C6, systèmes non linéaires, méthodes de points fixes

$g \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, on cherche $x \in \mathbb{R}^n$ t.q. $g(x) = 0$

Cas linéaire, $g(x) = Ax - b$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$
$f(x) = x - g(x)$, $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = f(x)$

1. Point fixe de contraction (C6)
2. Contraction obtenue grâce à une relaxation (C6)
3. Point fixe de monotonie (C6)
4. Monotonie obtenue grâce à une relaxation (td et projet)
5. Méthodes de Newton et quasi-Newton (C8)

Rappel de Calcul Différentiel, dérivée

E, F e.v. normés sur $\mathbb{R}$. Exemple : $E = \mathbb{R}^p$, $F = \mathbb{R}^n$
$f \in C(E, F)$, $x \in E$
f est dérivable au point x si il existe $T \in \mathcal{L}(E, F)$ t.q;

$$f(x+h) = f(x) + T(h) + \varepsilon(h)\|h\|_E, \text{ pour tout } h \in E$$

avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$

1. Si T existe, T est unique. On note $T = Df(x) = df(x)$
   $Df(x)$ dérivée (de Fréchet) de f au point x
2. Dans le cas $E = \mathbb{R}^p$, $F = \mathbb{R}^n$, $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$, il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ t.q. $T(h) = Ah$. On note $A = J_f(x)$
   $J_f(x)$ est la matrice jacobienne de f au point x
   $Df(x)(h) = J_f(x)h$

Gradient

1. Cas particulier $n = 1$. $f \in C(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ dérivable au point x.
   $J_f(x) \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$. On pose $\nabla f(x) = J_f(x)^t \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^p$
   $Df(x)(h) = J_f(x)h = \nabla f(x) \cdot h$
2. . Cas particulier $n = p = 1$, $J_f(x) = \nabla f(x) = f'(x)$
   $Df(x)(h) = f'(x)h$
   $Df(x) = \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f'(x) \in \mathbb{R}$

$f \in C(E, \mathbb{R})$, f dérivable au point x. Si E est un espace de Hilbert, on peut aussi définir $\nabla f(x) \in E$ (alors que $Df(x) \in E'$)

Lien entre dérivée et dérivées partielles

$f \in C(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$, $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$

f dérivable au point x, $A = J_f(x)$. Alors

$$a_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \partial_j f_i(x)$$

$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ désigne la dérivée au point x_j de l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
$s \mapsto f_i(x(s))$, $x(s)_k = x_k$ pour $k \neq j$, $x(s)_j = s$

Exemple : $i = 1$, $j = 2$, $p = 3$, $x(s) = \begin{bmatrix} x_1 \\ s \\ x_3 \end{bmatrix}$

Démonstration facile...

Lien entre dérivée et dérivées partielles, fin

$f \in C(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$, $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$

On suppose que les dérivées partielles existent pour tout les points dans un voisinage de x et dépendent continûment de x,
c'est-à-dire que les applications (de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$)

$$y \mapsto \partial_j f_i(y)$$

sont continues au point x

Alors, f est dérivable au point x, $J_f(x) = A$ avec $a_{i,j} = \partial_j f_i(x)$
Démonstration moins facile...

$f \in C^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ si $\partial_j f_i \in C^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ pour tout i, j

Théorème des Accroissements Finis (TAF)

$f \in C^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. On munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ de normes et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de la norme induite. Les trois normes sont notées $\|\cdot\|$.
Pour tout x, $y \in \mathbb{R}^p$

$$\|f(y) - f(x)\| \leq (\sup_{t \in]0,1[} \|J_f(x + t(y - x)\|)\|y - x\|$$

Démonstration $\varphi(t) = f(x + t(y - x))$, $f(y) - f(x) = \varphi(1) - \varphi(0)$
$\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $\varphi'(t) = J_f(x + t(y - x))(y - x)$
$f(y) - f(x) = \int_0^1 \varphi'(t)dt = \int_0^1 J_f(x + t(y - x))(y - x)dt$

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \int_0^1 \|J_f(x + t(y - x))(y - x)\|dt$$

$$\leq (\int_0^1 \|J_f(x + t(y - x))\|dt)\|y - x\|$$

Si $n = 1$, il existe $c \in]0, 1[$ t.q.
$f(y) - f(x) = J_f(x + c(y - x))(y - x) = \nabla f(x + c(y - x)) \cdot (y - x)$
Si $n > 1$, c peut ne pas exister (exemple avec $n = 2$ $p = 1$)

Point fixe de contraction

B un ensemble muni d'une distance d. On suppose B complet

Exemple fondamental : B partie fermée de $\mathbb{R}^n$, $d(x,y) = \|x - y\|$

1. f envoie B dans B
2. f strictement contractante, c'est-à-dire qu'il existe $L < 1$ t.q. $d(f(x), f(y)) \leq Ld(x,y)$ pour tout x, $y \in B$

Alors

1. Il existe un unique $\bar{x} \in B$ t.q. $f(\bar{x}) = \bar{x}$
2. $\bar{x} = \lim_{k \to +\infty} x^{(k)}$ avec la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ définie par
   Initialisation : $x^{(0)} \in B$
   Itération : $k \geq 0$, $x^{(k+1)} = f(x^{(k)})$

Remarque : Ce théorème donne une condition suffisante pour l'existence d'un point fixe mais ce n'est pas une condition nécessaire

Point fixe de contraction. Démonstration

B un ensemble muni d'une distance d. On suppose B complet

1. f envoie B dans B
2. $L < 1$, $d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$ pour tout x, $y \in B$

Unicité du point fixe : $x = f(x)$, $\bar{x} = f(\bar{x})$, x, $\bar{x} \in B$,
$d(x, \bar{x}) = d(f(x), f(\bar{x})) \leq Ld(x, \bar{x})$ et donc $x = \bar{x}$
Existence du point fixe et convergence de la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$:
Initialisation : $x^{(0)} \in B$
Itération : $k \geq 0$, $x^{(k+1)} = f(x^{(k)})$

1. $d(x^{(k+1)}, x^{(k)}) \leq Ld(x^{(k)}, x^{(k-1)}) \leq \ldots \leq L^k d(x^{(1)}, x^{(0)})$
2. $d(x^{(k+\ell)}, x^{(k)}) \leq \sum_{i=1}^{\ell} d(x^{(k+i)}, x^{(k+i-1)}) \leq \frac{L^k}{1-L} d(x^{(1)}, x^{(0)})$

On en déduit que la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy et donc converge (car B est complet)
On pose $x = \lim_{k \to +\infty} x^{(k)}$. On a $x = f(x)$ en passant à la limite sur $x^{(k+1)} = f(x^{(k)})$.

Point fixe de contraction. Vérifier que f envoie B dans B

$B = [0, 1]$, $f(x) = \frac{x^2}{4} + 1$

x, $y \in B$

$$d(f(x), f(y)) = \frac{1}{4}|x^2 - y^2| = \frac{x+y}{4}|x - y| \leq \frac{1}{2}d(x, y)$$

f est strictement contractante mais
f n'envoie pas B dans B
Le théorème du point fixe de contraction ne s'applique pas

On peut d'ailleurs voir qu'il n'existe pas $x \in B$, ni $x \in \mathbb{R}$, t.q. $f(x) = x$

Vitesse de convergence, définitions

$f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme.
On suppose que la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge et on pose $x = \lim_{k\to+\infty} x^{(k)}$. On suppose $x^{(k)} \neq x$ pour tout k

1. La convergence est au moins linéaire si Il existe $\beta < 1$ t.q., pour tout $k \geq 0$, $\|x^{(k+1)} - x\| \leq \beta\|x^{(k)} - x\|$
   (si non, la convergence est sous-linéaire)
2. La convergence est au moins superlinéaire si $\lim_{k\to+\infty} \frac{\|x^{(k+1)}-x\|}{\|x^{(k)}-x\|} = 0$
3. La convergence est au moins quadratique si
   Il existe $\beta \in \mathbb{R}$ t.q., pour tout $k \geq 0$,
   $\|x^{(k+1)} - x\| \leq \beta\|x^{(k)} - x\|^2$

Exemples avec $n = 1$:
$x^{(k)} = \frac{1}{(k+1)^2}$, $x^{(k)} = \frac{1}{2^k}$, $0 < x^{(0)} < 1$, $x^{(k+1)} = (x^{(k)})^2$

Vitesse de convergence pour le point fixe de contraction

On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme. B partie fermée de $\mathbb{R}^n$, $f \in C(B, B)$

1. f envoie B dans B
2. f strictement contractante, c'est-à-dire qu'il existe $L < 1$ t.q. $\|f(y) - f(x)\| \leq L\|y - x\|$ pour tout x, $y \in B$

Initialisation : $x^{(0)} \in B$
Itération : $k \geq 0$, $x^{(k+1)} = f(x^{(k)})$
On sait que $\lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = \bar{x}$ et $\bar{x} = f(\bar{x})$
Question : Vitesse de convergence ?
Réponse : Au moins linéaire, car $L < 1$
Démonstration :

$$\|x^{(k+1)} - \bar{x}\| = \|f(x^{(k)}) - f(\bar{x})\| \leq L\|x^{(k)} - \bar{x}\|$$

Point fixe de contraction avec relaxation

$g \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, on cherche $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ t.q. $g(\bar{x}) = 0$

$f(x) = x - g(x)$, $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = f(x)$

Algorithme du point fixe :

Initialisation : $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

Itération : $k \geq 0$, $x^{(k+1)} = f(x^{(k)})$

Algorithme du point fixe avec relaxation : Soit $0 < \omega$ (< 1)

Initialisation : $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

Itération : $k \geq 0$, $\tilde{x}^{(k+1)} = f(x^{(k)})$, $x^{(k+1)} = \omega \tilde{x}^{(k+1)} + (1 - \omega) x^{(k)}$

Ecriture équivalente : $f_\omega(x) = x - \omega g(x)$

Initialisation : $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

Itération : $k \geq 0$, $x^{(k+1)} = f_\omega(x^{(k)})$

Démonstration :

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} = f_\omega(x^{(k)}) = x^{(k)} - \omega g(x^{(k)}) &= (1-\omega) x^{(k)} + \omega (x^{(k)} - g(x^{(k)})) \\ &= (1 - \omega) x^{(k)} + \omega f(x^{(k)}) = (1 - \omega) x^{(k)} + \omega \tilde{x}^{(k+1)} \end{aligned}$$

Point fixe de contraction avec relaxation, choix de ω ?

$g \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, on cherche $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ t.q. $g(\bar{x}) = 0$

Algorithme : $0 < \omega$, $f_\omega(x) = x - \omega g(x)$
Initialisation : $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$
Itération : $k \geq 0$, $x^{(k+1)} = f_\omega(x^{(k)})$

Idée simple : Choisir ω t.q. f_ω soit strictement contractante (et donc $\lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = \bar{x}$, $\bar{x} = f_\omega(\bar{x})$, $g(\bar{x}) = 0$)

Hypthèses sur g. Il existe M, $\alpha > 0$ t.q. pour tout x, $y \in \mathbb{R}^n$

1. $|g(x) - g(y)| \leq M|x - y|$ (g lipschitzienne, $|\cdot| = \|\cdot\|_2$)
2. $(g(x) - g(y)) \cdot (x - y) \geq \alpha |x - y|^2$
   (si $n = 1$, g est "fortement" monotone)

Conséquence : Si $0 < \omega < \frac{2\alpha}{M^2}$, f_ω est strictement contractante

Choix de ω. Démonstration

$g \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

1. $|g(x) - g(y)| \leq M|x - y|$ (g lipschitzienne, $|\cdot| = \|\cdot\|_2$)
2. $(g(x) - g(y)) \cdot (x - y) \geq \alpha |x - y|^2$

$f_\omega(x) = x - \omega g(x)$, $0 < \omega < \frac{2\alpha}{M^2}$, f_ω est strictement contractante ?

x, $y \in \mathbb{R}^n$ ($\omega > 0$)

$$
\begin{aligned}
|f_\omega(x) - f_\omega(y)|^2 &= (x - y - \omega g(x) + \omega g(y)) \cdot (x - y - \omega g(x) + \omega g(y)) \\
&= |x - y|^2 - 2\omega (x - y) \cdot (g(x) - g(y)) + \omega^2 |g(x) - g(y)|^2 \\
&\leq |x - y|^2 (1 - 2\omega\alpha + M^2\omega^2) = |x - y|^2 (1 - \omega(2\alpha - M^2\omega))
\end{aligned}
$$

Pour $0 < \omega < \frac{2\alpha}{M^2}$, $(1 - \omega(2\alpha - M^2\omega)) < 1$ et f_ω est bien strictement contractante

Point fixe de contraction avec relaxation, Exemple

$g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

Hypthèses sur g : On suppose que $J_g(x)$ est "uniformément s.d.p.", c'est-à-dire que $J_g(x)$ est symétrique et qu'il existe M, $\alpha > 0$ t.q., pour tout x, $z \in \mathbb{R}^n$, $\alpha z \cdot z \leq J_g(x) z \cdot z \leq M z \cdot z$

Conséquence :

1. $|g(x) - g(y)| \leq M|x - y|$ (g lipschitzienne, $|\cdot| = \|\cdot\|_2$)
2. $(g(x) - g(y)) \cdot (x - y) \geq \alpha |x - y|^2$

Démonstration

1. Le théorème des accroissements finis donne
   $|g(y) - g(x)| \leq M|y - x|$ car $\|J_g(x)\|_2 = \rho(J_g(x)) \leq M$
2. $\varphi(t) = g(x + t(y - x)$, $g(y) - g(x) = \varphi(1) - \varphi(0)$,
   $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $\varphi'(t) = J_g(x + t(y - x))(y - x)$

$$(g(y) - g(x)) \cdot (y - x) = (\int_0^1 J_g(x + t(y - x))(y - x) dt) \cdot (y - x)$$

$$= \int_0^1 J_g(x + t(y - x))(y - x) \cdot (y - x) dt \geq \int_0^1 \alpha |y - x|^2 dt = \alpha |y - x|^2$$

Point fixe de monotonie

Relation d'ordre dans $\mathbb{R}^n$: $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

$u \geq v$ si $u_i \geq v_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$

$G \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $G(u) = u - F(u)$

On suppose que F est t.q.

1. Il existe m, $M \in \mathbb{R}^n$ t.q. $m \leq F(m)$, $M \geq F(M)$
2. $m \leq M$
3. $m \leq u \leq v \leq M \implies F(u) \leq F(v)$

Initialisation : $u^{(0)} = m$

Itération : $k \geq 0$, $u^{(k+1)} = F(u^{(k)})$

Alors, $m \leq u^{(k)} \leq u^{(k+1)} \leq M$ pour tout k,

$\lim_{k \to +\infty} u^{(k)} = \overline{u}$, $\overline{u} = F(\overline{u})$ et donc $G(\overline{u}) = 0$

Démonstration en exercice

Vitesse de convergence, point fixe de contraction, $n = 1$

$f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
Initialisation : $x^{(0)} \in \mathbb{R}$
Itération : $k \geq 0$, $x^{(k+1)} = f(x^{(k)})$
On suppose que $\lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = \bar{x}$ (et donc $\bar{x} = f(\bar{x})$)
$x^{(k)} \neq \bar{x}$ pour tout k
Question : Vitesse de convergence ?
Théorème des Accroissements Finis, il existe c_k entre $\bar{x}$ et $x^{(k)}$ t.q.

$$|x^{(k+1)} - \bar{x}| = |f(x^{(k)}) - f(\bar{x})| = |f'(c_k)||x^{(k)} - \bar{x}|$$

$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x^{(k+1)} - \bar{x}|}{|x^{(k)} - \bar{x}|} = |f'(\bar{x})|$
Si $f'(\bar{x}) \neq 0$ la convergence est exactement linéaire

Si $f'(\bar{x}) = 0$ et $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ la convergence est au moins quadratique, $\lim_{k\to+\infty} \frac{|x^{(k+1)} - \bar{x}|}{|x^{(k)} - \bar{x}|^2} = \frac{1}{2} f''(\bar{x})$ (exercice)

Méthode de Newton, 1ere idée pour $n = 1$

$g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on cherche $\bar{x} \in \mathbb{R}$ t.q. $g(\bar{x}) = 0$
$f(x) = x - h(x)g(x)$, avec $h(x) \neq 0$ pour tout x, donc
$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = f(x)$
Algorithme du point fixe :
Initialisation : $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$
Itération : $k \geq 0$, $x^{(k+1)} = f(x^{(k)})$
On suppose que la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge, on pose
$\bar{x} = \lim_{k \to +\infty} x^{(k)}$ (donc $\bar{x} = f(\bar{x})$ et $g(\bar{x}) = 0$)

Si on choisit h t.q. $f'(\bar{x}) = 0$, alors la convergence est quadratique

$f'(x) = 1 - h'(x)g(x) - h(x)g'(x)$, $f'(\bar{x}) = 1 - h(\bar{x})g'(\bar{x})$

Un choix possible est donc $h(x) = \frac{1}{g'(x)}$
(à condition que g' ne s'annule pas)

Algorithme de Newton pour $n = 1$:
Itération : $k \geq 0$, $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{g(x^{(k)})}{g'(x^{(k)})}$