1.6.3 Exercices (valeurs propres, vecteurs propres)

Exercice 71 (Méthode de la puissance). *Suggestions en page 143, corrigé en page 143*

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique (non nulle). Soit $\lambda_n \in \mathbb{R}$ valeur propre de A t.q. $|\lambda_n| = \rho(A)$ et soit $\boldsymbol{y}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $-\lambda_n$ n'est pas une valeur propre de A et que $\boldsymbol{y}^{(0)}$ n'est pas orthogonal à $\mathrm{Ker}(A - \lambda_n Id)$, ce qui revient à dire que lorsqu'on écrit le $\boldsymbol{y}^{(0)}$ dans une base formée de vecteurs propres de A, la composante sur sous-espace propre associé à λ_n est non nulle. (L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme euclidienne.) On définit la suite $(\boldsymbol{y}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ par $\boldsymbol{y}^{(k+1)} = A\boldsymbol{y}^{(k)}$ pour $k \in \mathbb{N}$. Montrer que

   (a) $\dfrac{\boldsymbol{y}^{(k)}}{(\lambda_n)^k} \to \boldsymbol{y}$, quand $k \to \infty$, avec $\boldsymbol{y} \neq 0$ et $A\boldsymbol{y} = \lambda_n \boldsymbol{y}$.

   (b) $\dfrac{\|\boldsymbol{y}^{(k+1)}\|}{\|\boldsymbol{y}^{(k)}\|} \to \rho(A)$ quand $k \to \infty$.

   (c) $\frac{1}{\|\boldsymbol{y}^{2k}\|}\boldsymbol{y}^{2k} \to \boldsymbol{x}$ quand $k \to \infty$ avec $A\boldsymbol{x} = \lambda_n \boldsymbol{x}$ et $\|\boldsymbol{x}\| = 1$.

   Cette méthode de calcul de la plus grande valeur propre s'appelle "méthode de la puissance".

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. Pour calculer $\boldsymbol{y}$ t.q. $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$, on considère un méthode itérative : on se donne un choix initial $\boldsymbol{y}^{(0)}$, et on construit la suite $\boldsymbol{y}^{(k)}$ telle que $\boldsymbol{y}^{(k+1)} = B\boldsymbol{y}^{(k)} + \boldsymbol{c}$ avec $\boldsymbol{c} = (Id - B)A^{-1}\boldsymbol{b}$, et on suppose B symétrique. On rappelle que si $\rho(B) < 1$, la suite $(\boldsymbol{y}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $\boldsymbol{x}$. Montrer que, sauf cas particuliers à préciser,

   (a) $\frac{\|\boldsymbol{y}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{y}^{(k)} - \boldsymbol{y}\|} \to \rho(B)$ quand $k \to \infty$ (ceci donne une estimation de la vitesse de convergence de la méthode itérative).

   (b) $\frac{\|\boldsymbol{y}^{(k+1)} - \boldsymbol{y}^{(k)}\|}{\|\boldsymbol{y}^{(k)} - \boldsymbol{y}^{(k-1)}\|} \to \rho(B)$ quand $k \to \infty$ (ceci permet d'estimer $\rho(B)$ au cours des itérations).

Exercice 72 (Méthode de la puissance inverse avec shift). *Suggestions en page 143. Corrigé en page 144.*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ $(p \leq n)$ les valeurs propres de A. Soit $i \in \{1, \ldots, p\}$, on cherche à calculer λ_i. Soit $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $\boldsymbol{x}^{(0)}$ n'est pas orthogonal à $\mathrm{Ker}(A - \lambda_i Id)$. On suppose également connaître $\mu \in \mathbb{R}$ t.q. $0 < |\mu - \lambda_i| < |\mu - \lambda_j|$ pour tout $j \neq i$. On définit la suite $(\boldsymbol{x}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ par $(A - \mu Id)\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

1. Vérifier que la construction de la suite revient à appliquer la méthode de la puissance à la matrice $A - \mu Id)^{-1}$.
2. Montrer que $\boldsymbol{x}^{(k)}(\lambda_i - \mu)^k \to \boldsymbol{x}$, quand $k \to \infty$, où $\boldsymbol{x}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i, c.à.d. $\boldsymbol{x} \neq 0$ et $A\boldsymbol{x} = \lambda_i \boldsymbol{x}$.
3. Montrer que $\frac{\|\boldsymbol{x}^{(k+1)}\|}{\|\boldsymbol{x}^{(k)}\|} \to \frac{1}{|\mu - \lambda_i|}$ quand $k \to \infty$.

Exercice 73 (Orthogonalisation de Gram-Schmidt). *Corrigé en page 144*

Soient $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, $u \neq 0$. On rappelle que la projection orthogonale $\mathrm{proj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v})$ du vecteur $\boldsymbol{v}$ sur la droite vectorielle engendrée par $\boldsymbol{u}$ peut s'écrire de la manière suivante :

$$\mathrm{proj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v}) = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}}\boldsymbol{u},$$

où $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ désigne le produit scalaire des vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$. On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

1. Soient $(\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n})$ une base de $\mathbb{R}^n$. On rappelle qu'à partir de cette base, on peut obtenir une base orthogonale $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ et une base orthonormale $(\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_n)$ par le procédé de Gram-Schmidt qui s'écrit :
Pour $k = 1, \ldots, n$,

$$\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{a_k \cdot v_j}{v_j \cdot v_j} v_j, \qquad \boldsymbol{q}_k = \frac{\boldsymbol{v}_k}{\|\boldsymbol{v}_k\|}. \tag{1.142}$$

1. Montrer par récurrence que la famille $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

2. Soient A la matrice carrée d'ordre n dont les colonnes sont les vecteurs $\boldsymbol{a}_j$ et Q la matrice carrée d'ordre N dont les colonnes sont les vecteurs $\boldsymbol{q}_j$ définis par le procédé de Gram-Schmidt (1.142), ce qu'on note :

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_2 & \ldots & \boldsymbol{q}_n \end{bmatrix}.$$

Montrer que

$$\boldsymbol{a}_k = \|\boldsymbol{v}_k\| \boldsymbol{q}_k + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{v}_j}{\|\boldsymbol{v}_j\|} \boldsymbol{q}_j.$$

En déduire que $A = QR$, où R est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont positifs.

3. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible, on peut construire une matrice orthogonale Q (c.à. d. telle que $QQ^t = \mathrm{Id}$) et une matrice triangulaire supérieure R à coefficients diagonaux positifs telles que $A = QR$.

4. Donner la décomposition QR de $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

5. On considère maintenant l'algorithme suivant (où l'on stocke la matrice Q orthogonale cherchée dans la matrice A de départ (qui est donc écrasée)

Algorithme 1.63 (Gram-Schmidt modifié)**.**

Pour $k = 1, \ldots, n$,

  <u>*Calcul de la norme de* $\boldsymbol{a}_k$</u>

  $r_{kk} := (\sum_{i=1}^n a_{ik}^2)^{\frac{1}{2}}$

  <u>*Normalisation*</u>

  Pour $\ell = 1, \ldots, n$

    $a_{\ell k} := a_{\ell k}/r_{kk}$

  Fin pour ℓ

  Pour $j = k+1, \ldots, n$

    <u>*Produit scalaire correspondant à* $q_k \cdot a_j$</u>

    $r_{kj} := \sum_{i=1}^n a_{ik} a_{ij}$

    <u>*On soustrait la projection de* a_k *sur* q_j *sur tous les vecteurs de* A *après* k.</u>

    Pour $i = k+1, \ldots, n$,

    $a_{ij} := a_{ij} - a_{ik} r_{kj}$

  Fin pour i

Fin pour j

Montrer que la matrice A résultant de cet algorithme est identique à la matrice Q donnée par la méthode de Gram-Schmidt, et que la matrice R est celle de Gram-Schmidt. (Cet algorithme est celui qui est effectivement implanté, car il est plus stable que le calcul par le procédé de Gram-Schmidt original.)

Exercice 74 (Méthode QR avec shift)**.** Soit $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & 0 \end{bmatrix}$

1. Calculer les valeurs propres de la matrice A.
2. Effectuer la décomposition QR de la matrice A.
3. Calculer $A_1 = RQ$ et $\tilde{A}_1 = RQ - bId$ où b est le terme a_{22}^1 de la matrice A_1
4. Effectuer la décomposition QR de A_1 et $\tilde{A}_1$, et calculer les matrices $A_2 = R_1 Q_1$ et $\tilde{A}_2 = \tilde{R}_1 \tilde{Q}_1$.