C3, Normes, conditionnement

1. Normes induites sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
2. Conditionnement d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Le conditionnement d'une matrice est lié à la sensibilité de la méthode de résolution de $Ax = b$ par rapport aux données (c'est-à-dire A et b)
3. Normes induites et conditionnement sont aussi utilisés pour l'étude des méhodes itératives (Cours 4)

Exemple de normes sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Rappel:
E e.v. réel, une norme est application de E dans $\mathbb{R}_+$, $u \mapsto \|u\|$ t.q.

1. $\|u\| > 0$ si $u \in E$, $u \neq 0$ ("définie")
2. $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$ si $u \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (positivement homogène)
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ si u, $v \in E$ (inégalité triangulaire)

Rappel : Si E est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes

Exemples de normes sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
$A = (a_{i,j})_{i \in \{1,\dots,n\}, j \in \{1,\dots,p\}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

1. "norme du sup", $\|A\| = \sup_{i \in \{1,\dots,n\}, j \in \{1,\dots,p\}} |a_{i,j}|$
2. "norme euclidienne", $\|A\| = (\sum_{i \in \{1,\dots,n\}, j \in \{1,\dots,p\}} a_{i,j}^2)^{1/2}$

Normes induites sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme, notée $\| \cdot \|$
$S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$
Pour $A = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|A\| = \sup\{\|Ax\|, x \in S_1\}$
Exercice : Vérifier que $A \mapsto \|A\|$ est bien une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
Propriétés importantes d'une norme induite

1. $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$
2. $\|A\| = \max\{\|Ax\|, x \in S_1\}$
   (c'est-à-dire qu'il existe $x \in S^1$ t.q. $\|Ax\| = \|A\|$)
3. $\|A\| = \max\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$
4. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$, pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Démonstration en exercice

Exemples de normes induites sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $a_{i,j}$ le terme de A ligne i colonne j. Si $x \in \mathbb{R}^n$, on note x_i les composantes de x

1. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$. La norme induite sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est alors
   $\|A\|_\infty = \max_{i\in\{1,\dots,n\}} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$
2. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. La norme induite sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est alors
   $\|A\|_1 = \max_{j\in\{1,\dots,n\}} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$
3. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \|x\|_2 = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$. La norme induite sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est alors
   $\|A\|_2 = (\rho(A^t A))^{\frac{1}{2}}$

Items 1 et 2 : démonstration dans le td3

Rappel : $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\rho(B) = \max\{|\lambda|, \lambda \in Sp(B)\}$

$Sp(B)$ est l'ensemble des valeurs propres de B (dans $\mathbb{C}$)

Norme induite par $\| \cdot \|_2$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}} = (x \cdot x)^{1/2}$

$\|A\|_2^2 = (\sup_{x \in S_1} \|Ax\|_2)^2 = \sup_{x \in S_1} \|Ax\|_2^2 = \sup_{x \in S_1} Ax \cdot Ax$
$\|A\|_2^2 = \sup_{x \in S_1} A^t Ax \cdot x$
$A^t A$ est symétrique donc il existe $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ et $\{f_1, \ldots, f_n\}$ base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ t.q. $A^t A f_i = \mu_i f_i$
$\mu_i = \mu_i f_i \cdot f_i = Af_i \cdot Af_i \geq 0$. $0 \leq \mu_1 \leq \ldots \leq \mu_n$
Soit $x \in S_1$, $x = \sum_{i=1} \alpha_i f_i$

$$A^t Ax \cdot x = (\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i f_i) \cdot \sum_{i=1} \alpha_i f_i = \sum_{i=1} \alpha_i^2 \mu_i \leq \mu_n \|x\|_2 = \mu_n$$

Donc $\|A\|_2^2 \leq \mu_n = \rho(A^t A)$
Avec $x = f_n$, $A^t Ax \cdot x = \mu_n$
Donc $\|A\|_2^2 = \mu_n = \rho(A^t A)$

Pour toute norme induite $\rho(A) \leq \|A\|$

1. Cas particulier simple : A symétrique et $\|\cdot\|_2$. Dans ce cas $\|A\|_2 = (\rho(A^2))^{\frac{1}{2}} = \rho(A)$
2. Cas général, $\rho(A) = |\lambda|$, $\lambda \in Sp(A)$ $\lambda \in \mathbb{R}$.
   Dans ce cas $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, $Ax = \lambda x$,
   $\rho(A)\|x\| = \|\lambda x\| = \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$
3. Cas général, $\rho(A) = |\lambda|$, $\lambda \in Sp(A)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ $(A \neq 0)$.
   Dans ce cas $x = y + iz$, y, $z \in \mathbb{R}^n$, $z \neq 0$,
   $Ax = A(y + iz) = \lambda x = \lambda(y + iz)$,
   $\|\lambda^k x\|_{\mathbb{C}} = \|A^k y + iA^k z\|_{\mathbb{C}} \leq \|A^k y\|_{\mathbb{C}} + \|A^k z\|_{\mathbb{C}}$
   $(\frac{|\lambda|}{\|A\|})^k \|x\|_{\mathbb{C}} = \|\frac{A^k y}{\|A\|^k}\|_{\mathbb{C}} + \|\frac{A^k y}{\|A\|^k}\|_{\mathbb{C}}$
   $\|\frac{A^k y}{\|A\|^k}\| \leq \|y\|$ est bornée (car $\|\cdot\|$ est une norme induite)
   $\|\frac{A^k z}{\|A\|^k}\| \leq \|z\|$ est bornée
   On en déduit que $\rho(A) = |\lambda| \leq \|A\|$

Existe-t-il une norme induite pour laquelle $\|A\| = \rho(A)$?

1. Parfois impossible : $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. $\rho(A) = 0 < \|A\|$.
2. Parfois possible, exemple : A symétrique et $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$
   $\|A\|_2 = (\rho(A^2))^{\frac{1}{2}} = \rho(A)$
3. Toujours possible si A diagonalisable dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Objectif : Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une norme induite pour laquelle $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$

Un exemple simple

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. $\rho(A) = 0 < \|A\|$.

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche une norme induite pour laquelle $\|A\| \leq \varepsilon$

Norme choisie sur $\mathbb{R}^2$: Pour $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} x_2^2}$

$Ax = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$\|Ax\|^2 = x_2^2 \leq \varepsilon^2 \frac{1}{\varepsilon^2} x_2^2 \leq \varepsilon^2 \|x\|^2$$

$\|A\| \leq \varepsilon = \rho(A) + \varepsilon$

Remarque :
$x = x_1 e_1 + \frac{1}{\varepsilon} x_2 (\varepsilon e_2)$, $\|x\|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$, $\alpha_1 = x_1, \alpha_2 = \frac{1}{\varepsilon} x_2$
Norme euclidienne dans la base $e_1, \varepsilon e_2$ ($\{e_1, e_2\}$ base canonique)

Triangularisation d'une matrice

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ou $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$). Alors, A est triangularisable dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'il existe $\{u_1, \ldots, u_n\}$ base de $\mathbb{C}^n$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq n$ et $t_{k,i}$, $1 \leq k < i \leq n$ t.q. $Au_i = \lambda_i u_i + \sum_{k=1}^{i-1} t_{k,i} u_k$ pour tout i. Les λ_i sont les valeurs propres de A.
En posant $t_{i,i} = \lambda_i$, ceci signifie qu'il existe $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible t.q. $A = QTQ^{-1}$ ($C_i(Q) = u_i$)

Généralisation : E espace vectoriel complexe de dimension finie. ϕ une application linéaire de E de E. Alors, il existe $\{u_1, \ldots, u_n\}$ base de E, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq n$ et $t_{k,i}$, $1 \leq k < i \leq n$ t.q. $\phi(u_i) = \lambda_i u_i + \sum_{k=1}^{i-1} t_{k,i} u_k$ pour tout i

En choisissant une base de E, le deuxième résultat est une conséquence du premier (avec la matrice A qui représente dans cette base l'application ϕ) (donc, le deuxième résultat n'est pas vraiment une généralisation du premier)

Démonstration de l'existence de $\{u_1, \ldots, u_n\}$

E espace vectoriel complexe de dimension finie. ϕ une application linéaire de E de E. On veut montrer qu'il existe $\{u_1, \ldots, u_n\}$ base de E t.q. $\phi(u_i) = \lambda_i u_i + \sum_{k=1}^{i-1} t_{k,i} u_k$ pour tout i

La démonstration se fait par récurrence sur la dimension de E

Initialisation :

$\dim E = 1$. On choisit $u_1 \in E$, $u_1 \neq 0$

Itération :

On suppose le résultat vrai pour $\dim E < n$ et on le démontre pour $\dim E = n$.

Comme toute matrice a au moins une valeur propre, il existe $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ et $u_1 \in E$, $u_1 \neq 0$ t.q. $\phi(u_1) = \lambda_1 u_1$

On note $G = \mathbb{C}u_1 = \{au_1,\ a \in \mathbb{C}\}$ et on choisit un supplémentaire de G, noté F. Donc

$E = F \oplus G$ et $\dim(F) = n - 1$

Démonstration de l'existence de $\{u_1, \ldots, u_n\}$, fin

$G = \mathbb{C}u_1$, $\phi(u_1) = \lambda_1 u_1$ et $E = F \oplus G$ et $\dim(F) = n - 1$

Soit $u \in F$, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ et $v \in F$ t.q. $\phi(u) = v + \alpha u_1$.
On pose $\psi(u) = v$
L'application ψ est linéaire de F dans F. L'hypothèse de récurrence donne l'existence de $\{u_2, \ldots, u_n\}$ base de F t.q., pour tout $i \geq 2$

$$\psi(u_i) = \lambda_i u_i + \sum_{k=2}^{i-1} t_{k,i} u_k$$

et il existe alors $t_{1,i} \in \mathbb{C}$ t.q.

$$\phi(u_i) = \lambda_i u_i + \sum_{k=2}^{i-1} t_{k,i} u_k + t_{1,i} u_1$$

$\{u_1, \ldots, u_n\}$ est une base de E et
$\phi(u_i) = \lambda_i u_i + \sum_{k=1}^{i-1} t_{k,i} u_k$ pour tout $1 \leq i \leq n$

Existence d'une norme induite t.q. $\|A\| = \rho(A) + \varepsilon$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$ Soit $\{u_1, \dots, u_n\}$ base de $\mathbb{C}^n$ t.q.
$Au_i = \lambda_i u_i + \sum_{k=1}^{i-1} t_{k,i} u_k$ pour tout i
Rappel : Les λ_i sont les valeurs propres de A
Soit $\eta > 0$, on pose $v_i = \eta^{i-1} u_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$
Pour $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, on choisit $\|x\| = (\sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{\alpha}_i)^{\frac{1}{2}}$

1. $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$, elle dépend de A et η
2. un calcul (un peu fastidieux) montre que pour cette norme, $\|A\| \leq \rho(A) + r_\eta$ avec $\lim_{\eta \to 0} r_\eta = 0$
3. Il est possible de choisir $\eta > 0$ t.q. $r_\eta \leq \varepsilon$

Point de vue matriciel : $C_i(Q_\eta) = v_i$, $A = Q_\eta T_\eta Q_\eta^{-1}$, les termes extradiagonaux de T_η tendent vers 0 quand $\eta \to 0$

Convergence de suites et rayon spectral

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
$A^k \to 0$ quand $k \to +\infty$ si et seulement si $\rho(A) < 1$

Démonstration

1. Si $\rho(A) < 1$, il existe une norme induite pour laquelle $\|A\| < 1$ et donc $\|A^k\| \leq \|A\|^k \to 0$ quand $k \to +\infty$
2. Si $\rho(A) \geq 1$,
   il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$, t.q. $Ax = \lambda x$, $|\lambda| = \rho(A)$
   $\|A^k x\|_{\mathbb{C}} = \|\lambda^k x\|_{\mathbb{C}} = |\lambda|^k \|x\|_{\mathbb{C}} \not\to 0$ quand $k \to +\infty$
   $x = y + iz$, $A^k x = A^k y + iA^k z$ et donc $A^k y$ et/ou $A^k z \not\to 0$ quand $k \to +\infty$

Conséquence :
La suite définie par $x^{(k+1)} = Ax^{(k)}$ pour tout $k \geq 0$ converge vers 0 pour tout $x^{(0)}$ (dans $\mathbb{R}^n$) si et seulement si $\rho(A) < 1$

Autres conséquences de la comparaison entre $\rho(A)$ et $\|A\|$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Pour toute norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a $\rho(A) = \lim_{k\to+\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$
2. (Exercice du td3.) On suppose que $\rho(A) < 1$ alors la matrice $I + A$ est inversible. De plus, pour toute norme induite $\|(I+A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$

Conditionnement

On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme induite
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible $\mathrm{cond(A)} = \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{A}^{-1}\|$

1. $\mathrm{cond(A)} \geq 1$
2. $\|x\| = \|x\|_2 = \sqrt{x \cdot x}$. La norme induite est notée aussi $\| \cdot \|_2$.
   $\mathrm{cond_2(A)} = \|\mathrm{A}\|_2\|\mathrm{A}^{-1}\|_2 = (\rho(\mathrm{A^tA})\rho((\mathrm{A^tA})^{-1})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\sigma_\mathrm{n}}{\sigma_1}}$
   $\sigma_n = \max\{|\lambda|,\, \lambda \in Sp(A^tA)\}$, $\sigma_1 = \min\{|\lambda|,\, \lambda \in Sp(A^tA)\}$
3. Si A est symétrique
   $\mathrm{cond_2(A)} = \rho(\mathrm{A})\rho(\mathrm{A}^{-1}) = \frac{\max\{|\lambda|,\, \lambda \in \mathrm{Sp(A)}\}}{\min\{|\lambda|,\, \lambda \in \mathrm{Sp(A)}\}}$

Conditionnement et propagation des erreurs

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et $b \in \mathbb{R}^n$
On veut calculer x solution de $Ax = b$
On suppose qu'il y a des erreurs sur b, on résout donc le système avec $b + \delta_b$ au lieu de b
La solution trouvée est alors $x + \delta_x$ (x solution de $Ax = b$)
$A(x + \delta_x) = b + \delta_b$, c'est-à-dire $\delta_x = A^{-1}\delta_b$
Pour tout norme induite :
$\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$, $\|\delta_x\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta_b\|$
Ceci donne

$$\frac{\|\delta_x\|}{\|x\|} \leq \mathrm{cond(A)}\frac{\|\delta_\mathrm{b}\|}{\|\mathrm{b}\|}$$

Intérêt du conditionnement ?

1. L'inégalité $\frac{\|\delta_x\|}{\|x\|} \leq \mathrm{cond}(\mathrm{A})\frac{\|\delta_\mathrm{b}\|}{\|\mathrm{b}\|}$ est optimale, c'est-à-dire qu'il existe $b \neq 0$ et $\delta_b \neq 0$ (aussi petit que l'on veut) pour lesquels $\frac{\|\delta_x\|}{\|x\|} = \mathrm{cond}(\mathrm{A})\frac{\|\delta_\mathrm{b}\|}{\|\mathrm{b}\|}$
2. L'intérêt est toute fois un peu limité...

   Exemple : on considère une discrétisation par DF de $-u''(x) = f(x)$, $x \in]0,1[$, $u(0) = u(1) = 0$ avec un pas $h = 1/N$. On munit alors $\mathbb{R}^N$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On a alors

   $$\|A\|_\infty = \frac{4}{h^2},\ \|A^{-1}\|_\infty = \frac{1}{8},\ \mathrm{cond}_\infty(\mathrm{A}) = \frac{1}{2\mathrm{h}^2}$$

   et l'inégalité "optimale" est donc $\frac{\|\delta_x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \frac{1}{2h^2}\frac{\|\delta_b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$

   Pour $h = \frac{1}{10}$ l'erreur relative sur x peut donc être 50 fois l'erreur relative sur b...

   Il est intéressant de comprendre pourquoi cette majoration est, pour un problème de ce type, terriblement exagérée. Ceci sera étudié en td et tp