$ fixé :

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R}^n \\ L(x, \lambda) \leq L(y, \lambda) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (3.66)$$

Lemme 3.46. *L'application M de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ définie par (3.65) est concave (ou encore l'application $-M$ est convexe), c'est-à-dire que pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^p$ et pour tout $t \in]0, 1[$ on a $M(t\lambda + (1-t)\mu) \geq tM(\lambda) + (1-t)M(\mu)$.*

DÉMONSTRATION – Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^p$ et $t \in]0, 1[$; on veut montrer que $M(t\lambda + (1-t)\mu) \geq tM(\lambda) + (1-t)M(\mu)$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, alors :

$$\begin{aligned} L(x, t\lambda + (1-t)\mu) &= f(x) + (t\lambda + (1-t)\mu)g(x) \\ &= tf(x) + (1-t)f(x) + (t\lambda + (1-t)\mu)g(x). \end{aligned}$$

On a donc $L(x, t\lambda + (1-t)\mu) = tL(x, \lambda) + (1-t)L(x, \mu)$. Par définition de M , on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$L(x, t\lambda + (1-t)\mu) \geq tM(\lambda) + (1-t)M(\mu)$$

Or, toujours par définition de M ,

$$M(t\lambda + (1-t)\mu) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, t\lambda + (1-t)\mu) \geq tM(\lambda) + (1-t)M(\mu).$$

■

On considère maintenant le problème d'optimisation dit "dual" suivant :

$$\begin{cases} \mu \in C^+, \\ M(\mu) \geq M(\lambda) \quad \forall \lambda \in C^+. \end{cases} \quad (3.67)$$

Définition 3.47. Soit $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ et $(x, \mu) \in \mathbb{R}^n \times C^+$. On dit que (x, μ) est un point selle de L sur $\mathbb{R}^n \times C^+$ si

$$L(x, \mu) \leq L(x, \mu) \leq L(y, \mu) \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}^n \text{ et pour tout } \lambda \in C^+.$$

Proposition 3.48. Sous les hypothèses (3.62), soit L définie par $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$ et $(\bar{x}, \mu) \in \mathbb{R}^n \times C^+$ un point selle de L sur $\mathbb{R}^n \times C^+$.

alors

1. $\bar{x}$ est solution du problème (3.63),
2. μ est solution de (3.67),
3. $\bar{x}$ est solution du problème (3.66) avec $\lambda = \mu$.

On admettra cette proposition.

Réciproquement, on peut montrer que (sous des hypothèses convenables sur f et g), si μ est solution de (3.67), et si $\bar{x}$ solution de (3.66) avec $\lambda = \mu$, alors $(\bar{x}, \mu)$ est un point selle de L , et donc $\bar{x}$ est solution de (3.63).

De ces résultats découle l'idée de base des méthodes de dualité : on cherche μ solution de (3.67). On obtient ensuite une solution $\bar{x}$ du problème (3.63), en cherchant $\bar{x}$ comme solution du problème (3.66) avec $\lambda = \mu$ (qui est un problème de minimisation sans contraintes). La recherche de la solution μ du problème dual (3.67) peut se faire par exemple par l'algorithme très classique d'Uzawa, que nous décrivons maintenant.

Algorithme d'Uzawa L'algorithme d'Uzawa consiste à utiliser l'algorithme du gradient à pas fixe avec projection (qu'on a appelé "GPFK", voir page 271) pour résoudre de manière itérative le problème dual (3.67). On cherche donc $\mu \in C^+$ tel que $M(\mu) \geq M(\lambda)$ pour tout $\lambda \in C^+$. On se donne $\rho > 0$, et on note p_{C^+} la projection sur le convexe C^+ (voir proposition 3.40 page 271). L'algorithme (GPFK) pour la recherche de μ s'écrit donc :

Initialisation : $\mu_0 \in C_+$

Itération : $\mu_{k+1} = p_{C^+}(\mu_k + \rho \nabla M(\mu_k))$

Pour définir complètement l'algorithme d'Uzawa, il reste à préciser les points suivants :

1. Calcul de $\nabla M(\mu_k)$,
2. calcul de $p_{C^+}(\lambda)$ pour λ dans $\mathbb{R}^n$.

On peut également s'intéresser aux propriétés de convergence de l'algorithme.

La réponse au point 2 est simple (voir exercice 132 page 267) : pour $\lambda \in \mathbb{R}^p$, on calcule $p_{C^+}(\lambda) = \gamma$ avec $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_p)^t$ en posant $\gamma_i = \max(0, \lambda_i)$ pour $i = 1, \dots, p$, où $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)^t$.

La réponse au point 1. est une conséquence de la proposition suivante (qu'on admettra ici) :

Proposition 3.49. *Sous les hypothèses (3.62), on suppose que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^n$, le problème (3.66) admet une solution unique, notée x_λ et on suppose que l'application définie de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ par $\lambda \mapsto x_\lambda$ est différentiable. Alors $M(\lambda) = L(x_\lambda, \lambda)$, M est différentiable en λ pour tout λ , et $\nabla M(\lambda) = g(x_\lambda)$.*

En conséquence, pour calculer $\nabla M(\lambda)$, on est ramené à chercher x_λ solution du problème de minimisation sans contrainte (3.66). On peut donc maintenant donner le détail de l'itération générale de l'algorithme d'Uzawa :

Itération de l'algorithme d'Uzawa. Soit $\mu_k \in C^+$ connu ;

1. On cherche $x_k \in \mathbb{R}^n$ solution de $\begin{cases} x_k \in \mathbb{R}^n, \\ L(x_k, \mu_k) \leq L(x, \mu_k), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$ (On a donc $x_k = x_{\mu_k}$)
2. On calcule $\nabla M(\mu_k) = g(x_k)$
3. $\bar{\mu}_{k+1} = \mu_k + \rho \nabla M(\mu_k) = \mu_k + \rho g(x_k) = ((\bar{\mu}_{k+1})_1, \dots, (\bar{\mu}_{k+1})_p)^t$
4. $\mu_{k+1} = p_{C^+}(\bar{\mu}_{k+1})$, c'est-à-dire $\mu_{k+1} = ((\mu_{k+1})_1, \dots, (\mu_{k+1})_p)^t$ avec $(\mu_{k+1})_i = \max(0, (\bar{\mu}_{k+1})_i)$ pour tout $i = 1, \dots, p$.

On a alors le résultat suivant de convergence de l'algorithme :

Proposition 3.50 (Convergence de l'algorithme d'Uzawa). *Sous les hypothèses (3.62), on suppose de plus que :*

1. *il existe $\alpha > 0$ tel que $(\nabla f(x) - \nabla f(y)) \cdot (x - y) \geq \alpha |x - y|^2$ pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$,*
2. *il existe $M_f > 0$ $|\nabla f(x) - \nabla f(y)| \leq M_f |x - y|$ pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$,*
3. *pour tout $\lambda \in C^+$, il existe un unique $x_\lambda \in \mathbb{R}^n$ tel que $L(x_\lambda, \lambda) \leq L(x, \lambda)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.*

Alors si $0 < \rho < \frac{2\alpha}{M_f^2}$, la suite $((x_k, \mu_k))_k \in \mathbb{R}^n \times C^+$ donnée par l'algorithme d'Uzawa vérifie :

1. $x_k \rightarrow \bar{x}$ quand $k \rightarrow +\infty$, où $\bar{x}$ est la solution du problème (3.63),
2. $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Remarque 3.51 (Sur l'algorithme d'Uzawa).

1. *L'algorithme est très efficace si les contraintes sont affines : (i.e. si $g_i(x) = \alpha_i \cdot x + \beta_i$ pour tout $i = 1, \dots, p$, avec $\alpha_i \in \mathbb{R}^n$ et $\beta_i \in \mathbb{R}$).*
2. *Pour avoir l'hypothèse 3 du théorème, il suffit que les fonctions g_i soient convexes. (On a dans ce cas existence et unicité de la solution x_λ du problème (3.66) et existence et unicité de la solution $\bar{x}$ du problème (3.63).)*