1.3.5 Exercices (méthodes directes)

Exercice 16 (Vrai ou faux ?). *Corrigé en page 51*

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. La matrice $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ admet une décomposition de Choleski.
2. La matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ est symétrique définie positive.
3. La matrice B ci-dessus admet une décomposition LU.
4. La matrice $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ s'écrit C^tC.
5. La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ admet une décomposition de Choleski $A = C^tC$ avec $C = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.
6. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (a) La matrice AA^t admet une décomposition de Choleski.
   (b) La matrice A^tA admet une décomposition de Choleski.

Exercice 17 (Elimination de Gauss).
On cherche la solution du système linéaire $Ax = b$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 8 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 10 \end{bmatrix} \text{ et } b = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

1. Pourquoi la méthode de Gauss sans permutation ne fonctionne pas pour résoudre ce système linéaire ?
2. Donner une permutation de lignes de A permettant d'utiliser ensuite la méthode de Gauss.
3. Donner la solution de ce système linéaire. (NB : La solution prend ses valeurs dans $\mathbb{Z}\ldots$)

Exercice 18 (LU). *Corrigé en page 51*

1. Donner la décomposition LU de la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
2. Montrer que la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ vérifie $PA = LU$ avec P une matrice de permutation, L triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure à déterminer.
3. Calculer la décomposition LU de la matrice $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Exercice 19 (Décomposition LU et mineurs principaux).
Soit $n \geq 1$. On considère la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont :

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 \text{ si } i > j, \\ 1 \text{ si } i = j, \\ 1 \text{ si } j = n, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que $\det A = 2^{n-1}$. [On pourra par exemple raisonner par récurrence et remarquer que $\det A = \det B$ où B est obtenue en ajoutant, pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$, la première ligne de A à la i-ieme ligne de A, ce qui correspond à la première étape de l'algorithme de décomposition LU.]
2. Montrer que A admet une décomposition LU sans permutation et calculer les coefficients diagonaux de la matrice U.

Exercice 20 (Conservation du profil)**.** On considère des matrices A et $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de la forme suivante, où x en position (i, j) de la matrice signifie que le coefficient $a_{i,j}$ est non nul et 0 en position (i, j) de la matrice signifie que $a_{i,j} = 0$)

$$A = \begin{bmatrix} \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} \\ \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & 0 \\ 0 & \mathrm{x} & \mathrm{x} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{x} & \mathrm{x} \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & 0 \\ \mathrm{x} & \mathrm{x} & 0 & \mathrm{x} \\ 0 & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} \\ 0 & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} \end{bmatrix}.$$

Pour chacune de ces matrices, quels sont les coefficients nuls (notés 0 dans les matrices) qui resteront nécessairement nuls dans les matrices L et U de la factorisation LU sans permutation (si elle existe) ?

Exercice 21 (Une méthode directe particulière)**.**
Soit $n \geq 1$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{R}^n$ (on rappelle que $\mathbb{R}^n$ est identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$), $C \in \mathcal{M}_{1,n}$ et $D \in \mathbb{R}$. On note $\bar{A}$ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie (par blocs) par :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

On suppose que la matrice A est inversible.
On note x_B le vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $Ax_B = B$.

1. Montrer que $\bar{A}$ est inversible si et seulement si $D - Cx_B \neq 0$.
2. On suppose maintenant que $\bar{A}$ est inversible. Soit $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$.
   On note x_b le vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $Ax_b = b$.
   Montrer que la solution de $\bar{A}x = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}$ est donnée par $x = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$ avec $z = \dfrac{c - Cx_b}{D - Cx_B}$ et $y = x_b - zx_B$.

Exercice 22 (Matrices définies positives et décomposition LU)**.** On rappelle que les mineurs principaux d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, sont les déterminants Δ_p des matrices $A_p = A(1 : p, 1 : p)$ extraites de la matrice A.

1. Montrer qu'une matrice symétrique définie positive a tous ses mineurs pricipaux strictement positifs.
2. En déduire que toute matrice symétrique définie positive admet une décomposition LU.

Exercice 23 (Sur la méthode LL^t)**.** *Corrigé détaillé en page 58.*
Soit A une matrice carrée d'ordre n, symétrique définie positive et pleine. On cherche à résoudre le système $A^2x = b$.
On propose deux méthodes de résolution de ce système :

1. Calculer A^2, effectuer la décomposition LL^t de A^2, résoudre le système $LL^tx = b$.
2. Calculer la décomposition LL^t de A, résoudre les systèmes $LL^ty = b$ et $LL^tx = y$.

Calculer le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour chacune des deux méthodes et comparer.

Exercice 24 (Décomposition LU d'une matrice à paramètres)**.** *Corrigé en page 53.*
Soient a, b, c et d des nombres réels. On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}.$$

Appliquer l'algorithme d'élimination de Gauss à A pour obtenir sa décomposition LU (si elle existe).
Donner les conditions sur a, b, c et d pour que la matrice A soit inversible.