C1, Programme, rappels, exemples

Planning :
cours (12 semaines), td (12 semaines) et tp (9 semaines) le vendredi
cours de 8h30 à 10h
td de 10h15 à 12h15
tp (à partir de la 4eme semaine) de 13h30 à 15h30
Le cours de la 7eme semaine sera remplacé par un partiel
A la fin du cours, il est demandé de rendre un projet

La note finale est le maximum entre la note d'examen et une pondération entre les notes d'examen, partiel, tp et projet

Notes de cours, énoncé des td, tp et projet sont sur ametice et sur ma page web

Programme

1. (5 semaines) Résolution de systèmes linéaires
   $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^p$. On veut calculer $x \in \mathbb{R}^n$ t.q. $Ax = b$
   $p = n$. Méthodes directes (Gauss, LU, Choleski).
   $p = n$. Méthodes itératives (Jacobi, Gauss-Seidel, SOR)
   $p \neq n$. Echelonnement
2. (3 semaines) Résolution de systèmes non linéaires
   $G \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. On veut calculer $x \in \mathbb{R}^n$ t.q. $G(x) = 0$.
   Point fixe de contraction, point fixe de monotonie, méthode de Newton
3. (4 semaines) Résolution de problèmes d'optimisation
   $F \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On veut calculer $\bar{x} \in K$ t.q. $F(\bar{x}) \leq F(x)$ pour tout $x \in K$. $K = \mathbb{R}^n$ (optimisation sans contraintes) puis $K \neq \mathbb{R}^n$ (optimisation avec contraintes).

Exemple de système linéaire

Equilibre d'une poutre sur appuis simples

Données : $f \in C([0,1],\mathbb{R}),\ c \in \mathbb{R}_+$

Inconnue : $u \in C([0,1],\mathbb{R}) \cap C^2(]0,1[,\mathbb{R})$

On cherche à calculer u solution de

$$
\begin{aligned}
&-u''(x) + cu(x) = f(x),\ x \in]0,1[,\\
&u(0) = u(1) = 0
\end{aligned}
$$

On remplace ce problème par un système de N équations à N inconnues scalaires $(u_1,\ldots,u_N)$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + cu_i = f_i,\ i \in \{1,\ldots,N\}\\
&u_0 = u_{N+1} = 0
\end{aligned}
$$

u_i est censé approcher $u(x_i)$, $f_i = f(x_i)$, $x_i = ih$, $h = 1/(N+1)$

Exemple de système linéaire, suite

$-\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}+cu_i=f_i,\ i\in\{1,\dots,N\}$
$u_0=u_{N+1}=0$

peut s'écrire $AU=b$, avec $U=\begin{bmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_N\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_N\end{bmatrix}$ et

$A=(a_{i,j})_{i,j\in\{1,\dots,N\}}$, $a_{i,i}=2/h^2+c$, $a_{i,j}=-1/h^2$ si $|i-j|=1/h^2$ et $a_{i,j}=0$ si $|i-j|>1$

Deux questions naturelles :

1. Calculer U solution de $AU=b$. C'est l'objectif de la 1ere partie de cette UE
2. La quantité u_i est elle proche de $u(x_i)$?

Réponse à la deuxième question :

Si u est de classe C^4, on peut montrer que $(h=1/(N+1))$
$|u_i-u(x_i)|\leq\frac{h^2}{96}\max_{x\in]0,1[}|u^{(4)}(x)|$ pour tout $i\in\{1,\dots,N\}$

Notations

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à termes réels (définition analogue pour $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$). $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on confond souvent A et l'application T_A de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par $T_A(X) = AX$
Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, le produit AB est bien défini, $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ et $T_{AB} = T_A \circ T_B$
On confond aussi $\mathbb{R}^n$ avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (le produit matrice-vecteur est alors un produit matrice-matrice)

petite subtilité : On confond $\mathbb{R}$ avec $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$. Si $a \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathbb{R}^n$, le produit aX peut s'écrire Xa (car $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $a \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$)

$A \in \mathcal{M}_{n,p}$, on note $C_1(A), \dots, C_p(A)$ les colonnes de A et $L_1(A), \dots, L_n(A)$ les lignes de A

Rappels

$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$.

$AX = \sum_{j=1}^{p} x_j C_j(A)$ (autrement dit $(AX)_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j$)

$\mathrm{Im(A)} = \mathrm{Im(T_A)} = \{\mathrm{AX},\ \mathrm{X} \in \mathbb{R}^{\mathrm{p}}\} = \mathrm{ev}\{\mathrm{C_1(A)}, \ldots, \mathrm{C_p(A)}\} \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$
$\ker(A) = \ker(T_A) = \{X \in \mathbb{R}^p,\ AX = 0\} \subset \mathbb{R}^p$

Théorème du rang : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors
$p = \dim(\mathrm{Im(A)}) + \dim(\ker(\mathrm{A}))$

Théorème : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors
$\mathrm{rang(A)} = \dim(\mathrm{Im(A)}) = \dim(\mathrm{Im(A^t)} = \mathrm{rang(A^t)}$
$A^t \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, $(A^t)_{i,j} = A_{j,i}$
Remarque : $U \cdot V = \sum_{i=1}^{q} u_i v_i$ est le produit scalaire usuel de $U, V \in \mathbb{R}^q$. Alors $AX \cdot Y = X \cdot A^t Y$, $X \in \mathbb{R}^p$, $Y \in \mathbb{R}^n$

Miracle de la dimension finie

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Im(A)}, \ker(\mathrm{A}) \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$
$n = \dim(\mathrm{Im(A)}) + \dim(\ker(\mathrm{A}))$ et donc
$\dim(\mathrm{Im(A)}) = \mathrm{n}$ si et seulement $\dim(\ker(A)) = 0$

A est surjective $\Leftrightarrow$ A est injective $\Leftrightarrow$ A est bijective

Rappel : On confond A et T_A
A est injective si $AX = AY$ implique X=Y, ce qui est équivalent à $AZ = 0$ implique $Z = 0$ et donc équivalent à $\ker(A) = \{0\}$.

Ce résultat se généralise immédiatement à tout espace vectoriel E de dimension finie.
Si T est une application linéaire de E dans E, T est injective si et seulement si T est surjective.

Déterminant

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Il existe une unique application, notée det, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\det(A) = f(C_1(A), \dots, C_n(A))$$

avec

1. f est linéaire par rapport à chacun de ses arguments
2. $\det(B) = -\det(A)$ si B est obtenu à partir de A en échangeant deux colonnes
3. $\det(I_n) = 1$, où I_n est la matrice Identité $(C_i(I_n) = e_i$, où $e_1, \dots, e_n$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n)$

Il est assez facile de montrer que $\det A = 0$ si la famille des vecteurs colonnes de A est liée (c'est facile à voir, par exemple, si $C_1(A) = C_2(A)$ ou $C_1(A) = 2C_2(A)$ ou $C_1(A) = C_2(A) + C_3(A)$)
On en déduit que $\mathrm{rang(A) < n}$ implique $\det(A) = 0$. la réciproque est aussi vraie et on a donc, grâce au théorème du rang

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow \dim(\ker(A)) > 0$$

Propriétés utiles du Déterminant

$n \in \mathbb{N}^\star$. $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

En particulier si A est inversible (c'est-à-dire A, ou plutôt T_A, est bijective), $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ (noter aussi $T_{A^{-1}} = (T_A)^{-1}$).

$\det(A) = \det(A^t) = f(L_1(A), \ldots, L_n(A))$

Valeurs propres de A

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
Polynôme caractétistique de A : Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $I = I_n$,
$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$
P_A est un polynôme de degré n
On note $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ les racines de P_A ($q \leq n$)
Pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$, $P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{m_a(\lambda_i)} Q_i(\lambda)$, $Q(\lambda_i) \neq 0$
$m_a(\lambda_i)$ est la multiplicité algébrique de λ_i
$m_g(\lambda_i) = \dim(\ker(A - \lambda_i I)$ est la multiplicité géométrique de λ_i
$1 \leq m_g(\lambda_i) \leq m_a(\lambda_i)$, $\sum_{i=1}^{q} m_a(\lambda_i) = n$
La matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ si et seulement si $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$ pour tout i
La matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ si A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$ pour tout i

Exemple de matrice non diagonalisable

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
$Sp(A) = \{0\}$, $m_a(0) = 2$
$m_g(0) = 1$ (car $A \neq 0$ et donc $\dim(\ker(A)) < 2$)

Ecriture matricielle de la diagonalisation

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose A diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Il existe alors $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ (non nécessairement tous distincts) et $\{u_1, \ldots, u_n\}$ base de $\mathbb{R}^n$ t.q. $Au_i = \lambda_i u_i$ pour tout i.

On définit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant $C_i(P) = u_i$, c'est-à-dire $Pe_i = u_i$

$e_1, \ldots, e_n$ base canonique de $\mathbb{R}^n$

$$APe_i = Au_i = \lambda_i u_i = \lambda_i Pe_i, \qquad P^{-1}APe_i = \lambda_i e_i$$

$D = P^{-1}AP$, $C_i(D) = De_i = \lambda_i e_i$

La matrice D est diagonale avec les valeurs propres de A comme termes diagonaux

Base canonique de $\mathbb{R}^3$: $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Condition suffisante pour que A soit diagonalisable dans $\mathbb{R}$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est symétrique, c'est-à-dire que $A = A^t$. Alors, A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ (non nécessairement tous distincts) et $\{u_1, \ldots, u_n\}$ base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ t.q. $Au_i = \lambda_i u_i$ pour tout i
(Orthonormée signifie $u_i \cdot u_j = 0$ si $i \neq j$ et $u_i \cdot u_i = 1$)

Généralisation : E espace vectoriel réel de dimension finie, muni d'un produit scalaire, noté $(\cdot/\cdot)$. T une application linéaire symétrique de E de E (c'est-à-dire que $(Tx/y) = (x/Ty)$). Alors, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ (non nécessairement tous distincts) et $\{u_1, \ldots, u_n\}$ base orthonormée de E t.q. $Tu_i = \lambda_i u_i$ pour tout i
(Orthonormée signifie $(u_i/u_j) = 0$ si $i \neq j$ et $(u_i/u_i) = 1$)

Rappel : produit scalaire et application symétrique

E espace vectoriel réel. Un produit scalaire est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui à x, $y \in E$ associe (x/y) et vérifie

1. $(x/x) > 0$ si $x \neq 0$
2. $(x/y) = (y/x)$
3. L'application $x \mapsto (x/y)$ est linéaire (pour tout y fixé)

Remarque : l'application $x \mapsto \|x\|_=(x/x)^{1/2}$ est alors une norme sur E

Exemple fondamental : $E = \mathbb{R}^n$, $(X/Y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, les x_i et y_i sont les composantes de X et Y

Une application linéaire T de E dans E est symétrique si $(Tx/y) = (x/Ty)$ (pour tout $x, y \in E$)

Exemple fondamental : $E = \mathbb{R}^n$, $(X/Y) = X \cdot Y$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ t.q. $A = A^t$, $T = T_A$

Démonstration de l'existence de $\{u_1, \ldots, u_n\}$

E espace vectoriel réel de dimension finie, muni d'un produit scalaire, noté $(\cdot/\cdot)$. T une application linéaire symétrique de E de E. On veut montrer qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et $\{u_1, \ldots, u_n\}$ base orthonormée de E t.q. $Tu_i = \lambda_i u_i$ pour tout i

La démonstration se fait par récurrence sur la dimension de E

Initialisation :

$\dim E = 1$. On choisit $e \in E$, $e \neq 0$ et on prend $u_1 = \frac{e}{\|e\|}$

Itération :

On suppose le résultat vrai pour $\dim E < n$ et on le démontre pour $\dim E = n$.

Pour $x \in E$, $\varphi(x) = (Tx/x)$. On pose $S_1 = \{x \in E, \|x\| = 1\}$

La fonction φ est continue et S_1 est compacte (car $\dim E < +\infty$).

Donc il existe $u_1 \in S_1$ t.q. $\varphi(u_1) \leq \varphi(x)$ pour tout $x \in S_1$

Démonstration de l'existence de $\{u_1, \ldots, u_n\}$, suite

$\varphi(x) = (Tx/x)$, $S_1 = \{x \in E, \|x\| = 1\}$
$u_1 \in S_1$, $\varphi(u_1) \leq \varphi(x)$ pour tout $x \in S_1$
$y \neq 0$, $0 < t < 1/\|y\|$

$$\lambda_1 = (Tu_1/u_1) = \varphi(u_1) \leq \varphi(\frac{u_1 + ty}{\|u_1 + ty\|}) = (T\frac{u_1 + ty}{\|u_1 + ty\|} / \frac{u_1 + ty}{\|u_1 + ty\|})$$

$$\lambda_1(u_1 + ty/u_1 + ty) \leq (Tu_1 + tTy/u_1 + ty)$$
$$\lambda_1 + 2t\lambda_1(u_1/y) + \lambda_1 t^2(y/y) \leq \lambda_1 + 2t(Tu_1/y) + t^2(Ty/y)$$
$$2(\lambda_1 u_1 - Tu_1/y) \leq t(Ty/y) - \lambda_1 t(y/y)$$

Quand $t \to 0$, ceci donne $(\lambda_1 u_1 - Tu_1/y) \leq 0$ et donc $Tu_1 = \lambda_1 u_1$
(sinon, il y a une contradiction en prenant $y = \lambda_1 u_1 - Tu_1$)
Conclusion : $(u_1/u_1) = \|u_1\|^2 = 1$, $Tu_1 = \lambda_1 u_1$

Démonstration de l'existence de $\{u_1, \ldots, u_n\}$, fin

$F = u_1^\perp = \{x \in E, (x/u_1) = 0\}$, $G = \mathbb{R}u_1 = \{au_1, a \in \mathbb{R}\}$ de sorte que

$$E = F \oplus G$$

$\dim F = n - 1$ (et $\dim G = 1$)
On applique l'hypothèse de récurrence à F, muni du produit scalaire donné par celui de E, et la restriction de T à F. On note S cette restriction
Il est crucial de remarquer que S envoie bien F dans F. En effet, si $x \in F$, on a $(Tx/u_1) = (x/Tu_1) = \lambda_1(x/u_1) = 0$ et donc $Sx = Tx \in F$
L'hypothèse de récurrence donne l'existence de $\{u_2, \ldots, u_n\}$ base orthonormée de F t.q. $Su_i = Tu_i = \lambda_i u_i$ pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$

On obtient bien ainsi $\{u_1, \ldots, u_n\}$ base orthonormée de E t.q. $Su_i = Tu_i = \lambda_i u_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$