1.2.3 Exercices (matrices, exemples)

Exercice 1 (Théorème du rang)**.** *Corrigé en page 21*

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ $(n, p \geq 1)$. On rappelle que $\mathrm{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{R}^p; \, Ax = 0\}$, $\mathrm{Im}(A) = \{Ax, \, x \in \mathbb{R}^p\}$ et $\mathrm{rang}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A))$. Noter que $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathbb{R}^p$ et $\mathrm{Im}(A) \subset \mathbb{R}^n$.
Soit $f_1, \ldots, f_r$ une base de $\mathrm{Im}(A)$ (donc $r \leq n$) et, pour $i \in \{1, \ldots, r\}$, a_i tel que $Aa_i = f_i$.

1. Montrer que la famille $a_1, \ldots, a_r$ est une famille libre de $\mathbb{R}^p$ (et donc $r \leq p$).
2. On note G le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ engendré par $a_1, \ldots, a_r$. Montrer que $\mathbb{R}^p = G \oplus \mathrm{Ker}(A)$. En déduire que (théorème du rang)
$$p = \dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A)).$$
3. On suppose ici que $n = p$. Montrer que l'application $x \mapsto Ax$ (de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$) est injective si et seulement si elle est surjective.

Exercice 2 (rang(A)=rang(A^t))**.** *Corrigé en page 22*

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ $(n, p \geq 1)$.

1. Soient P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et Q une matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
Montrer que $\dim(\mathrm{Im}(PA)) = \dim(\mathrm{Im}(AQ)) = \dim(\mathrm{Im}(A))$.
Montrer aussi que les matrices P^t et Q^t sont inversibles.

Soit $f_1, \ldots, f_r$ une base de $\mathrm{Im}(A)$ (donc $r \leq p$) et, pour $i \in \{1, \ldots, r\}$, a_i tel que $Aa_i = f_i$. Soit $a_{r+1}, \ldots, a_p$ une base de $\mathrm{Ker}(A)$ (si $\mathrm{Ker}(A) \neq \{0\}$). La famille $a_1, \ldots, a_n$ est une base de $\mathbb{R}^p$ (voir l'exercice 1). De même, on complète (si $r < n$) $f_1, \ldots, f_r$ par $f_{r+1}, \ldots, f_n$ de manière à avoir une base $f_1, \ldots, f_n$ de $\mathbb{R}^n$.
Enfin, on note P et Q les matrices telles que $Pe_i = a_i$ (pour tout $i = 1, \ldots, p$) et $Qf_j = \bar{e}_j$ (pour tout $j = 1, \ldots, n$) ou $e_1, \ldots, e_p$ est la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On pose $J = QAP$.

2. Montrer que P et Q sont inversibles.
3. calculer les colonnes de J et de J^t et en déduire que les matrices J et J^t sont de même rang.
4. Montrer que A et A^t sont de même rang.
5. On suppose maintenant que $n = p$. Montrer que les vecteurs colonnes de A sont liés si et seulement si les vecteurs lignes de A sont liés.

Exercice 3 (Décomposition de R^n à partir d'une matrice)**.**
Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que la matrice A est diagonalisable. Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Im}(A)$.
2. Donner un exemple pour lequel $\mathbb{R}^n \neq \mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Im}(A)$ (on pourra se limiter au cas $n = 2$).

Exercice 4 (Vrai ou faux ? Motiver les réponses…)**.** *Corrigé en page 22*

On suppose dans toutes les questions suivantes que $n \geq 2$.

1. Soit $Z \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non nul. La matrice ZZ^t est inversible.
2. La matrice inverse d'une matrice triangulaire inférieure est triangulaire supérieure.
3. Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.
4. Toute matrice inversible est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
5. Toute matrice inversible est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
6. Le déterminant d'une matrice A est égal au produit de ses valeurs propres (comptées avec leur multiplicité et éventuellement complexes).
7. Soit A une matrice carrée telle que $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, alors A est inversible.

8. Soit A une matrice carrée telle que $A\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$, alors A est inversible.
9. Une matrice symétrique est inversible.
10. Une matrice symétrique définie positive est inversible.
11. Le système linéaire

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_{i,j} x_j = 0 \text{ pour tout } i = 1, \ldots, n$$

admet toujours une solution non nulle.

Exercice 5 (Sur quelques notions connues)**.** *Corrigé en page 23*

1. Soit A une matrice carrée d'ordre n et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. Peut il exister exactement deux solutions distinctes au système $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$?
2. Soient A, B et C de dimensions telles que AB et BC existent. Montrer que si $AB = Id$ et $BC = Id$, alors $A = C$.
3. Combien y a -t-il de matrices carrées d'ordre 2 ne comportant que des 1 ou des 0 comme coefficients ? Combien d'entre elles sont inversibles ?
4. Soit $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$. Montrer que $B^{1024} = Id$.

Exercice 6 (A propos de $BB^t = I$)**.**
Pour $n \geq 1$, on note I_n la matrice identité d'ordre n.
1. Existe-t-il $B \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que $BB^t = I_2$ (justifier la réponse) ?
2. Soit $n > 2$, Existe-t-il $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $BB^t = I_n$ (justifier la réponse) ?

Exercice 7 (La matrice K_3)**.** *Suggestions en page 21. Corrigé en page 23*
Soit $f \in C([0,1], \mathbb{R})$. On cherche u tel que

$$-u''(x) = f(x), \ \forall x \in (0,1), \tag{1.15a}$$
$$u(0) = u(1) = 0. \tag{1.15b}$$

1. Calculer la solution exacte $u(x)$ du problèmes lorsque f est la fonction identiquement égale à 1 (on admettra que cette solution est unique), et vérifier que $u(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

On discrétise le problème suivant par différences finies, avec un pas $h = \frac{1}{4}$ avec la technique vue en cours.

2. On suppose que u est de classe C^4 (et donc f est de calsse C^2). A l'aide de dévloppements de Taylor, écrire l'approximation de $u''(x_i)$ au deuxième ordre en fonction de $u(x_i)$, $u(x_{i-1})$ et $u(x_{i+1})$. En déduire le schéma aux différences finies pour l'approximation de (1.15), qu'on écrira sous la forme :

$$K_3 \boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}, \tag{1.16}$$

où K_3 est la matrice de discrétisation qu'on explicitera, $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{bmatrix}$.

3. Résoudre le système linéaire (1.16) par la méthode de Gauss. Lorsque f est la fonction identiquement égale à 1, comparer u_i et $u(x_i)$ pour $i = 1, 2, 3$, et expliquer pourquoi l'erreur de discrétisation $u(x_i) - u_i$ est nulle.
4. Reprendre les questions précédentes en remplaçant les conditions limites (1.15b) par :

$$u(0) = 0, \quad u'(1) = 0. \tag{1.17}$$